unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA ABORDAGEM EPISTEMOLÓGICA DE ALGUNS ASPECTOS

Lígia Arantes Sad

[INSTI]TUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
1998

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:
UMA ABORDAGEM EPISTEMOLÓGICA DE ALGUNS ASPECTOS

Lígia Arantes Sad

Orientador: Romulo Campos Lins

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
1998

S124c Sad, Lígia Arantes
Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. / Lígia Arantes Sad. _ 1998.
371 p.; il.

Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e sues fundamentos Filosófico-Científicos). Rio Claro: IGCE - Cp. de Rio Claro - UNESP, 1988.
Orientador: Romulo Campos Lins

1. Produção de significado. 2. Pensamento diferencial e integral. 3. Estipulações locais. 4. Conhecimento. 5. Campos Semânticos.

Ficha catalográfica preparada pelo Serviço de Biblioteca e Documentação do IGCE - Cp. de Rio Claro - UNESP.

Bibliotecária: Terezinha Regina Lorenzon Rodrigues - CRB-8 /1609.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Dario Fiorentini

____
Prof. Dr. João Frederico C. A. Mayer

____
Prof. Dr. Roberto R. Baldino

____
Prof. Dr. Antônio Vicente M. Garnica

____
Prof. Dr. Romulo Campos Lins (orientador)

____
Aluna

Resultado:

Rio Claro, _____. de ____________ de 1998.

SUMÁRIO

Agradecimentos

Ao professor Romulo C. Lins, orientador, que sempre acreditou no meu trabalho, um amigo especial.

Aos professores Rosa Lúcia S. Baroni, Roberto R. Baldino, Antonio Vicente M. Garnica e Seiji Hariki (in memoriam) da banca de qualificação, pela paciência de suas leituras e sugestões.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática e da Pós-Graduação em Educação Matemática - UNESP, Câmpus de Rio Claro, pela acolhida carinhosa, e incentivos. Em especial aos professores, Sérgio R. Nobre e Marcos V. Teixeira, pelas suas atitudes mais que de amigos, tendo paciência de me ouvirem e ajudarem a colorir meus momentos cinzentos em Rio Claro.

Aos colegas que comigo compartilharam idéias em grupos de estudos: Grupo de Cálculo e Análise e Grupo de Análise não-Standard, tendo na coordenação o prof. Roberto R. Baldino, incansável educador, e, aos colegas-companheiros do Grupo de Dialética do Conhecimento. À vocês: Mª Regina, Cláudia, Andréia, Mónica, Ronaldo e Ivanildo.

Aos professores do Departamento de Matemática - CCE - UFES, pela compreensão de minhas necessidades de um maior afastamento e confiança na seriedade de meu trabalho.

À minha família, pelo incentivo e atropelos que causei. Em especial a meus pais, pelo empenho em amenizar minha ausência junto a meus filhos e marido. À dedicação de Lúcia Helena.

Aos meus filhos, Adriana e Carlos Miguel, pela compreensão e amor, por dividirem comigo a superação das distâncias.

Ao meu esposo, Carlos Miguel, pelas inúmeras idas e vindas, sabendo valorizar meu esforço, mesmo sentindo-se só... e no seu silêncio transmitindo amor. Esta conquista tem sua presença.

RESUMO

Desde o princípio da pesquisa conduzimos nossas investigações centradas na produção de conhecimento a partir do Cálculo. Nosso interesse por uma pesquisa ligada ao ensino e aprendizagem de Cálculo com bases epistemológicas, tem como motivo principal as experiências vividas pela pesquisadora em termos de sala de aula dessa disciplina e a preocupação em contribuir para a compreensão do desenvolvimento do pensamento diferencial e integral do estudante em meio às atividades pertinentes ao Cálculo. Este trabalho divide-se em duas partes, uma de fundamentações teóricas e investigações histórico-epistemológicas e, outra, empirica _ de pesquisa de campo _, embora em nossos procedimentos essa dicotomia e ordenação não faça sentido devido ao entrelaçamento encontrado entre teoria e prática. Na parte teórica procedemos a uma revisão de literatura sobre trabalhos que têm interseções com Cálculo e Epistemologia, seguida de uma abordagem sobre teorias do conhecimento e de uma fundamentação para esta pesquisa centrada no Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS). A parte referente à pesquisa de campo, de ordem qualitativa, envolve coleta e análise de dados do tipo entrevistas, gravações de atividades em sala de aula, soluções escritas de problemas e observações em um caderno de campo. As análises são desenvolvidas à luz do MTCS, mostrando que não somente esse modelo é adequado, mas, principalmente, apontando os diferentes modos de produção de significados, objetos e conhecimentos em relação ao Cálculo. Sem pretensões de estabelecer abordagens ideais para sala de aula de Cálculo, nosso propósito é de indicar que certas posturas e procedimentos pedagógicos do professor contribuem mais que outras para que ele possa interagir, em nível das produções epistemológicas do aluno, e, em conseqüência, uma aprendizagem efetiva se realize.

PALAVRAS CHAVES: Produção de significado, pensamento diferencial e integral, estipulações locais, conhecimento e Campos Semânticos.

ABSTRACT

From the beginning of the study, our investigation was centered on the production of knowledge starting with Calculus. Our interest in a study linked to the teaching and learning of Calculus, with epistemological bases, is motivated mainly by the lived-experiences of the researcher in the classroom, and a concern for contributing to the comprehension and development of differential and integral thinking of the student with respect to activities pertinent to Calculus. The study was divided into two parts: one focused on theoretical foundations and historical-epistemological investigations; and the other empirical, based on fieldwork. However, in our procedures, this dichotomy and order make no sense due to the interlacement between Calculus and Epistemology, followed by a review of theories of knowledge and foundations of the present study centered on the Theoretical Model of Semantic Fields. The empirical part of the study referring to the fieldwork which was of a qualitative nature, involved collection and analysis of data such as interviews, recordings of activities in the classroom, written solutions to problems, and observations written in a field notebook. Analyses were informed by the Theoretical Model of Semantic Fields, showing not only that this model is adequate, but mainly pointing out the different modes of production of meanings, objects, and knowledge with respect to Calculus. Without pretensions of establishing ideal approaches for the Calculus classroom, we propose to show how certain pedagogical postures and procedures of the teacher contribute more than others to his/he interaction at the level if the epistemological production of the student, and consequently, to effective learning.

KAYS WORDS: Production of meanings, differential and integral thinking, local stipulations, knowledge, and Semantic Fields.

As cores matizam o horizonte

... quando os pássaros voam.

Errata

Em vez de...	*Leia-se...*
Pág. 37, §4: "Capitulo 3"	"Capítulo 4"
Pág. 48, §1 e Pág. 311: "Foulcault"	"Foucault"
Pág. 76, §2: "a partir deles"	"a partir delas"
Pág. 120, §1: ""não um nume"	"não um nome"
Pág. 257, §5: "(da faixa dos"	" da faixa dos"
Pág. 308. "***A Filosifia***"	" ***A Filosofia***"

Capítulo 1

PERSPECTIVAS INICIAIS

1.1 TRAJETÓRIA PESSOAL[1]

Desejo deixar registrados alguns relacionamentos profissionais e reflexões críticas que me impulsionaram inicialmente para esta pesquisa. Reflexões estas que me levaram às percepções em relação ao meu próprio desenvolvimento, às mudanças em minhas concepções enquanto professora de matemática, ocasionadas no meio influente da própria prática.

As considerações que faço a seguir fazem parte da contextualização necessária, por tratar-se de história de vida[2] (aqui escrita como autobiografia). Particularmente, um auto-estudo dentro de minha história de vida.

Em 1977, comecei a trabalhar com o 3º grau, vinculada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, mas sempre pensando numa Pós-Graduação em Matemática, que me daria, entre outras coisas, um melhor embasamento para continuar a ensinar.

O perfil dos professores universitários demonstrava uma formação essencialmente sobre conteúdos, com a crença de que bastava entender bem as estruturas matemáticas e dedicar-se a ensiná-las para "fazer com que o aluno

[1] Neste item a respeito da trajetória pessoal, julgamos ser mais adequado à questão de cunho pessoal o tratamento na 1ª pessoa do singular.

[2] Autores de metodologias qualitativas, ao referirem-se, especialmente, à história de vida, delegam à mesma o poder de ser fonte de informação de acontecimentos que nos inteiram da realidade subjetiva do sujeito historiado. Como trata, por exemplo, Hart (1991, p.7) a respeito de biografias ou autobiografias e Pollentini (1996, p.30) ao tomar, como metodologia de pesquisa em seu estudo dos processos de mudança e desenvolvimento de professores, a 'história de vida' de duas professoras de matemática.

aprendesse", ou seja, ser um bom professor.[3] Confiante nisso, colocava a culpa dos fracassos principalmente nos alunos que não estudavam o suficiente, na falta de atenção deles em aula, ou até mesmo no professor por não ter colocado o conteúdo de modo "entendível", por falta, é claro, de um maior rigor matemático.

Dessa forma, metodologias, teorias de aprendizagem, estratégias alternativas de ensino, posições quanto à produção de conhecimento, eram desconhecidas, raramente eram mencionadas ou tinham vez perante as reflexões dos conteúdos a serem ministrados. As discussões quanto ao conhecimento dos alunos centravam-se no conhecimento do conteúdo matemático através das avaliações escritas e, por vezes, em como foi ensinado determinado conteúdo, o que havia sido explorado, ou se era pertinente ao programa do curso. Viciada no sistema, procurava ser "perfeita" matematicamente diante dos alunos (ser uma "palestrante" convincente no caminhar do encadeamento lógico do conteúdo matemático) e aprofundar cada vez mais as respostas às perguntas dos alunos, buscando priorizar, acima de qualquer tipo de demanda do estudante, uma direção matemática julgada "superior" (cada vez mais dentro de uma lógica abstrata e formal).

Seguindo no intuito de adquirir um melhor embasamento dos conteúdos matemáticos, sem poder me afastar de Vitória por motivos familiares, para cursar uma Pós-Graduação em Matemática, resolvi aproveitar a oportunidade que me dava o Departamento de Matemática de ingressar em um Curso de Pós-Graduação lato-sensu nessa disciplina, na UFES, que contava com a participação de professores visitantes do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e de alguns professores do nosso departamento, e, em 1986, conclui o referido curso (com monografia na área de Topologia), sob orientação do professor Dr. Walmecir dos Santos Bayer.

---

[3] Uma mais ampla discussão e crítica, a respeito das crenças e concepções de alunos e professores no ensino tradicional de terceiro grau, que veio reforçar minhas observações, encontra-se no trabalho de Silva (1993).

Por muitos períodos, trabalhei em equipes de Cálculo em que professores doutores (conhecedores plenos do conteúdo) participavam e, no entanto, por parte dos seus alunos, surgiam com bastante freqüência comentários e depoimentos do tipo: *"...O professor, por saber muito, 'voa alto' e nós, alunos, não conseguimos acompanhá-lo, ele não 'desce' até nós, sabe muito pra ele!" ; "...Na aula parece que entendi tudo, mas depois é que vejo que não sei nada!" ; "...Ele sabe muito! E... exige coisas 'abstratas demais', sem sentido"; "...Geralmente esses professores só gostam de 'tirar dúvidas' e 'explicar' para os alunos que já entenderam quase tudo e, para nós, que temos muitas dificuldades, parecem não ligar" ; "...Ele é 'fera' mas não gosto da matéria. Há um bloqueio, não vejo significado algum pro meu curso" ; "...A matéria é cheia de demonstrações difíceis, e o professor vai pro quadro e fala pra ele! Não sabe transmitir" ; "...O professor sabe pra 'caramba'! Mas suas provas são 'lascadas'!"* Esses comentários, na época, comecei a anotar porque os julgava de importância na avaliação dos professores, que era feita em cada término de período, pelos alunos, e também devido às sugestões de procedimentos que por vezes tinha condições de discutir nas equipes.

Não sei precisar exatamente quando, mas foi diante do acúmulo de reprovações dos alunos, implicando "fracassos" de muitos deles em não poderem matricular-se em disciplinas que eram de sua periodização normal no curso, que passei a examinar, como membro do Colegiado de Curso de Matemática e "professora orientadora" (figura criada pelo departamento de Matemática, responsável pelo acompanhamento acadêmico de alunos de determinados períodos), certas características do ensino e da aprendizagem que antes passavam completamente despercebidas. Essas caracteristicas tomaram novas dimensões a partir do ano de 1991, quando tive a oportunidade de discutir algumas delas num grupo de estudos sobre ensino/aprendizagem de Matemática, formado por quatro professores do Departamento de Matemática (Ana Lúcia Junqueira, Fábio C. Dutra, Maria Auxiliadora V. Paiva e eu). Tínhamos, paralelamente, iniciado a elaboração de projetos ligados ao ensino, pensando em como a universidade poderia contribuir para solucionar as dificuldades encontradas e propaladas pelos professores de 1º e de 2º graus, que eram nossos alunos ou ex-alunos.

Neste interim, começamos a estudar, mais especificamente, Teorias da Aprendizagem e História das Ciências, além de outros temas mais ligados à Educação de 1º e 2º graus, à História da Matemática e à Psicologia.

Através de um projeto de ensino, aprovado pela Sub-Reitoria de Extensão da UFES, em convênio com a CAPES, tornou-se nossa meta a formação de um Laboratório de Ensino. Esse objetivo foi conseguido e passamos a trabalhar, a partir do ano de 1992, no então denominado Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática _ LEACIM _, juntamente com professores dos Departamentos de Física e de Biologia da UFES, alunos da graduação e alguns professores da rede pública de ensino (ex-alunos da Licenciatura em Matemática).

Com essa aproximação de alunos das licenciaturas e de professores de 1º e 2º graus, fui me inteirando um pouco mais de toda a problemática por eles vivenciada. Comecei a me perguntar onde esses problemas de ensino e aprendizagem de Matemática poderiam ter um fórum próprio para serem mais discutidos e estudados de uma forma científica, que não fosse apenas relativa a conteúdo matemático. Deparei-me, então, com uma área emergente, denominada Educação Matemática.

Passei a participar ativamente dos encontros nacionais nesta área (Encontro Nacional de Educação Matemática _ ENEM _) e na execução de encontros estaduais. Em nível de movimento do Estado do Espírito Santo, também participei da confecção de estatuto e da primeira chapa de diretoria estadual da Sociedade Brasileira de Educação Matemática _ SBEM _.

Com uma carga de trabalho de quarenta horas por semana e regime de dedicação exclusiva (DE), lecionava Matemática em vários cursos da UFES (Matemática, Estatística, Física, Engenharia, Química, Administração, Economia e Arquitetura), às vezes dois ou mais por período, tendo tido, desde 1977, cerca de 65 turmas em que a disciplina lecionada tinha conteúdo programático de Cálculo Diferencial e Integral.

Notava, então, que dar aulas de Cálculo para os alunos do Curso de Matemática exigia um discurso diferenciado em relação, por exemplo, a fazer o mesmo num Curso de Arquitetura.

Os alunos e professores dos respectivos cursos não compartilhavam e não reagiam igualmente às atividades, aos diálogos, às falas. Será que a constituição dos objetos matemáticos também sofria variações significativas? Pelo que diziam colegas da Matemática: *"...mas, os fundamentos do Cálculo são os mesmos! Só fazemos mais ou menos demonstrações (dependendo do curso) e diversificamos algumas aplicações"*, parecia que as diferenças eram uma questão de "aprofundamento" dos assuntos abordados.

Contudo, na ânsia de ajudar os alunos na aprendizagem dos objetos do Cálculo Diferencial e Integral, sentia que parecia não ser bem assim, que esta estratégia de certa homogeneidade no "falar matemático" não era suficiente, embora parecesse necessária a nós professores; ou, até mesmo, ao contrário, que ela podia estar dificultando a aprendizagem de uma parte dos alunos.

Talvez devesse usar uma diversidade maior (mas...como?) ao falar sobre os objetos do Cálculo, embora tivesse como objetivo, dentro da Matemática, uma unicidade em relação à construção dos mesmos, o que nos levava a adotar a estratégia supracitada. Uma unicidade que sabemos não ser sinônimo de uniformidade.

Além disso me descontentava o produto final da aprendizagem que se exteriorizava nos alunos de Cálculo, concentrada apenas na reprodução de algoritimos e técnicas em situações semelhantes às vistas. Isso eu percebia não só em meus alunos, ao final dos periodos, em conversas informais ou em provas, mas também nas disciplinas seguintes, quando mencionava ou usava os objetos constituídos na disciplina de Cálculo.

Ao entrar numa sala de aula, após iniciar os estudos no grupo de 1991, já não podia impedir que uma nova estruturação de valores dentro da aprendizagem e do ensino tomasse lugar em meio aos meus pensamentos, embora, em termos de procedimentos, tivesse modificado muito pouco. Ainda tinha muitas dúvidas, insatisfações e poucas respostas.

Resolvi, então, investir na área de Educação Matemática, mesmo com alguma indiferença e falta de estímulo que recebia de colegas do Departamento de Matemática quanto a essa escolha.

No primeiro semestre de 1993, motivada para cursar uma Pós-Graduação em Educação Matemática, consegui estabelecer um contato mais direto com o professor Dr. Romulo C. Lins, que participava, como convidado e palestrante, de um encontro de professores na UFES e que, oportunamente, nos colocou mais a par das pesquisas em Educação Matemática feitas na UNESP-Câmpus de Rio Claro.

Dessa forma, resolvi que, no segundo semestre de 1993, usufruindo de uma licença sabática e de condições pessoais/familiares propicias, participaria daquele programa de Pós-Graduação em Educação Matemática como aluna especial, visando a uma possível continuação. Oficializei o pedido junto ao Departamento de Matemática e fui liberada.

Durante o período cursado como aluna especial e, principalmente, no primeiro ano como aluna regular do referido programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, dois fatores foram importantes para definir a linha de pesquisa a ser implementada: os contatos com o Grupo de Pesquisa em Epistemologia e a participação no Grupo de Estudos de Cálculo e Análise.

Nos contatos com o grupo de pesquisa em epistemologia, foram relevantes as conversas com seu coordenador (meu orientador na Pós-Graduação) professor Romulo C. Lins.

O Grupo de Estudo de Cálculo e Análise reunia-se sob a orientação do professor Dr. Roberto R. Baldino. Esse era um dos grupos integrantes do Grupo de Pesquisa e Ação (GPA), atuante junto à graduação em Matemática, à pós-graduação em Educação Matemática e aberto à participação de professores da comunidade de Rio Claro. Nesse grupo de estudos, com reuniões periódicas semanais, tínhamos uma identificação dialógica (conversávamos segundo nossas vivências como alunos e professores de Matemática no terceiro grau) e um espaço com interesses convergentes para trabalhar com as discussões de sala de aula de Cálculo e Análise.

Assim, em 1994, após o ingresso como aluna da Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP - Campus de Rio Claro, optei pela pesquisa em aprendizagem e ensino de Cálculo (entre outras coisas, mais próxima a minha prática profissional). A princípio, a pesquisa envolvia a diversificação possível de produção de significados ao construir objetos matemáticos, o que situava, no meu entender, o campo de pesquisa em torno de uma linha cognitiva ligada à produção de conhecimento.

Perguntava-me, entre outras coisas, se existiria alguma relação com os diferentes cursos e resultados de ensino/aprendizagem em que esta disciplina (Cálculo) era ministrada. Como poderia observar? Em que isso poderia contribuir? Que direcionamentos e ligações deveria escolher e abordar dentre os aspectos que pareciam se apresentar conjuntamente à pesquisa, por exemplo: os pedagógicos, os psicológicos e os metodológicos?

1.2 SOBRE O PROJETO DE PESQUISA

Como dissemos, este trabalho desde a elaboração de seu projeto, centraliza-se em uma análise epistemológica de aspectos da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Julgamos importante situar que o projeto originalmente apresentado sofreu inúmeras mudanças durante sua execução, mas sempre nos serviu de orientação. As mudanças foram mais de aspectos teóricos, referentes tanto à forma estrutural de apresentação quanto a algumas inserções bibliográficas. Contudo, desde o início, uma pergunta estava presente a provocar os encaminhamentos das investigações:

PERGUNTA DIRETRIZ: **São estabelecidas diversificações nos modos de produção de significados e de objetos a partir do Cálculo diferencial e integral? Quais?**

É relevante observar que essa pergunta dupla, se fixada em sua primeira parte, que pode ter uma interpretação de aparente insipidez ou "obviedade", não aceita um simples "sim" ou "não" como resposta sem qualquer discussão ou fundamentação. É preciso notar que os *significados* a que ela se refere, no contexto em que foi pensada, são significados matemáticos constitutivos de certos modos de produção do pensamento diferencial e integral, bem como de seus objetos.

Além disso, na pergunta diretriz, a referência de *diversificação de modos de produção de significado* é feita em "relação aparente" a um mesmo objeto construído (por exemplo, diferencial da variável *x*, "*dx*") e simbolicamente representado em uma mesma proposição lingüística. Para responder a essa questão com propriedade, temos que investigar, entre outras coisas: qual a natureza desses objetos construídos? A partir de que se constituem (de qual(is) significado(s), ou de quais outros objetos ou princípios)? Em conjunto com que justificativas matemáticas? Realmente existe diversificação nos modos de produção de significados, ou são meras metáforas ou mimeses de um mesmo objeto constituído?

OBJETIVOS DO PROJETO DE PESQUISA:

*Mostrar que o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) é adequado ao levantamento da pergunta diretriz e a um estudo histórico-epistemológico do Cálculo.

*Detectar algumas das conseqüências em se olvidar tanto o aspecto formativo desempenhado pela linguagem quanto a observação dos Campos Semânticos (CS) no ensino-aprendizagem do Cálculo.

*Explorar diretrizes para se desenvolver um método de produção de significados dentro do Cálculo, abrindo uma nova perspectiva para o estudo de seu ensino e aprendizagem.

*Identificar até que ponto a prática social deve ser considerada como fator de importância na atividade dos interlocutores (para os quais se fala), fazendo com que a produção de significado ocorra em determinados CS e não em outros.

No decorrer das investigações, estávamos ciente de que tínhamos que compatibilizar entre as experiências em sala de aula, os modelos e linhas teóricas presentes na Educação Matemática e os nossos objetivos enquanto pesquisadores, porque uma pesquisa raramente se estabelece por uma demanda livre de um direcionamento institucional ou de "patrocinadores" (econômicos, políticos, culturais e outros), que impõem os limitantes.

Desde sua apresentação, o projeto de pesquisa teve como opção uma metodologia qualitativa, envolvendo observação sistemática em salas de aula de Cálculo, entrevista pessoal (com professor e aluno) e entrevista com grupos de alunos.

As considerações sobre o modo de conduzirmos as investigações foram primordiais para a flexibilização necessária em todo seu processo, o qual envolveu pesquisa com objetivos dependentes de outros fatores não só teóricos (como sala de aula). Esse "ir e vir" entre a prática observada em sala de aula e a fundamentação teórica metodológica foi, sem dúvida, uma parte importante do processo em meio ao qual construímos nossa pesquisa, e sem o qual não seria esta pesquisa.

1.3 GÊNESE DA PESQUISA

As dificuldades que permeiam o ensino e aprendizagem das noções fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral são questões que, em diferente intensidade, têm correlações com outros problemas, inclusive de ordem não epistemológica. O convívio nas salas de aula dos mais variados cursos que necessitam dessa parte da matemática nos coloca em contato direto com essas dificuldades que são também denunciadas no índice de reprovação e de desistência que marca esta disciplina no início dos cursos nos quais é ministrada.

À medida que a tecnologia avança, o uso de softwares (programas) que resolvem problemas envolvendo Cálculo Diferencial e Integral tem sido cada vez maior. A utilização do computador (como das calculadoras gráficas) no ensino, por ser um poderoso auxiliar na diversificação e implementação das atividades, bem como na possibilidade de modificação do modo de pensar e agir do aluno perante um problema, levanta uma necessidade investigativa que vai além do tipo de treinamento que é normalmente requerido de seu usuário, atinge as metodologias de ensino e acaba chegando às dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem com a adição de novos elementos a serem considerados.

Queremos realçar com isso que, frentes de pesquisas vêm se desenvolvendo a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo, usando o computador e, em nossa opinião, os problemas epistemológicos envolvidos nesses dois processos (juntamente com os demais) parecem ter ganho, por um lado, mais um aliado _ de auxílio à investigação dos mesmos _ mas, por outro lado, continuam a existir. Por exemplo, em termos de modo de produção de significados, pode ser que o uso de certos aplicativos computacionais favoreçam mais a nucleação em torno de formas visuais geométricas, porém, da mesma forma, o aluno terá que produzir determinados significados e conhecimentos julgados pelo professor ("detentor" do poder acadêmico) como certos. Ele produz? Como conseguir que ele os produza? Produz outros? Quais? Será que depende da atividade que é elaborada? Depende das ações pedagógicas tomadas pelo professor? Ou seja, em resumo, as pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral continuam a necessitar de investigações sob o ponto de vista epistemológico.

Resolvemos centrar as observações, na sala de aula de Cálculo, no que diz respeito aos *significados* _ "*conjunto de coisas que se pode falar e efetivamente se diz a respeito de um objeto* [grifo nossso]" (Lins, 1997b, p. 145) _ produzidos pelos alunos e os produzidos pelos professores ao utilizarem-se do discurso matemático acadêmico, independente da metodologia usada ou de outros instrumentos, embora não deixando de lado as relações e interferências que possam ser estabelecidas. Podemos dizer, assim, que, desde sua gênese, esta pesquisa teve um veio epistemológico.

Em meio a isso, continua a se evidenciar que o ensino da matemática, no terceiro grau, freqüentemente apresenta a forma acabada de uma teoria, pois não possibilita ao estudante uma participação devida nos processos de constituição dessa forma matemática de pensar, o que leva, de certo modo, também a acreditar que os objetos matemáticos ensinados e aprendidos são constituídos de modo único, independente dos estudantes (de sua formação, de sua demanda enquanto aluno ou futuro profissional), do livro texto ou de outro instrumento utilizado. Nessa direção, é comum escutar: "*os objetos do Cálculo são sempre os* *mesmos, embora se fale sobre eles com algumas diferenças de tratamento"*, ou mesmo "*Cálculo é Cálculo, embora as aplicações se diversifiquem"*.

Pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo no terceiro grau reforçam as evidências deste problema de apresentação formal dos enunciados matemáticos, de modo linearizado numa cadeia de resultados, que parecem não admitir discussões. Podemos encontrar, por exemplo, no trabalho de Tall (1991), que abordagens correntes para o ensino superior tendem a proporcionar aos alunos o produto do pensamento matemático, enquanto o processo do pensar matemático é relegado. Não se costuma focalizar, de um modo geral, a trajetória completa do pensamento matemático avançado.[4] desde o ato criativo de considerar o contexto do problema que leva à formulação de conjecturas, à constituição das afirmações e justificações, ao estágio final de refinamentos, resultados e provas.

> *Não somente métodos correntes de apresentar o conhecimento matemático avançado falham em atribuir o poder do pensar matemático, como também em outra, igualmente séria deficiência: uma apresentação lógica[5] pode não ser apropriada para o desenvolvimento cognitivo do aprendiz* (Tall, 1991, p. 3).

É crucial também estabelecer que, ao considerarmos a matemática uma criação humana, um texto de linguagem específica, ela é parte integrante do nosso contexto (sócio-cultural-ideológico), e qualquer pesquisa a ser empreendida na direção de sua aprendizagem precisa levar em conta não somente os contextos das concepções dos matemáticos como, principalmente, os dos alunos (os aprendizes em foco).

---

[4] Tall (1991, p. 20) diz que muitos dos processos (transição e reconstrução mental, generalização e abstração, intuição, rigor, análise e síntese) do pensar matemático avançado podem ser encontrados em um nível mais elementar, e o que faz a passagem do pensar matemático elementar para o avançado é a transição do *descrever* para *definir* e de *convencer* para *provar*, de um modo lógico baseado nas definições formadas. "*Esta transição de coerência da matemática elementar para a conseqüência da matemática avançada, basea-se em entidades abstratas as quais o indivíduo precisa construir através de deduções das definições formais.*"

[5] Ao referir-se a uma ***apresentação lógica***, o autor quer dizer um tipo de apresentação na qual os raciocínios e resultados matemáticos são encaminhados de modo formal e linearizado (concatenados), numa apresentação lógica (para "bons entendedores") dos conteúdos matemáticos.

As interferências, por sermos parte deste contexto múltiplo, podem variar em relação ao ato de aprender.[6] Embora pertencendo a um mesmo grupo social, os sujeitos podem ter diferentes modos de produção de uma noção matemática, dependendo de suas experiências prévias (inclusive a produção das noções de rua).

> *Em outras palavras, conceitos científicos são parte do processo de organização da atividade humana. Mas os conceitos da rua têm o mesmo papel, o de participar do processo de organização da atividade humana* (Lins & Gimenes, 1997, p. 23).

Ainda em grupos mais seletos, como o de estudantes de Cálculo, observamos, por exemplo, que, se tomarmos o resultado matemático de que os reais formam um corpo ordenado completo e fizermos a associação comum com pontos sobre uma "linha numérica", observamos que alguns estudantes vêem, como implicação, que não existe "lugar" para colocar mais nenhum número: a linha numérica é completa.[7] Em particular, os estudantes não aceitam que se "engorde" a linha numérica e se englobem os hiper-reais e que, assim, ela possa conter os infinitésimos _ que são positivos mas menores que qualquer racional positivo não nulo _ dentro da análise não-standard. Outros olham a "completude" como um resultado técnico que adiciona os pontos limites de seqüências de Cauchy de números racionais, sendo perfeitamente possível colocar os números reais em um conjunto numérico maior, incluindo os infinitésimos e números infinitos, os hiper-reais. Esse é um modo de aceitar a teoria da análise não-standard. Mas, por exemplo, Cantor negou a existência de infinitesimais,

---

[6] Pesquisas recentes de Walkerdine (1988) têm demonstrado a influência dos significados gerados na regulação das práticas (até mesmo de contextos familiares) dos alunos em suas aprendizagens escolares.

Lins & Gimenes (1997, p. 17 e 18) dizem que: "... *nossos alunos estão vivendo em dois mundos distintos, cada um com sua organização e seus modos legítimos de produzir significado. [...] A alternativa que vamos defender é que o papel da escola é participar da análise e da tematização dos significados da matemática da rua - no caso particular da Educação Matemática -, e do desenvolvimento de novos significados, possivelmente matemáticos, que irão coexistir com os significados matemáticos, em vez de tentar substituí-los*".

[7] Isso também foi detectado em outras pesquisas, como a de Sierpinska (1987) e a de Cornu (1983).

baseando-se na não- possibilidade de calcular o inverso de um número infinito em sua teoria de cardinais infinitos.[8]

O próprio tratamento com o *infinito* fornece uma diversidade que, através da filogênese, podemos observar desde Arquimedes. O *infinito* foi um significante na matemática que teve articulado a vários *significados*, cuja produção se deu de diferentes modos. Ora como infinito real (ou atual), ora como infinito potencial, e outros mais.

Embora o símbolo ∞ tenha sido usado por muitos matemáticos desde Wallis, seu significado variou. Weierstrass, por exemplo, usava ∞ significando potencialidade e uma "realidade". Ele escreveu: $f(a) = \infty$ para significar que $\frac{1}{f(a)} = 0$, e $f(\infty) = b$ para representar que o limite de $f(x)$, para x muito grande, era b.

Cantor, talvez para evitar confusões, escolheu o símbolo ω para representar o infinito real agregado aos inteiros positivos, de acordo com o que ele chamou, em sua teoria, de potência de um conjunto infinito de elementos, e com isso pode representar um número transfinito de potência superior.

Mas, como bem escreve Boyer (1959), o fato da cardinalidade de um conjunto poder ser infinito, junto à definição de variável contínua, foi o bastante durante algum tempo, aos conceitos do Cálculo; ou seja, os fundamentos eram remetidos a conjuntos numéricos de inteiros, finitos e infinitos, sem precisar entrar nas dificuldades inerentes ao infinito real (por exemplo, mais tarde fez-se na análise não-standard). O rigor lógico, finalmente, (con)venceu e concretizou a constituição desse modo de produção dos fundamentos que matemáticos, como Weierstrass, Dedekind, Cantor e outros, ajudaram a estabelecer para o Cálculo.

Assim, não há um verdadeiro e absoluto modo de pensar sobre Matemática, de constituir seus significados e seus objetos, como historicamente também pudemos evidenciar (veja Capitulo 4). Mesmo argumentando sob o ponto

---

8 Ver TALL (1991, p. 6).

de vista do desenvolvimento na prática (por exemplo, em sala de aula) de uma teoria matemática, que parece obedecer a certos componentes: uma linguagem, um conjunto de afirmações aceitas, um conjunto de questões aceitas e um conjunto de visões metamatemáticas (incluindo modelos de provas e definições),[9] podemos observar que esses componentes têm variações. Além do que, eles são advindos do domínio do enunciado matemático, que é escrito para um leitor (ideal, sem "falhas"), e que por meio de um outro leitor (real) se transformam em enunciação.

No nosso entender, enunciar algo _ *enunciação* _ é um processo dinâmico, dependente de um sujeito da enunciação, considerado um pouco diferente do que *falar* algo, pois este último pode ser reduzido a articulação lingüística de uma palavra apenas (de "falar como um papagaio" ou de "falar por falar" uma letra de uma poesia, de uma música), e, durante tal *fala* podemos estar pensando em outra coisa, com atenção desviada a outro intuito, enquanto a *enunciação* tem o "status" de uma proposição, de uma "fala social" (como Vygotsky trata), com uma intenção, dirigida, parte de uma demanda. Geralmente a *fala* é intencional, e quando assim ocorre é considerada como uma *enunciação*. Uma enunciação também pode ser efetivada via gestos, imagens e sons (como assobios).

Com um aspecto estático temos os <u>enunciados</u> que concebemos como <u>resíduos das enunciações</u>, tais como os textos escritos e as memorizações. É o caso do livro texto de Cálculo, um enunciado matemático para o aluno, que o transforma em enunciação segundo uma demanda por parte de seus *interlocutores*, que ocasiona a escolha de certos *modos de produção de significado* para as *crenças-afirmações e justificações* e, conforme sejam construídas, de acordo com a linguagem matemática, são, de modo particular, classificadas como um <u>conhecimento matemático</u> do aluno.

---

[9] Cf. KITCHER (1984, apud Tall, 1991, p. 56).

Em certos grupos sociais onde é trabalhado e produzido um conhecimento matemático avançado,[10] e em cujos grupos existe uma maior convergência em relação às experiências anteriores dentro da Matemática, é de se esperar pouca ou até por vezes nenhuma diversificação dos modos de produção de significado a partir da Matemática.

Juntamente com essa preocupação de explicitar nossa linha epistemológica, vem o fato de estarmos apoiada numa vertente que enfatiza um lado social das relações do sujeito com o outro, em que, para nós, o sujeito central é o estudante _ sujeito do conhecimento e de uma aprendizagem _ aluno em sala de aula e fora dela (aluno-professor, aluno-aluno, aluno-interlocutor) em seus contatos como aprendiz.

Posto que a aprendizagem é um processo "globalizado" _ no sentido de ser um processo epistêmico, subjetivo e ao mesmo tempo na dependência das práticas sociais envolvidas _ embora especificando-a a partir de atividades na disciplina de Cálculo, acreditamos na investigação de uma fonte principal que é a produção de significados pelo aluno. Nesse caso, essa investigação tem como material básico as produções dos estudantes durante as atividades, isto é: suas <u>*enunciações*</u> e seus <u>*enunciados*</u> escritos .

Cabe ressaltar, contudo, que uma seleção prévia à investigação, é feita a alguns objetos do "mundo do Cálculo", com o objetivo exclusivo de restringir e delimitar o universo desta pesquisa e possibilitar sua implementação dentro dos limites de tempo determinados. Além disso, sabemos que estas produções são implementadas em meio às diversas atitudes (do aluno e do professor) e que, embora não estudadas nesta pesquisa, não deixarão de ser consideradas.

[10] Aqui estamos tratando, de modo bem simplista, um conhecimento matemático como 'avançado' se as suas afirmações e justificações precisam considerar uma matemática pelo menos de nível universitário. Porém como já dissemos anteriormente (veja nota de rodapé sobre o pensar matemático avançado), em seus estudos sobre o assunto, Tall (1991, p.3) afirma que, o ciclo de atividades do pensar matemático avançado pode ser visto como aquele que a partir do ato criativo de considerar um determinado problema, contextualizado na investigação matemática, conduz à formulação de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova. A possibilidade de definição formal e de dedução são fatores que distinguem o pensar matemático avançado.

Os objetos, inclusive aqueles de que nos ocupamos no conhecimento matemático, são constituídos através da produção de significado, e os modos de produção podem ser diferenciados de acordo com o interlocutor (para o qual quero falar) e com o motivo e o *sentido* da atividade. Por exemplo: um estudante quer aprender derivada, porque depende disso para ser aprovado (motivo que o faz engajar-se). O professor lhe fala de derivada. Para um colega, ele enuncia: "*Cara, derivada é uma 'boa' porque resolve a maioria dos problemas do livro*", pois o seu interlocutor (o colega) compartilha da crença de que, se resolver em parte os problemas do livro, eles passam. Mas, para o professor, diz : "*Derivada é f'(x)* (e no máximo o aluno escreve, se memorizou), $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Então, derivada parece ter se reduzido aos algoritmos, às regras de derivação, pois isso lhe basta para passar.

Assim sendo, dos possíveis significados produzidos na enunciação do professor, ao falar de derivada, ou que poderiam ser produzidos pelo aluno (por exemplo, como a respeito de acréscimos reais que determinam uma vizinhança de um ponto, acréscimos infinitesimais que determinam as mônadas, taxa de variação, cálculo infinitesimal em uma mônada, reta tangente como limite de retas secantes, derivada como coeficiente angular de uma reta tangente à curva, derivada como uma função, derivada como um limite de um quociente especial), apenas foi produzida a derivada como uma regra, o algoritmo. Para ele, parece que a demanda não foi determinada pelo professor (um interlocutor "menos significante" neste caso), mas, previamente, sua demanda deve ter vindo de seu contexto social (familiar, institucional, ou qualquer outro), já que seu sentido _ passar (querer ser aprovado na disciplina, mesmo sem determinados conhecimentos) _ é geralmente uma "exigência" comum aos pais, à instituição, aos quais quer agradar (seu motivo).

> *Na conversação todas as frases são impelidas por um motivo. [...] Os motivos variáveis dos interlocutores determinam a todo instante o curso da fala oral. Ela não tem que ser conscientemente dirigida _ a situação dinâmica se encarrega disso _* Vygotsky (1995, p. 85).

Nesta parte social de convivência em sala de aula, para o destaque necessário à construção epistêmica do aluno, a fala é elemento muito importante. Por isso, além do MTCS, recorremos várias vezes às idéias de Bakhtin (entrelaçadas com as de Vygotsky) no que se refere ao estudo da fala e da linguagem, e às de Vygotsky e Bruner quanto à produção de significado. Uma exposição sucinta dessas noções fundantes, segundo esses autores, é incluída no Capítulo 4.

1.3.1 Alguns destaques na pesquisa

Um estudo de objetos do Cálculo

Os objetos selecionados para as investigações, quer seja no estudo histórico-epistemológico, ou em sala de aula (pesquisa de campo), foram escolhidos por estarem envolvidos ou envolverem noções sobre números reais, infinito ou de limite de funções, que atualmente permeiam todo o início da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral de alunos de diversos cursos do 3º grau (Engenharia, Matemática, Arquitetura, Economia, entre outros); e que levou a perguntas como: a produção de significado relativa aos objetos considerados é diferenciada? Por que podemos afirmar ou não? Que tipo de diferenciações? Isso pode ajudar no processo de aprendizagem de Cálculo? Há diferenças detectáveis na constituição dos objetos matemáticos, quando se trata de alunos de cursos diferentes? Ou isso não depende do grupo de alunos ou do curso e, sim, do professor?

É importante compreender **como** a reflexão, a partir dos objetos matemáticos concernentes à esta pesquisa, tem sido feita e, conseqüentemente, **como** os textos são lidos, para que este estudo não fique parecendo apenas um esmiuçar de abordagens de pontos da Matemática e da História da Matemática, em uma leitura somente do tipo "sucessões de fatos a serem narrados". Mas que nosso estudo histórico-epistemológico[11] seja visto como um procedimento dinâmico em suas subseqüentes leituras e interpretações dos textos, nos quais procuramos superar a procura de um significado "real" (fixo, único, transcendental em relação a nós) e alcançar o nosso modo preferencial de falar sobre o que estamos lendo, ou o que o texto nos ajuda a produzir nas leituras sucessivas. Portanto, com este referencial, não podemos deixar de levar em consideração a influência das leituras dos textos conjuntamente ao ato das interpretações, produzindo as verdades no próprio processo de busca, em relação aos pontos históricos demarcados.

Pesquisa de trabalhos afins

Uma outra fonte de incentivo às nossas diretivas de pesquisa foram os poucos, mas significativos, trabalhos já implementados envolvendo ensino-aprendizagem de Cálculo ou epistemologia. Dentre eles, escolhemos alguns, sobre os quais destacamos certos pontos que julgamos de maior relevância, agrupando-os em uma revisão literária (Capítulo 3 desta tese).

Trabalhos relativos à pesquisa de campo

No que se refere aos métodos ou técnicas para coleta de dados, na parte de trabalho de campo, vimos como adequado para procedermos tanto à análise epistemológica em meio às atividades em sala de aula quanto à análise das experiências dos professores e alunos, a observação participante e a entrevista. Optando pois, para uma metodologia qualitativa que prioriza a pesquisa participante crítica. Para chegarmos a esta opção, também consideramos nossa visão e experiência prévia do contexto prático (sala de aula de Cálculo) sob estudo. De acordo com Blumer (apud Haguette, 1990, p. 37) esta escolha:

[11] Designamos de estudo ***histórico-epistemológico*** por estarmos olhando para os modos pelos quais os objetos e conceitos do Cálculo são historicamente tratados em relação a um modelo epistemológico (MTCS).

Representa um pré-requisito inevitável, já que é esta visão que orientará a formulação de problemas, a escolha dos tipos de dados e a identificação das premissas que caracterizam o mundo em estudo.

A observação participante e as entrevistas não foram escolhidas, portanto, como simples meio de procedimento de coleta de dados, mas como uma maneira de estabelecer um "ir e vir" entre os fundamentos teóricos (inclusive o MTCS) e a própria prática de sala de aula, podendo repensar um em função do outro, comparando o que representa estarmos olhando desse ou de outro ponto de vista. Devido a importância que representa para esta pesquisa, essa parte de nossa investigação tem a dedicação de um capítulo, o sexto.

Capítulo 2

ABORDAGENS SOBRE TEORIAS DO CONHECIMENTO

2.1 INTRODUÇÃO

Na educação matemática em nível de 3° grau, um ponto que merece análise é o tratamento do Cálculo como objeto formal da Matemática, usualmente considerado pronto e pertinente para ser abordado e apropriado pelos alunos, sem considerar como primordial, no processo de constituição do pensamento diferencial e integral, a possibilidade da existência de *modos distintos de produzir significado*, dentro dos quais poderá ser constituído *conhecimento* a partir do Cálculo. Entretanto, como para nós esse processo é primordial, propomos uma investigação na qual enfatizamos esta produção de *significados* e de *conhecimentos*.

Ao procedermos a essa investigação, concepções como: de identificações, de relações, de crenças, de certezas, de justificações, de produção de objetos, de imagens, de sistemas simbólicos, de princípios e propriedades, de enunciações, de obstáculos e de limites epistemológicos, de verdade, de erro, entre outras, passaram a integrar constantemente nossas fontes de pesquisa. Isso nos levou à Epistemologia, a tê-la como uma ferramenta, a nos questionar quanto às suas linhas e quanto à escolha de uma delas.

Assim, devido à contribuição que possa ter no entendimento e relacionamento das concepções acima citadas, bem como de nossas opções, ao dirigirmos a atenção à Epistemologia, resolvemos incluir um panorama sobre este enfoque.[1]

Além disso, ao considerar nossos dois aspectos centrais: ***conhecimento*** e ***significado***, devemos nos posicionar também destacadamente com relação a eles de modo que possibilite uma escolha de posições teóricas a respeito o mais adequadamente possível, inclusive ao nosso campo experiencial pedagógico.

Uma das finalidades de assim procedermos é trilhar um pouco do caminho das reflexões e das posições epistemológicas assumidas a respeito de conhecimento. Outra finalidade é a de promover uma discussão apropriada para entender o porquê da razão da nossa defesa de certos argumentos e noções em detrimento de outros a partir deste ponto básico que é a constituição de conhecimento em nossa fundamentação teórica e metodológica.

2.2 EPISTEMOLOGIA: UM PANORAMA DE SEUS ENFOQUES

Encontramos várias referências bibliográficas sobre Epistemologia, e a seguir sintetizamos algumas que parecem descrever mais propriamente alguns de seus veios semânticos.

2.2.1 Em dicionários: léxicos, filosóficos e sociais

Pându (1985, p. 321 e 404), *Dicionário Global da Língua Portuguesa*, diz que gnosiologia, também chamada teoria do conhecimento ou epistemologia, é a parte da filosofia que estuda os limites da faculdade humana de conhecimento e os critérios de validade deste (do grego: *gnosis + logos , episteme + logos*).

[1] Esta inclusão foi reforçada dentre as sugestões feitas pelo professor Dr. Vicente M. Garnica.

Mora (1996, p.216-218), em sua obra, *Dicionário de Filosofia*, considera os termos *gnosiologia*, *epistemologia* e *teoria do conhecimento* como sinônimos. Diz que, durante algum tempo, usou-se mais gnosiologia, mas que, a partir da influência da literatura anglo-saxônica, passou-se a preferir o uso do termo epistemologia.

À página 120, ele diz que epistemologia ou teoria do conhecimento é uma "disciplina filosófica" que trata sobre: descrição ou fenomenologia do conhecimento; possibilidade do conhecimento; fundamentos do conhecimento; formas possíveis do conhecimento.

Japiassu & Marcondes (1991, p. 82-83), na obra *Dicionário Básico de Filosofia*, iniciam dizendo que *epistemologia* (do grego: *episteme* - ciência, *logos* - teoria) é uma disciplina que tem a ciência como objeto de investigação e tem por objetivo estudar os problemas relacionados com o sujeito cognoscente e o objeto conhecido.

Em suas palavras (p. 83):

> *Segundo os países e os usos, o conceito de "epistemologia" serve para designar, seja uma teoria geral do conhecimento (de natureza filosófica), seja estudos mais restritos concernentes à gênese e à estruturação das ciências.*

Citam tratados de epistemologia com títulos bem variados, procurando mostrar sua diversificação em termos de lógica, filosofia do conhecimento, sociologia, psicologia e história. Afirmam que o interesse central da Epistemologia é o estudo do processo de formação e estruturação do problema do crescimento dos conhecimentos científicos.

Outhwaite et al. (1996, p. 125-129), autores do *Dicionário do Pensamento Social do século XX*, tratam Epistemologia como teoria filosófica do conhecimento (do grego: *episteme*), que tem como algumas de suas questões: o conhecimento é possível? Em caso positivo, seus objetos são reais ou ideais? Sua fonte é a experiência ou a razão? O conhecimento é unitário?

Falam sobre a sociologia do conhecimento: que investiga as interligações entre as categorias de pensamento, as reivindicações do conhecimento e a realidade social do pensamento, como uma nova possibilidade que a Filosofia precisa incluir à Epistemologia.

Abbagnano (1996, p. 227-228), em sua obra, *Dicionário de Filosofia*, diz que a teoria do conhecimento é denominada por Epistemologia e menos freqüentemente por gnosiologia. Em alemão, o termo *gnoseologie*, cunhado por Baumgarten, teve pouca aceitação em relação ao termo *erkenntnistheorie*, usado pelo kantiano Reinhold, a partir de 1789. Em inglês, praticamente só se usa o termo *epistemology*, introduzido por J.F. Ferrier em 1854. Em francês, também se usa comumente o termo *gnoséology* e raramente *epistémologie*. Em todas as línguas, não significam uma disciplina filosófica geral, mas nascem de pressupostos específicos a uma linha filosófica. Por exemplo, cita esse autor que, de acordo com a forte corrente idealista, tratada por Berkeley e Fichte, a Epistemologia tem como tema específico o estudo da realidade das coisas, do "mundo externo",[2] ou seja , o estudo baseado em investigar se a idéia (uma entidade mental que existe "dentro" da consciência) corresponde a uma realidade "externa" ou, caso não seja, se há diferença entre idéias irreais e idéias reais.

[2] O fato de as expressões **mundo externo e realidade externa** serem escritas entre aspas (pelo autor), acreditamos que é para chamar a atenção do leitor para o fato de a filosofia idealista não incluir, neste mundo assim mencionado (representativo das "coisas") e nesta realidade, o lado psíquico humano (o sujeito fisiológico e psicológico, o eu, a consciência). Já que o idealismo adota como ponto de partida o "sujeito" e a "representação do mundo".

Refutando esta corrente idealista, cita a demonstração de Kant da falta de fundamento do pressuposto de que o conhecimento é "interior" à consciência ou ao sujeito, e que a consciência ou o sujeito deve, portanto, sair fora de si para conhecer o objeto. A esse respeito, explica Bochensk (1975, p. 27) que Kant considera a realidade das coisas _ o mundo _ como "*o resultado de uma síntese operada pelo sujeito transcendental* [3] *a partir da massa informe das sensações*". Sua teoria sobre conhecimento passa a ser circunscrita ao domínio de uma <u>intuição sensível</u>.

Contribui, assim, para o surgimento de um outro veio de investigações epistemológicas sobre os procedimentos e a linguagem do conhecimento científico, que se caracteriza nas análises contemporâneas. Essas análises, contrárias a que o conhecimento seja uma forma ou categoria universal, voltam-se aos problemas de validez, aos procedimentos de investigação dos saberes científicos (incluindo os lingüísticos) – então denominados "conjunto de conhecimentos científicos".

2.2.2 Em outras obras científicas

Relacionada a essa questão do conhecimento científico, encontramos a obra de Bachelard (1971), intitulada *A Epistemologia*.[4] Ela é construída tendo por base os desenvolvimentos contemporâneos da história das ciências física e química, reportadas às teorias filosóficas do crescimento do conhecimento científico.

---

[3] O termo ***transcedental***, usado plenamente por Kant (daí sua filosofia ser denominada de transcendental), indica uma possibilidade ou uso a priori do conhecimento, ou seja, uso de algo que está além da experiência, na própria condição de possibilidade da experiência, como determinados conceitos e intuições usados na experiência. Assim, o ***sujeito transcendental*** é o criador das relações que formam o que se entende por mundo, situado dicotomicamente como mundo empírico _ dos fenômenos _ e, mundo da coisa em si _ do *número* _, aquilo que não é objeto de nossa intuição sensível (cf. Japiassu, 1991, p. 237, e também Bochenski, 1975, p. 27).

[4] Esta obra de Bachelard é mais dedicada ao tema ***epistemologia***, contudo sua outra obra: "*A formação do espírito científico*" (Bachelard, 1996) também se faz no campo epistemológico, considerando primordialmente os obstáculos ao conhecimento científico.

O autor inicia posicionando nosso conhecimento do real como uma noção unificada pela experiência, de dois modos: pela visão dos empiristas, na qual a experiência vem da sensação; e pela visão dos idealistas, na qual a experiência é uniforme, independente da razão.

Essa crença na experiência, diz ele, é abalada pelas ciências físicas e químicas contemporâneas, que trazem novidades de um mundo desconhecido (dos átomos, da física infinitesimal) no qual era preciso dar maior importância à organização racional das experiências (às suas hipóteses científicas). Invertem-se os papéis, rompe-se com o conhecimento vulgar (comum). A captação imediata do real passa a ser provisória, não confiável, dependente do sentido dado pelas reflexões que vão direcionar os procedimentos. Os dados passam a ser resultados. A epistemologia baseada no "princípio da identidade" se torna então uma Epistemologia "discursiva" (op. cit., p. 18-19).

> *O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno. As revelações do real são recorrentes. [...] Diante do real, aquilo que cremos saber com clareza ofusca o que devemos saber* (Bachelard, 1996, p. 17-18)

Esse mesmo autor prossegue:

> *É assim que, em todas as ciências rigorosas, um pensamento inquieto desconfia das identidades mais ou menos aparentes e exige sem cessar mais precisão e, por conseguinte, mais ocasiões de distinguir. Precisar, retificar, diversificar são tipos de pensamento dinâmico que fogem da certeza da unidade, e que encontram nos sistemas homogêneos mais obstáculos do que estímulos* (op. cit., p.21).

Podemos notar, não só em suas afirmações, mas também nas questões que coloca para reflexão, a preocupação do autor em centralizar a Epistemologia como um estudo do progresso do pensamento científico.[5]

> *Terá o conceito de limite do conhecimento científico um sentido absoluto? Será mesmo possível traçar as fronteiras do pensamento científico? Estaremos nós*

[5] Em seus escritos, Bachelard (1971) considera o pensamento científico como o pensamento dos cientistas ou sábios, como podemos verificar à página 28.

verdadeiramente encerrados num domínio objetivamente fechado? Seremos escravos de uma razão imutável? [...] Eis muitas perguntas, múltiplas e conexas, que põem em jogo toda uma filosofia e que devem dar um interesse primordial ao estudo dos progressos do pensamento científico (Bachelard, 1971, p. 23).

Na secção I, desta sua obra sobre Epistemologia, onde fala sobre região epistemológica, relaciona diretamente as regiões do saber científico como sendo aquelas construídas na *reflexão*, no conhecimento que se *valorizou*. Esse conhecimento não é mais o "conhecimento primeiro", de primeira apreciação, sujeito aos ocasionalismos subjetivos, mas um conhecimento elaborado (científico), já alçado a um "*domínio racional de idéias*" (op.cit., p. 35), por um encadeamento de razões que exigem discussões, métodos, estudo das relações dos fenômenos, abstrações reflexivas.

Observa-se, nessa obra de Bachelard, a noção de conhecimento como algo em evolução, em que um novo conhecimento é obtido em contraposição a um conhecimento anterior. Sendo o conhecimento vulgar (ou comum) desprezado como um obstáculo ao conhecimento científico. Em suas palavras:

É necessário limar por todos os lados as limitações iniciais, reformar o conhecimento não científico, que entrava sempre o conhecimento científico." (op cit., p. 26). "*[...] O racionalismo só tem de considerar o universo como tema de progresso humano, em termos de progresso de conhecimento* (op. cit., p. 34). *[...] O espírito científico só pode constituir-se destruindo o espírito não científico* (op. cit., p. 127).

Com essa convicção, percorre o que chama de *Epistemologia da Física* e *Epistemologia da Química*, onde coloca questões da Filosofia das Ciências junto a descobertas e a pensamentos científicos (como a respeito da relatividade, da eletricidade, dos corpúsculos atômicos, das substâncias elementares da Química, da noção de valência e de matéria), sempre aliado à consideração da experiência em relação à reflexão sobre os valores do conhecimento (principalmente em respeito às correntes racionalistas e empiristas).

Sobre a ciência física moderna, diz que há uma necessidade crescente de que as experiências sejam cada vez mais aperfeiçoadas para serem decisórias, porque são elas que obrigam o fenômeno a mostrar sua estrutura. "*A experiência já não é um ponto de partida, já não é sequer um simples guia, ela é um fim*" (op .cit., p. 73).

Na secção II, sobre as categorias principais da Epistemologia, destaca mais o racionalismo, falando nas características próprias que nomeia de "racionalismo integral" (ou integrante), "racionalismo dialético", "racionalismo mínimo" e "racionalismo aplicado". Além disso, fala sobre materialismo técnico, em termos de seu papel primordial nos conhecimentos científicos.

> ... *conforme os instrumentos se vão afinando, o seu produto científico fica cada vez mais bem definido. O conhecimento torna-se objetivo na proporção em que se torna instrumental* (op. cit., p. 147).

O único conhecimento que coloca à parte, como especial e fora do mundo objetivo, é o matemático. Mas essa afirmativa encontramos especificamente em outra obra:

> ... *o crescimento do espírito matemático é bem diferente do crescimento do espírito científico em seu esforço para compreender os fenômenos físicos. [...] Logo, nenhuma das teses que sustentamos neste livro se refere ao conhecimento matemático. Tratam apenas do conhecimento do mundo objetivo* (Bachelard, 1996, p.28).

Aqui interrompemos para fazer um comentário. Temos (segundo opinião nossa) em Bachelard uma "ciência" equivalente a conhecimento válido (um gênero científico, superior do saber, em fusão com instrumentalismo e tecnologia), na qual deixa transparecer um mundo científico imparcialmente envolvido com um mundo natural independente, concentrado no conteúdo específico da Física, Química e Matemática, não comprometido com qualquer interação social, ou com formulações contingentes a determinados grupos ou a determinadas demandas sociais.

Ao se pronunciar sobre as condições psicológicas dos progressos das ciências, Bachelard define <u>obstáculos epistemológicos</u> como sendo *causas de* *estagnação* (de inércia) e mesmo *de regressão* que aparecem no ato de conhecer e que "*podem ser estudadas no desenvolvimento histórico do pensamento científico*" (Bachelard, 1971, p. 165 ; 1996, p. 17). Essa definição que foi usada como fundamento básico a vários outros trabalhos (como os de G. Brousseau, G. Glaeser, A. Sierpinska e B. Cornu), expõe como sendo obstáculos epistemológicos à evolução do *espírito científico*: a experiência inicial (conhecimentos imediatos), os argumentos realistas, o obstáculo animista e a libido.

Na secção III (de *A Epistemologia*) fala sobre a descontinuidade do progresso científico, que às vezes é confundida na falsa aparência contínua da história da ciência. Finaliza alegando que a história das ciências não pode ser empírica, tem que refletir sobre si mesma e, portanto, ser uma forma de "*história do progresso das ligações racionais do saber*" (op. cit. , p. 213).

Em resumo, Bachelard concebe Epistemologia como um estudo de teorias filosóficas do desenvolvimento crescente do conhecimento científico;[6] dentro de seu modo de produzir significados: partindo de uma evolução do *espírito científico*.

Chisholm (1989, p. vii), em *Theory of Knowledge*, diz que os interesses contemporâneos sobre a natureza do conhecimento pertencem não só à parte da Filosofia chamada de "teoria do conhecimento" ou "Epistemologia", mas também ao campo de teoria da informação, inteligência artificial e ciência cognitiva.

Assim, para ele, o problema do conhecimento extrapola a Epistemologia e também a Filosofia. Todavia, admite a Epistemologia como uma parte da Filosofia:

> *A teoria do conhecimento, quando considerada como uma parte da Filosofia, centra-se em questões como: "O que podemos conhecer? Como podemos distinguir as*

[6] Com essa preocupação também trabalham epistemologicamente alguns dos filósofos que tratam do método das ciências e compartilham com Bachelard a idéia de que "*proposições, regras e teorias não devem ser admitidas senão enquanto a utilidade científica das mesmas o justificar*", como F. Gonseth , R. Hainard e H. König (cf. Bochenski, p.122 e 265).

coisas que eu estou justificado em acreditar das coisas que não estou justificado em acreditar? E como posso decidir se estou mais justificado em acreditar em uma coisa ou em outra?" (op.cit., p. 1).

Piaget (apud Battro, 1978, p. 85), no *Dicionário terminológico de Jean Piaget*, define: "*... chamaremos 'domínio epistemológico' o das relações entre os conhecimentos e as diferentes formas possíveis de realidades ...*";

No seu entender, a Epistemologia é teoria do conhecimento, válida (com normas de validade) e de natureza interdisciplinar. Posto que, em seus estudos e trabalhos coletivos neste domínio, defende teorias e métodos investigativos que envolvem, além da Filosofia e da Lógica, diversas ciências humanas (como a Biologia, Psicologia e Lingüística) (cf. Piaget, 1973, p. 14).

Ademais, todo cientista, ele diz, tem seus problemas e questionamentos relativos a sua própria área, assim como as metodologias e, portanto, há uma fusão dos seus estudos epistemológicos com a(s) ciência(s) que mais vivencia.

Sobre a história da Epistemologia, diz que pode ser separada em três períodos: Epistemologia Metacientífica _ dos pensadores ocidentais do racionalismo, que incluem estudos de problemas epistemológicos ligados às próprias invenções e indagações de cientistas contemporâneos e também de filósofos em outros campos como a metafísica, ética e estética _; Epistemologia Paracientífica _ de filósofos do século XIX e início do século XX, que aceitam a existência das ciências mas consideram seus resultados sempre limitados, elaborando caracteres supracientíficos (consciência como "intuição", "visão do espírito", "percepção imanente" e outros) para falar em conhecimento _; Epistemologia Científica _ recentemente elaborada por epistemólogos que se limitam aos problemas relativos ao conhecimento científico, uma vez que muitos são cientistas em outras áreas de estudo _ (cf. Vuyk, 1984, p. 44).

Com este último grupo, Piaget concorda que os métodos de verificação são fundamentais para que o trabalho de investigação epistemológica seja considerado científico. Porém, qualquer que seja o método utilizado, o trabalho deve ser sujeito a críticas e verificações de outros investigadores. Além disso, ele postula o estudo centrado no conhecimento como um processo, e não como um estado.[7] Baseado nisso, pleiteia uma Epistemologia Genética.

> *O caráter próprio da epistemologia genética é, assim, procurar distinguir as raízes das diversas variedades de conhecimentos a partir de suas formas mais elementares, e acompanhar seu desenvolvimento nos níveis ulteriores até, inclusive, o pensamento científico* (Piaget,1990, p. 2).

Na introdução de seu livro *Epistemologia Genética*, diz que essa epistemologia é naturalista, mas não positivista ou mesmo idealista, uma vez que se dedica ao estudo do crescimento dos conhecimentos, dando importância à atividade do sujeito em interação com o objeto (que existe como um limite, sem ser completamente alcançado). Ou, como diz em outro momento:

> *O princípio epistemológico é ... o de procurar determinar o papel do sujeito e do objeto considerando-os, não por si, mas no próprio processo do aumento de conhecimentos* (Piaget, apud Battro, 1978, p. 85).

A epistemologia genética, dentro de uma teoria construtivista, lidando com estruturas e processos, relaciona-se de perto com a lógica. Uma estrutura nessa teoria é, de um modo geral, uma forma de organização de elementos (que podem ser até cognitivos, como o pensamento) e que está em constante mutação enquanto não atingiu um estado mais estável de equilíbrio. Ou seja, uma estrutura é uma totalidade (que Piaget por vezes chama de sistema) contendo elementos e relações entre os mesmos, que se transformam e auto-regulam (cf. Vuyk, 1984, p. 79).

> *Cada estrutura deve ser concebida como uma forma particular de equilíbrio, mais ou menos estável em seu campo restrito e que se torna instável nos limites deste.*

---

[7] ***Por conhecimento como um estado***, Piaget entende o modo estático com que a epistemologia clássica concebe o conhecimento: como conhecimento já adquirido, um fato (cf. Vuyk, 1984, p. 45).

... as estruturas lógicas constituem não formas a priori, nem produtos da experiência dos objetos, nem das convenções sociais, mas formas de equilíbrio para os quais tendem as coordenações intelectuais do sujeito (Piaget, apud Battro, 1978, p. 98).

Piaget, ao ligar a Epistemologia Genética à Matemática e à Lógica, diz que as estruturas lógico-matemáticas são instrumentos na compreensão entre a formação psicológica e a formalização lógica do pensamento. A lógica determina normas de verdade e validação no uso da razão, por isso reserva o termo lógica para referir-se à análise formal do conhecimento. Porém, ele alerta para a existência de muitas lógicas diferentes e de seus limites, sendo insuficientes como base do conhecimento humano (cf. Piaget, 1990, p. 69-77).

De acordo com Vuyk (1984, p. 60), podemos resumir a descrição da Epistemologia Genética em:

A epistemologia genética é uma ciência interdisciplinar que estuda as condições necessárias e suficientes que fazem possível o conhecimento _ incluindo o conhecimento animal e o humano (este desde o conhecimento do recém nascido até o científico) _, assim como o desenvolvimento histórico do conhecimento desde um estado de validez inferior a outros de validez superior.

2.2.3 Nossas considerações a respeito de Epistemologia

Epistemologia é por nós entendida como sendo o conjunto das teorias de conhecimento.

Das várias concepções de Epistemologia, inclusive das que expusemos, temos alguns pontos a considerar.

Primeiro, por fazer investigações a partir de temas (como: domínio real ou realidade, sujeito, objeto, princípios que tornam possível o saber, pensamento, conhecimento e outros) que constam da Filosofia desde seus primórdios e, pelo caráter da Filosofia enquanto ciência reflexiva e crítica, é perfeitamente compreensível que a Epistemologia seja quase sempre considerada uma parte da Filosofia, como podemos observar dentre os autores citados.

Este caráter reflexivo presente na Epistemologia faz com que os métodos de pesquisa dos epistemólogos, assim como dos filósofos, tenham muitas questões que não são decididas por evidência científica ou experimentação, quantitativamente, e nem mesmo por provas, ao contrário de outras ciências, como a Matemática e a Física.

Por exemplo, a base dos questionamentos pode estar em tomar este ou aquele pressuposto e, a partir deles, produzir significados para palavras ou expressões como "pensamento", "estar consciente", "verdade" ou "conhecimento", e então, produzir uma análise das proposições e das respostas aos questionamentos que a elas se relacionam.

Acreditamos que, nessas análises e nos modos de as fundamentar, é que se desenvolvem as principais diferenças e posições epistemológicas que produzem o cerne desta ou daquela Epistemologia.

Para Bachelard, por exemplo, notamos que a preocupação centrou-se em desenvolver uma Epistemologia da Filosofia e História da Ciência, usando análises de fatos e dos discursos (inclusive em termos de poder, que sofrem e exercem) sempre aliados às experiências dentro da Física e da Química.

Nos escritos de Piaget, no entanto, podemos notar que a preocupação está em desenvolver garantias e métodos de controle (o que faz junto a outras ciências, principalmente a Psicologia e a Lógica[8]), como ele mesmo diz, que amenizem os conflitos de aceitação entre respostas puramente filosóficas e respostas científicas, tendo como pressuposto o ser biológico:

[8] Segundo Piaget (1980, p. 18), a ***Lógica*** é entendida como "*estudo das condições formais de **verdade***", como uma investigação normativa de validade dedutiva e não de fato ou de experiência. A Epistemologia tem interesse nas condições do conhecimento válido, condições constitutivas e de acesso. Ao falar sobre ***verdade*** (Piaget, 1981, p. 64-66) diz que há um abandono da idéia clássica de verdade absoluta. No acordo entre verdade

(...) ... o problema epistemológico tem, portanto, que ser formulado em termos biológicos, o que é indispensável na perspectiva de uma epistemologia genética, pois a psicogênese permanecerá incompreensível enquanto não se remontar até suas raízes orgânicas (Piaget, 1990, p. 54).

O autor continua:

A epistemologia tende pois a integrar-se no próprio sistema das ciências. Mas ela só poderá então tornar-se científica se precisar os seus próprios métodos e delimitar os seus problemas de maneira a poder tratá-los segundo os processos dedutivos ou experimentais que condicionam a objetividade em geral (Piaget, 1980, p.62).

Nesse sentido, seus estudos sobre a gênese das estruturas e dos conceitos científicos, bem como o uso do método clínico no estudo dos processos fundamentais de construção de conhecimento pela criança, se adequam a seus propósitos e a seu pressuposto. Ao falar sobre a análise histórico epistemológica de construção das estruturas cognitivas, ele diz:

... se a epistemologia genética retomou a questão, foi com a dupla intenção de construir um método capaz de fornecer controles e, sobretudo, de remontar às origens, portanto, à própria gênese dos conhecimentos, dos quais a epistemologia tradicional só conhece os estados superiores, ou seja, certas resultantes [grifos nossos] (Piaget, 1990, p. 2).

Chisholm, por sua vez, tendo como pressuposto o conhecimento não-científico, analisa as afirmações, crenças e justificações, de um modo geral, nos discursos possíveis do cotidiano, sem procurar aliar-se a nenhuma outra disciplina de modo específico; enquanto outros, como o sociólogo Bottomore, têm como pressuposto o conhecimento como parte integrante cultural, dentro de um meio social. Então, ao falarem da Epistemologia, pleiteiam que a Filosofia deva incluir à Epistemologia uma Sociologia do Conhecimento.

O segundo ponto relevante, que consideramos nas concepções de Epistemologia, é o modo de relacionar o sujeito (epistêmico) e um objeto (de

realidade, diz ele, a evolução científica moderna nos orienta à verdade absoluta através de verdades sucessivas.

conhecimento). Seja qual for a relação entre os dois _ do objeto impondo suas propriedades ao sujeito, ou, do sujeito agindo sobre o objeto _ ela subtende existências próprias, posição da qual divergimos. Conforme veremos com mais detalhes nos fundamentos teóricos desta pesquisa (capítulo 3), consideramos os objetos e as relações que o sujeito possa constituir, constantemente produzidos e, portanto, não existentes a priori.

Piaget, por exemplo, também diverge parcialmente dessa relação em que o sujeito age sobre o objeto, ou o objeto se impõe ao sujeito, pois, na sua Epistemologia Genética (no seu modelo), embora o ser humano (biológico) no seu desenvolvimento tenha um processo de formação das estruturas intelectuais (da inteligência) estas independem das estruturas dos objetos, através de suas construções esquemáticas aproximativas, uma vez que os objetos "*representam um limite jamais atingido*" (Piaget, 1990,p. 108), ou seja, "*o objeto total é constituído de objetos parciais recortados pela atividade do sujeito*" (Piaget, apud Battro, 1978, p. 173). Ao combinar o construtivismo com uma forma de realismo, na qual o sujeito interage com o objeto, Piaget utiliza um movimento interacionista dialético[9] (por exemplo, os da assimilação e da acomodação), no qual o sujeito influencia o objeto ao mesmo tempo em que é por este influenciado.[10]

> *A teoria do conhecimento é, sem dúvida, essencialmente, uma teoria da adaptação do pensamento à realidade, mesmo se esta adaptação revela, no final das contas, a existência de uma inextrincável interação entre sujeitos e objetos* (Piaget, 1973, p. 30).

[9] O *interacionismo* é usado na denominação de teorias que utilizam relações de interação ou causalidade recíproca entre elementos que a constituem; por exemplo, a relação corpo e mente, sujeito e objeto, organismo e meio ambiente, ou mesmo, indivíduo e sociedade. Este assunto e outros tipos de interacionismo, podem ser encontrados em Outhwaite, Bottomore et al. (1996, p. 393-394).

O termo *interacionista dialético* é, em Piaget, devido ao movimento dialético estabelecido entre sujeito e objeto; uma circulação dialética de influências entre as estruturas do objeto (que só é conhecido pelas operações sucessivas que lhe são aplicáveis pelo sujeito, como as de "assimilação" e "acomodação") e do sujeito (cujas estruturas se enriquecem à medida que integram as estruturas dos objetos), que juntos engendram novas organizações, permitindo que haja uma "assimilação" recíproca e não uma "redução" em sentido único de uma estrutura para a outra (cf. Piaget, 1990, p. 108-112).

[10] Cf. VUYK (1984, p. 76).

Ainda segundo esse mesmo autor (op. cit., p. 8)

> *...partindo da zona de contato entre o próprio corpo e as coisas, eles progredirão então, cada vez mais, nas duas direções complementares do exterior e do interior, e é dessa dupla construção progressiva que depende a elaboração solidária do sujeito e dos objetos.*

Em referência a esta relação entre sujeito e objeto, Bachelard nos fala que, no século XIX, acreditava-se que a ciência era real pelos seus objetos e hipotética pelas relações entre eles, mas que houve uma inversão, os objetos passaram a ser representados por metáforas, a sua organização por realidade. Acontece então uma "*primazia da reflexão sobre a percepção*", negando-se ao pensamento discursivo (e científico) o conhecimento das *coisas em si* , que é apenas atribuído aos pensamentos intuitivos _ aqueles das primeiras observações _, que são superados pela razão crítica. Para se chegar à objetividade científica, diz ele, é necessário romper com o objeto imediato, reformular o conhecimento não científico (inicial) _ "*o objeto não pode ser designado como um objetivo imediato*" -, é preciso colocar-se em estado permanente de mobilização, no qual se substitui os saberes estáticos por um conhecimento aberto e dinâmico (cf. Bachelard, 1971, p. 15-35 e p. 128).

Podemos notar, nas afirmações de Bachelard, além da existência dos objetos que, como ele diz: são "*representados por metáforas*", a busca de uma realidade última (realidade metafísica) através da "*evolução dos conhecimentos científicos*". Só essa realidade ele considera objeto do saber.

O terceiro ponto é a questão de se posicionar entre aquisição e produção de conhecimento,[11] pois, se o sujeito e o objeto são considerados elementos existentes na constituição de uma certa teoria ou modelo, como observamos no segundo ponto destacado, o conhecimento se estabelece à medida que se relacionam sujeito e objeto e, então, conhecimento pode ser visto como algo que se transmite por comunicação, ou seja, o conhecimento é adquirido, o sujeito adquire as

[11] Referências a este assunto, junto a outros enfoques, são estabelecidas por Baldino (1995), ao abordar o tema de integração de disciplinas do ponto de vista epistemológico.

propriedades do objeto ou as relações de interação entre eles.

Uma conseqüência imediata é que isso leva a diferenças cruciais em termos das relações de sala de aula: de se poder atribuir aos defeitos da comunicação os fracassos da aprendizagem. Ou ainda, de pleitear exposições cada vez mais bem elaboradas dos assuntos a serem ensinados (facilitadoras da aquisição dos conhecimentos) como garantia *sine qua non* de ascensão da aprendizagem.

De outro modo está a Epistemologia quando é relacionada a uma produção de conhecimento, na qual o sujeito, ao falar, constitui-se e produz seus significados, objetos e conhecimentos. Nesse caso, a aprendizagem está ligada não a uma transmissão de conhecimentos, mas à produção de significados pelo sujeito das enunciações.

Uma vez mencionados os pontos que consideramos relevantes a respeito de Epistemologia e tendo em vista os dois aspectos centrais _ *conhecimento e significado* _ ao examinarmos o ensino e a aprendizagem a partir do Cálculo, seguiremos nossos propósitos de ter um panorama de alguns enfoques literários a respeito.

2.3 CONHECIMENTO: UM DISCURSO VARIADO

Vamos proceder analogamente ao que fizemos com Epistemologia: analisar de modo sucinto e localizado algumas concepções e pontos marcantes, antes de dizer o que para nós é *conhecimento* dentro do modelo teórico escolhido (Capitulo 3). Sabemos que, ao fazer isso, encontraremos grande interseção com as falas sobre Epistemologia, mas procuraremos evitar repetições e abranger também a respeito de significado.

2.3.1 Em dicionários: léxicos, filosóficos e sociais

Consultando o dicionário (como também em textos não especializados e nas falas), podemos observar que conhecimento é considerado um produto do ato de conhecer ou, às vezes, de saber. Por exemplo, nas três citações a seguir.

Em Ferreira (1994, p. 170) temos: "CONHECIMENTO - **1.** *Ato ou efeito de conhecer.* **2.** *Idéia, noção.* **3.** *Informação, notícia, ciência.* **4.** *Prática da vida, experiência...*"

Em Pându (1985, p. 217), temos: "CONHECIMENTO - *Ato ou efeito de conhecer; idéia; noção; informação; ...*".

Mora (1996, p. 117), diz que, em português, existem os termos conhecer e saber que ora são usados indistintamente: "*S sabe alemão*" ou "*S conhece alemão*" e, ora de modo distinto: "*S conhece Roma*" e não "*S sabe Roma*". Logo após, afirma a importância da distinção entre conhecer algo e saber se há algo, ou se este algo possui determinadas propriedades. Conclui que "conhecer por presença direta" (imediato, por contato) se expressa no esquema "*S conhece M* " (*M* representa algo) e "conhecer por descrição" (indireto, mediato) se expressa no esquema "*S sabe que p*". Este último caso de conhecer (saber) diz que é necessária uma justificação, ou seja, *S* está justificado para afirmar *p*, embora possa a descrição ou justificativa não se referir à *p* (algo que diz conhecer), mas sem a autorização dele, *S*, em dizer que conhece (sabe) *p*.

Ele diz que quase todas as posições epistemológicas adotadas a respeito do conhecimento, tomando como ponto de partida o sujeito ou o objeto, têm em comum conhecimento como algo resolvido (sem necessidade de se discutir o que é). Principalmente dentre as correntes filosóficas que antecederam a era contemporânea. Mais recentemente, diz, a teoria de conhecimento começou a admitir não ter "*conhecimento como suposto, e a se perguntar o modo como se fundamenta*" (op.cit., p. 125).

Japiassu (1991, p. 55) não se afasta muito da noção de conhecimento como produto do ato de conhecer. Sugere conhecimento visto como: (i) uma função ou ato da vida psíquica que torna um objeto presente aos sentidos ou à inteligência; (ii) referindo-se tanto à coisa conhecida como ao processo de conhecer (subjetivo).[12]

Por sua vez, Abbagnano (1996, p. 217-228) inicia dizendo que conhecimento é uma *técnica de comprovação*[13] (uso dos sentidos, instrumentos de cálculo e outros), um procedimento que torna possível a descrição, o cálculo ou a previsão de um objeto, no qual por objeto se entende qualquer entidade, fato, coisa, realidade ou propriedade.

Com essa designação impessoal de conhecimento, ele diferencia crença de conhecimento. Para ele, a crença é o empenho para a verdade de uma noção e não precisa ser comprovável, enquanto conhecimento é um procedimento de comprovação.

Segue dizendo que toda operação com respeito a conhecimento envolve um objeto e pretensas relações pessoais com ele. Dos exames dessas operações nascem as interpretações sobre conhecimento, dentro da História e da Filosofia. Cita as seguintes interpretações: 1. do procedimento de identidade ou semelhança nasce a relação de identidade ou semelhança dos objetos de conhecimento com os elementos do objeto real, quando o conhecimento é então considerado como uma imagem do objeto; 2. da operação de apresentação do objeto nasce a relação de identificação pela *representação*.[14]

---

[12] Essa noção de **subjetividade** é entendida como sendo o que diz respeito ao pessoal, do sujeito, sua "interioridade", seus processos mentais, suas percepções sensitivas, seu consciente e inconsciente, suas experiências pessoais, seu conhecimento. A esfera subjetiva, às vezes, é chamada de psiquismo humano.

[13] Para esse autor, dizer "*eu conheço p*" é, portanto, uma questão de estar apto a um procedimento de descrição de *p*, de cálculo ou de previsão de *p*. Ele diz também que as intepretações do que seja conhecimento são interpretações de relações entre tais procedimentos e o objeto, das quais surgem características efetivas do objeto (cf. Abbagnano, 1996, p. 217). Estranhamente, para nós, ele parece confundir conhecimento com uma capacidade cognitiva de ação que permite produzir e exteriorizar um conhecimento.

[14] Este problema da *representação* passa por vários modos, tais como: a *representação* do objeto ou de sua natureza no sujeito; a *representação* do ser na inteligência sob conceito universal; a *representação* do objeto ao ser intencional, imanente do sujeito; a *representação* das coisas (de um modo geral) pela linguagem. Esses modos são relativos e cambiantes nas várias correntes filosóficas. Referências a esse respeito podem ser encontradas em Vaz (1997, p. 156-175)).

Assentadas nessa divisão, e também em premissas filosóficas, Abbagnano faz uma incursão historiográfica sobre algumas concepções de conhecimento.

Seguindo em parte essa idéia e acrescentando afirmações de outros autores a respeito, buscamos situar algumas das interpretações sobre conhecimento, quer sejam filosóficas, históricas, sociais ou mesmo epistemológicas.

2.3.2 Em outras obras científicas

Na Filosofia ocidental, o exame teve início com os pré-socráticos. Eles expressavam o conhecimento como uma identificação. Empédocles diz: "*o semelhante conhece o semelhante*", "*conhecemos a terra por terra e a água por água*". Do mesmo modo, Heráclito afirma: "*O que se move conhece o que se move*".

Ainda na Grécia antiga, Platão (c.428-348 a.C.), que foi discípulo de Sócrates e, Aristóteles (384-322 a.C.) que foi discípulo de Platão, elaboraram teorias a respeito "do que podemos saber". Partiam da interpretação de que "*conhecer significa tornar semelhante o pensante do pensado*" , de tal modo que "*o que existe absolutamente, é absolutamente cognoscível, no entanto o que não existe de modo algum, é totalmente incognoscível*" (Abbagnano, 1996, p. 217).

Para Sócrates e Platão, o verdadeiro conhecimento é inato, preexistente, constituído por *formas* e não por informações. Ou seja, reside na mente, está "lá" ao nascer. Assim, acredita que nós não "aprendemos", mas só "lembramos". Dessa forma, não precisamos confiar nos sentidos para obter conhecimento do mundo. As *eides* (do grego: eidos - ειδος) são os que nos permitem conhecer o mundo, são espécies essenciais (no sentido de essência necessária) únicas e dadas à intuição em uma multiplicidade de objetos, são exemplares da natureza e as outras coisas se parecem com elas, são imagens delas. Porém, nem todos os objetos têm *eides* (como os que carecem de valor, são desprezíveis) e outros são de existência duvidosa (como o homem, o fogo e a água). As classes dos objetos que se diz poder afirmar com certeza a existência são: (a) dos objetos matemáticos (como igualdade, uno e muitos); (b) dos valores (como o belo, o justo e o bem) (cf Parmenides, 132 d, apud Abbagnano, 1996, p. 633). [15]

Platão afirma que o mundo é dividido em "realidade" e "aparência" (o problema que denominavam "o UM e os MUITOS"). Dividindo as informações que se tem do mundo em conhecimento e opinião, sendo a opinião resultante da apresentação dos objetos aos sentidos, podendo ter variações. Porém, conhecer é "*estabelecer em cada caso com o objeto uma relação de identidade, o mais próximo possível da identidade*" (Abbagnano, 1996, p. 218).

Platão também elege graus de conhecimento, sendo: (1) a suposição ou conjectura; (2) a opinião acreditada, mas não verificada; (3) a razão científica que procede por via de hipóteses (como conhecimento científico propedêutico, *dianoético*); (4) a inteligência filosófica que age dialeticamente (como conhecimento científico filosófico, intelectual).

Ele usa o termo "*Formas*" para as idéias[16] de Beleza, Verdade e Justiça, as quais têm como objetos ou modelos existência independente do mundo mental ou do mundo natural. O verdadeiro conhecimento significa um abandono do mundo dos sentidos (*mundus sensibilis*) e uma busca, pela razão (no *mundus intelligibilis*), das *Formas* universais até a apreensão do Bem _ a mais elevada de todas as formas do conhecimento _.

> *Fica sabendo que o que transmite a verdade aos objetos cognoscíveis e dá ao sujeito que conhece esse poder, é a Idéia do Bem. Entende que é ela a causa do saber e da verdade...* (Platão 1993, p. 311).

[15] Segundo nota do autor (Abbagnano, 1996, p.XIV), as citações referentes a Platão são da edição de Burnet, Oxford, 1899-1906.

[16] Encontramos o termo grego *eidos*, relacionado à "idea", à "forma" (como em Platão), à "espécie" (citado em *Parmenides*). São Tomás em sua *Summa Theologiae*, aos cuidados de P. Caramello, Turim, 1950, diz: "*El término griego **idea** se dice en latín **forma** y por ideas se entende las formas de algunas cosas, existentes fuera de las cosas mismas*" [grifos nossos] (Abbagnano, 1996, p. 635).

Falando sobre a classe do inteligível, Platão diz: "*no mais elevado, a inteligência, no segundo, o entendimento; ao terceiro entrega a fé, e ao último a suposição ...*". E posiciona-se dizendo que chama de entendimento e não de inteligência o modo de pensar dos geômetras e de outros cientistas, em que entendimento é algo intermediário entre a opinião ("doxa" _ que se funda nas aparências _) e a inteligência. A inteligência é dada (por exemplo) aos filósofos cujos corações estão voltados para o Ser verdadeiro de cada coisa (op. cit., p. 316 e 265).

Aristóteles criticou a teoria das Formas de Platão, pois, enquanto para o segundo a realidade do mundo está nas "*Formas*" apreendidas pelo intelecto; para Aristóteles, a realidade está na matéria de que é feito o mundo. No lugar do "idealismo platônico" sobre o que podemos saber do mundo, coloca-se na defesa da matéria e da forma pertencentes a este mundo, e não a um mundo além deste (o das Formas). Para ele, a percepção e a experiência dos sentidos são a base do conhecimento científico e, embora continue a sustentar a necessidade da relação de identidade com o objeto, estes mesmos objetos, por serem compostos de matéria, são sujeitos a mudanças.

As idéias de Platão e Aristóteles integram-se à cultura ocidental antiga, enfatizadas pela idéia de razão e por princípios religiosos. Os padres, em meio aos estudos teológicos, empenhavam-se por responder a questões filosóficas sobre a existência, a razão e a ciência.

Um dos notáveis, Agostinho de Hipona (534-430), é maniqueísta (combina elementos do cristianismo aos do zoroastrismo) e acredita que apenas a razão não é suficiente, uma vez que tem limites. Introduz então a razão aliada à fé. Ou seja, apoiando-se na fé (*credo*), afirma que a realidade última e a verdade última não podem ser alcançadas através dos sentidos, só com ajuda de Deus, através da *alma* (imortal). Sobre conhecimento, diz que conhecimento confiável é impossível pela razão.

Nessa questão da razão relacionada a conhecer, concentrado no natural e material em vez de no sobrenatural, destaca-se o princípio de Descartes (1596-1650), no qual a existência da idéia no pensamento não diz nada a respeito da existência do objeto representado. Descartes acredita que as pessoas nascem com idéias inatas, que podem ser descobertas pela razão.

Em seus princípios racionalistas, defende que podemos alcançar o conhecimento pela razão sem precisar confiar nos sentidos, que podem nos enganar. *Trabalha na dicotomia entre mente (res cogitans - "coisa pensante") e corpo (res extensa* - "coisa extensa"), considerando a existência da mente independente da matéria. Para ele, a razão _ *faculdade de distinguir o verdadeiro do falso* _, embora fazendo *parte do espírito, é distinta do mesmo. O espírito é mais amplo, e compreende* outras faculdades como a memória e a imaginação.

Argumenta sobre a "dúvida", dizendo que talvez nunca pensemos sem nos enganarmos. Depois de pôr em dúvida as informações dos sentidos, da ciência e da Matemática, enuncia seu primeiro princípio filosófico:"*Há uma verdade, e uma única, que satisfaz estas exigências, é que penso, e que , na medida em que penso, existo*" (op.cit., p. 16).

Realmente, para ele as idéias inatas nos fornecem conhecimento de nós mesmos, conhecimento de Deus e conhecimento da Matemática. Em 1637, na obra o *Discurso do Método*, tendo por finalidade mostrar o método de se obter a verdade nas ciências, diz:

> *A única dificuldade, para tornar o espírito senhor dos verdadeiros princípios e o capacitar para deles deduzir, à vontade, todas as ciências, é fornecer-lhe um método. Chama-se método à ordem que o pensamento deve seguir para chegar à sabedoria e em conformidade com a qual ele pensa, uma vez que aí chegou* (Descartes, 1993, p.14).

De todo o ensino que teve, nos colégios e nas universidades, importa-lhe realmente a Lógica, a Análise geométrica e a Álgebra. Donde diz ter extraído as quatro principais regras do seu *método*:

> (1ª) *Nunca admitir alguma coisa como verdadeira, sem a conhecer evidentemente como tal; isto é evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção e*

não aceitar nos seus juízos nada que não houvesse ocasião alguma de a pôr em dúvida.

(2ª) Dividir cada um dos problemas que examinasse em tantas partes quantas as necessárias para melhor os resolver.

(3ª) Conduzir por ordem os seus pensamentos, partindo dos objetos mais simples, para subir pouco a pouco, gradualmente, até o conhecimento dos mais compostos. Supor também ordem entre os que não se sucedem naturalmente uns aos outros.

(4ª) fazer por toda parte enumerações tão completas e revisões tão gerais que tivesse a certeza de nada omitir (op. cit., p. 30).

Este seu método analítico consiste em decompor, em fragmentar o pensamento, a intuição (as concepções puras e distintas da mente) em componentes e ordená-las logicamente. Uma vez que, para ele, o único caminho para o conhecimento certo da verdade é o da intuição e da dedução.

Usando esse método, tentou dar uma descrição precisa dos fenômenos naturais em um sistema mecânico, inclusive em como as funções biológicas do corpo podiam ser reduzidas a funções mecânicas.

Essa concepção mecanicista da natureza tornou-se um paradigma da ciência por um período subseqüente.

As descobertas cientificas (com o uso de instrumentos como o telescópio) ajudaram a evidenciar, para os filósofos empíricos dos séculos XVII e XVIII, que temos limites e deficiências e que, portanto, as informações (conceitos e teorias) que temos por meio dos sentidos são geralmente de caráter duvidoso.

Nesta época, J. Locke (1632-1704), por exemplo, começa por rejeitar as idéias inatas da doutrina cartesiana, de que os seres humanos nascem com conhecimento. Considera que todo conhecimento é obtido a partir de uma experiência, e que a mente é como uma folha em branco (uma *tábula rasa*) que vai sendo preenchida aos poucos. Para ele, uma idéia é uma imagem mental, uma noção, nunca as coisas mesmas. Divide o conhecimento em três tipos: o sensível (o menos confiável, pelo qual se conhece o mundo exterior), o demonstrativo (certo como o é uma prova matemática), e o intuitivo (o conhecimento seguro, absoluto, por meio do qual se conhece o "eu").

Por outro lado, D. Hume (1711-1776) defende uma filosofia empirista, voltada para aplicação de um método científico a um mundo mental. Ele afirma que não podemos saber nem sobre nós nem sobre o mundo. Que nosso conhecimento é muito limitado e que a razão é uma idéia importante, mas que, por derivar de impressões da mente, é sujeita à capacidade de transpor, aumentar ou diminuir os materiais postos para nós pelos sentidos e pela experiência.

Mas, assim como os demais filósofos, continua a construir o conhecer como uma operação que tem por base identificar ou identificar-se a um objeto, que traz consigo suas caracteríticas *a priori*[17] _ inatas e independentes de experiências _.

Kant (1724-1804) olha o mundo como o resultado de uma síntese feita pelo sujeito a partir dos princípios imanentes (possíveis dentro dos limites das experiências possíveis) produzidos das sensações. O idealismo transcendental[18] *kantiano afirma que a existência dos objetos externos não é conhecível pela* percepção imediata.

Temos então uma subjetividade transcendental, na qual o sujeito (com suas relações transcendentais de formas possíveis a partir da experiência) dá uma forma a um objeto ou substância (a "coisa em si").

[17] A expressão *a priori* é aplicada nas teorias de conhecimento para significar algo que não depende de experiência, muitas vezes sendo admitida como sinônimo de proposição *analítica* (que não procede de experiência nem é um dado de experiência) em oposição à proposição *sintética* (aquela que deriva de experiência). Mas, para Kant, por exemplo, nem sempre o *a priori* é analítico, pois existem juízos sintéticos *a priori* nas proposições universais e necessárias das ciências (cf. Mora, 1996, p. 3).

[18] Kant denominou de ***transcendental*** o conhecimento que antecede a experiência (a priori), mas não a todo conhecimento a priori, mas aqueles pelos quais sabemos certas intuições ou conceitos que são aplicados à experiência e, portanto, antecedem a experiência. Assim, para ele, podem ser transcendentais, por exemplo, a Estética e a Lógica, mas não a "coisa em si", as intuições puras ou as idéias (cf. Abbagnano, 1996, p.1155).

O conhecimento, referido a um objeto, é possível como uma operação de conexão, denominada operação de síntese por Kant. Essa síntese compõe-se de uma conexão (ligação das idéias entre si) das representações do objeto e concomitantemente uma conexão ao próprio objeto pela intuição. Ou seja, um conhecimento compreende, além de um conceito do objeto, uma intuição pela qual o objeto é dado ("a coisa em si").

A noção de conhecimento sofre pouca variação, até a Filosofia moderna. Com Fichte (1762-1814), ainda temos a afirmação de que o conhecer é uma operação de identificação e pode apresentar-se sob três formas: (*a*) a criação do sujeito a respeito do objeto; (*b*) a consciência; (*c*) a linguagem.

Abbagnano (1996, p. 219-220) diz que, nessa época, o conceito (*a*) de conhecer (supracitado) é tido como um processo de unificação do mundo objetivo com o mundo subjetivo. Dá como outro exemplo a Filosofia de Hegel (1770-1831), na qual a realidade é concebida como uma dialética da razão absoluta, em que o objetivo e o subjetivo estão inseparáveis em um todo único, sem prioridade de um sobre o outro.

Hegel se ocupa em mostrar a sucessão das formas ou fenômenos da consciência até chegar ao saber absoluto, na chamada fenomenologia do espírito. Para ele, a "*Idéia é a consciência que se realiza, gradualmente, como unidade com o objeto*" (op. cit., p. 219), e a "Idéia Absoluta" é a plena verdade do ser, é a união do conceito e da realidade do conceito. E essa unidade se faz através do conhecer.

Já como expoente do conceito (*b*) _ conhecer como identificação sob a forma de consciência _ cita o espiritualismo moderno, que "*considera o conhecer como uma relação interna da consciência*". Na afirmação de Schopenhauer (1788-1860): "*Nada pode nunca sair de si para identificar-se imediatamente com coisas diferentes de si; tudo o que tem conhecimento seguro, portanto, imediato, se encontra dentro de sua consciência*" (op. cit., p. 220).

Por vezes, a consciência é interpretada como intuição . Intuição dita, por exemplo, por Bergson (1859-1941): "*visão direta do espírito por parte do espírito*". Para

Bergson, a inteligência é a capacidade de criar e usar instrumentos, embora não se oriente diretamente para as coisas e sim para as relações entre elas. A intuição, ao contrário da inteligência, não está coordenada à matéria. A intuição mostra que não apenas a vida e a consciência, mas a verdadeira realidade é um devir.

Com Husserl (1859-1938), segundo Abbagnano, a consciência passa a ser considerada *a percepção imanente,* a esfera absoluta e necessária. Conhecimento passa a outra interpretação: como uma operação de transcendência,[19] na qual o percebido e determinado pode ser expresso em proposições e, como enunciado, pode conservar-se.

Nessa passagem para conhecimento como uma operação de transcendência, o problema do conhecimento como uma questão de um objeto "externo", obtido através de dados "internos", se ameniza. Cede espaço a outros tipos de problemas, a outra disciplina _ a metodologia _, preocupada com a validez dos procedimentos e do *exame do objeto, nos diferentes campos nos quais se investiga.* E, "ter conhecimento", diz Abbagnano (1996, p. 227) , passa a significar uma possibilidade de prestar atenção aos modos de ser, às operações ralizadas, às mediações de uma interpretação e de expressá-las através da linguagem.

Em termos de conhecer como uma operação de identificação, sob a forma de linguagem (conceito (c), anteriormente mencionado), Abbagnano cita o positivismo lógico e, em particular, Wittgenstein (1889-1951): "*a proposição pode ser verdadeira ou falsa, desde que é uma imagem da realidade. [...] Deve existir algo idêntico na imagem e no objeto representado, para que possa ser sua imagem*" (op. cit., p. 221). Temos uma relação direta da linguagem como uma forma de identificação.

Certamente podemos observar, nessas correntes filosóficas citadas, exceto a última que já envolve a representação pela linguagem diretamente, uma tendência

[19] O termo ***transcendência*** deve ser aqui interpretado como movimento intencional que leva a operar para além (trans) dos limites nos quais habitualmente se opera, quais sejam, entre o sujeito passivo e o objeto, diretamente. O conhecimento passa então a ser entendido na atividade do sujeito, relacionado, por exemplo, à sua percepção, compreensão e criação. Assim, a operação de transcendência supera o excesso ontológico do sujeito e objeto da

geral de conceber conhecimento como atividade cognitiva (intelectual), isolada em relação a qualquer outro fator de atividade. Essa concepção é mudada por filósofos e psicólogos que consideram o campo do conhecimento interagindo com fatores psicológicos (como Heidegger, Piaget e Vygotsky), sociais (como Vygotsky e Foulcault) ou culturais (como Wittgenstein e Ayer).

Assim, nessa ampliação do campo de atuação a respeito do problema do conhecimento e da realidade, em meio às concepções filosóficas do século XIX, temos uma corrente dominante, a Fenomenologia.

Segundo Mora (1996, p. 294), hoje se distinguem pelo menos três espécies de fenomenologia: a *transcendental* (centrada em Husserl), a *existencial* (de Heidegger, Sartre e Merleau-Ponty, entre outros) e a *hermenêutica* (de Maier, Gadamer e Paul Ricouer, entre outros).

Entre elas, observamos, a seguir, as concepções que dizem respeito a conhecimento.

A Fenomenologia, de um modo geral, admite o que é "dado" como uma correspondência direta da consciência intencional, sendo, antes de uma filosofia do ser, uma filosofia da essência.

Segundo Husserl, as essências são dadas à intuição, a qual se torna assim um conjunto de apreensões de unidades ideais significativas (universalidades), compostas de expressões e significações. "*Estas* [universalidades] *não são conceitos lógicos nem idéias platônicas. As universalidades essenciais apreendidas fenomenologicamente são de muitas classes*" (Mora, 1996, p. 292).

Na captação dessa essência, os fenomenólogos reconhecem aspectos emocionais, ao colocarem o centro em atos intencionais. A intencionalidade, o voltar-se para o mundo, é a consciência fenomenológica.

operação de identificação.

Porém, a Fenomenologia visa ao dado (as coisas, o *fenômeno*) sem se preocupar se este dado é uma realidade ou uma aparência. Seu método não é dedutivo nem empírico (se opõe ao empirismo), não explica mediante leis e nem parte de princípios; seu processo é de um esclarecimento gradual _ de etapa em etapa, objetivando a uma redução essencial _ mediante uma intuição da essência.

> *A fenomenologia [...] ao descrever como o conhecimento do mundo se dá, substitui fatos por fenômenos, reavivando-os, tematizando-os e compreendendo-os à medida que são vividos e conscientemente percebidos* (Martins & Bicudo, 1989).

A respeito da redução eidética (que inclui a redução *transcendental* _ na qual a consciência volta-se para si mesma, na mais pura intencionalidade, passando pela "epoché" _ estado de suspensão do juízo, ou seja, estado no qual o fenômeno indagado é posto em suspensão), na última redução, como resíduo último, Husserl afirma: "*nada mais resta do objeto além do que é dado ao sujeito*" (Bochenski, 1975, p. 138).

O objeto do conhecimento não é só algo externo, mas um conjunto de características que emerge como constituinte definido no contexto das investigações. "*Conhecer é, pois, fenomenologicamente falando, apreender*". O sujeito apreende o objeto, isto é, o representa. Quando essa representação é parcial, diz-se que ele não tem um conhecimento verdadeiro (cf. Mora, 1996, p. 120).

> *De acordo com Husserl, retornar ao mundo pré-científico ou às coisas mesmas é ir ao encontro das origens do conhecimento, isto é, da gênese da apreensão fenomenal da experiência vivida pelo sujeito: "a pecepção"* (Aranha, apud. Bicudo & Espósito, 1997, p. 149).

Sucedendo às idéias de Husserl, encontramos M. Heidegger (1889-1976), considerado um fenomenólogo existencialista, que procura responder à questão de como a existência dos atos da consciência (em suspensão na *epoché*) se relaciona à existência dos objetos dos atos.

Ele parte de uma vivência existencial, numa prioridade da existência sobre a essência. Abrange as questões de conhecimento ao falar na abertura do *Dasein* (do alemão: *existência; da (aí)* e *sein (ser)*). O Dasein constitui-se pelo "ser-no-mundo", é precisamente seu "ser-aí". O *Dasein* é iluminado por si, em seu caráter aberto, onde essa abertura não é o conhecimento, mas um existencial referente ao ser, que fundamenta o conhecimento, baseado em três elementos: 1. o *sentimento da situação original* (o sentimento bruto, um estado de alma); 2. a *compreensão* (a captação do "*poder-ser*", uma estruturação do tipo projeto); 3. a *discursividade* _ *Rede* _ (o fundamento da lingagem, a articulação lingüística significativa do ser-no-mundo, incluindo o ouvir e o calar).

Heidgger, na elaboração de suas filosóficas questões acerca do *sentido do ser* (o ente que somos, o ser-aí, o Dasein), considera imprescindível a qualquer ato consciente (inclusive o conhecer) o *transcender*, o ultrapassar ao existente e, para tal, a liberdade é o fundamento.

> *E como todo sentido, portanto, todo fundamento, provém do Daisen, resulta que a liberdade é o fundamento último de toda inteligibilidade: a liberdade é o fundamento do fundamento, parece ser a última palavra da filosofia de Hidegger* (Bochenski, 1975, p. 165).

Por outro lado, na Fenomenologia Existencial de Jean-Paul Sartre (1905-1980), na sua forma de realismo extremado, temos o ser humano como dado (o "para-si", a realidade dada em pessoa), em que o homem é um ente que quer converter-se num em-si-para-si, ou seja, em Deus que, sendo um em-si-para-si, é uma contradição. Mas como tudo que *é*, é um em-si (o percebido, que nunca se termina de explorar, o impossível, *porque o possível não é*), "*o homem é uma paixão inútil*" (op.cit., p. 170).

Só existem fenômenos, e ainda que o ser do fenômeno coexista com ele, é uma existência fenomênica _ só existimos enquanto nos manifestamos _. Sartre diz que o conhecimento não é uma propriedade ou função do sujeito já existente. Pois "*... tudo o que está em relação com o conhecimento, portanto, com a verdade, é puramente humano. ...e o conhecimento um nada*" (op.cit., p. 171). Ele afirma ser a vida humana (de um modo geral, tudo o que a ela diz respeito) como um absurdo absoluto.

Identificando-se também ao movimento existencialista, temos o filósofo e psicólogo Jean J. M. Merleau-Ponty (1908-1961), que dedica parte substancial de seus estudos à linguagem, à expressão e à percepção do ser humano na sua inserção de "*estar-no-mundo*". Para ele o pensamento deve estar desperto para a apreciação da *percepção* do mundo. Essa *percepção* acontece do seguinte modo: "*o ser se dirige ao mundo, estrutura-o, capta-o primeiramente em um nível pré-reflexivo.*" (Martins & Rocha, apud. Bicudo & Espósito, 1997, p. 53). A reflexão, o conhecimento reflexivo, tem este pré-reflexivo como seu fundamento.

> *Desse modo, Merleau-Ponty vem afirmar que o conhecimento humano se dá com um pensar que não se dirige ao mundo como um objeto em si ou como uma impressão que se possa ter dele: "cogitar" é um ato de apropriação dos significados do mundo, de suas estruturas ou de arranjos espontâneos de suas partes.* (Aranha, apud. Bicudo & Espósito, 1997, p. 153).

A Fenomenologia Hermenêutica, também conhecida como "*a arte da interpretação*", torna-se, para Gadamer, um meio de compreensão das ciências do espírito (aquelas que mostram as diferentes formas e fenômenos da consciência, buscando o saber absoluto) e da história. Por isso, " *a hermenêutica é o exame de condições em que ocorre a compreensão*" (Mora, 1996, p. 333). Baseada nas relações, a compreensão se manifesta através das tradições, mediante a linguagem.

Paul Ricoeur segue desenvolvendo essa vertente lingüística da Fenomenologia, valorizando a análise dos símbolos e da própria linguagem na interpretação. Para ele, a compreensão acontece por meio de alguma interpretação.

Alguns fenomenólogos falam de espécies de saber, em vez de falarem diretamente em conhecimento. Por exemplo, M. Scheler (1874-1928) diz que a primeira espécie é o *saber indutivo* _ das ciências positivas, cujo objeto é a realidade _ a segunda é o *saber da estrutura essencial* _ com abstração da presença real das coisas e de todo posicionamento do sujeito pensante, cujo objeto é o *apriori* (as proposições e unidades ideais dadas)[20] _ ; a terceira é o *saber metafísico* _ união dos resultados das ciências positivas com a filosofia da essência _ (cf. Scheler, apud. Bochenski, 1975, p. 141).

Scheler é um dos pioneiros no tratamento dos processos e estruturas sociais que se inter-relacionam com a constituição de conhecimento. Segundo Outhwaine, et al. (1996, p. 746), foi ele quem usou pela primeira vez o termo *Wissenssoziologie* (sociologia do conhecimento) e a determinou a identificação de "fatores reais" condicionantes do pensamento e explicativos das mudanças social e cultural, que incluem o conhecimento.

O estruturalismo, como método de indagação, influenciou vários campos: da Lingüística (por exemplo, com: F. Saussure, R. Barthes, R. Jakobson, N.S. Trubetzkoy e Z. Harris), da Arqueologia e Antropologia (por exemplo, com M. Foucault, M. Godelier e C. Lévi-Strauss), da Filosofia (por exemplo, com L. Althusser e J. Lacan), da Matemática (por exemplo, com o *Grupo Bourbaki*: J. Delsart, J. Dieudonné e A. Weil), e da Psicologia (por exemplo, os da *Gestalt*: K. Koffka, W. Köhler, e J. Piaget), uma vez que existem sistemas estruturais[21] de classes diversas: sistemas de classe social, sistemas de relações familiares, sistemas de linguagem e outros que influenciaram também questões como o do conhecimento.

Desde a década de 30, temos os chamados estudos estruturalistas que, de um modo geral, consistem "*em levar a efeito transformações que possibilitam a passagem de uma estrutura a outra mediante mudança em seus elementos que não alteram o sistema estrutural.*" (Mora, 1996, p. 239). Por estrutura se entende um sistema ou conjunto de sistemas.

[20] O ***a priori*** afirmado por Scheler é ampliado em termos do que ele denomina *apriorismo emocional*, dizendo que o *a priori* de Kant confunde-se com o racional por desconsiderar um *a priori* da "lógica do coração", da parte emotiva do espírito (cf. Bochenski,1975, p. 142).

[21] Segundo Foucault, para se tornar viável o estabelecimento das identidades e diferenças entre as coisas, fazem-se comparações de semelhanças entre elas e um conjunto finito e limitado de traços escolhidos, estudando-se as constâncias e as variações. A esse procedimento designa ***sistema***. "*O sistema é relativo: pode funcionar com a precisão que se deseje*", escolhe-se o *caráter* _ sistema de variáveis _ em função da minúcia da classificação que se quer (cf. Foucault, 1995a, p. 154-156).

Na corrente do estruturalismo, proeminente nas décadas de 60 e 70, destacamos algumas concepções de Foucault e de Piaget, que dizem respeito aos seus respectivos enunciados, a partir da noção de conhecimento.

Foucault (1926-1984) estabelece limites para um conjunto de disciplinas que podemos nomear por história das idéias, das ciências, do pensamento, dos conhecimentos, dos conceitos ou da consciência, através de seu modo de analisar as formações e transformações efetuadas pelo próprio discurso existente na sociedade; negando qualquer tipo de ingenuidade (econômica, política, idealista ou cultural) concernente ao processo de produção dessas disciplinas. Em termos gerais, ele procura mostrar como a sociologia estrutural esclarece a articulação entre o contexto político e a produção dos discursos científicos. Uma sociologia estrutural implacável e secreta , na qual o homem é produto, "é agido". (Ferri, 1972, p. 83).

Esse agir se faz pelos códigos fundamentais de uma cultura (linguagem, técnica, valores, hierarquia das práticas) nas quais e pelas quais se dá uma espécie de fusão com a ordem[22] das teorias científicas.

Em seus escritos, Foucault denota <u>saber</u> e <u>conhecer</u> como noções similares: "*conhecer e falar consistem em analisar a simultaneidade da representação [...] é num mesmo movimento que o espírito fala e conhece* ..." e logo a baixo, na mesma página:

> *Saber é falar como se deve e como prescreve o procedimento certo do espírito; falar é saber como se pode e segundo o modelo que impõem aqueles com quem se partilha o nascimento* (Foucault, 1995a, p. 102).

Às vezes, porém, o saber aparece como um "todo" definido, específico (saber matemático, saber histórico, saber das ciências humanas, saber das pessoas, entre outros saberes) do qual o conhecimento ("algo" que se conhece de modo científico, sistemático, empírico, ou de outros modos) faz parte:

---

22 Por ***ordem***, Foucault designa uma rede secreta segundo a qual as coisas se relacionam umas às outras através de uma atenção, de uma linguagem.

Os conhecimentos atravessaram de ponta a ponta um 'espaço de saber' que havia sido disposto de uma só vez .. . (op. cit., p. 90).

... no saber clássico o conhecimento dos indivíduos empíricos só pode ser adquirido sobre o quadro contínuo, ordenado e universal de todas as diferenças possíveis. (op. cit., p. 159).

Todo conhecimento, seja ele científico ou ideológico, só pode existir a partir de condições políticas que são as condiçoes para que se formem tanto o sujeito quanto os domínios de saber (Foucault, 1995b, p.XXI).

...saberes ingênuos, hierarquicamente inferiores, saberes abaixo do nível requerido de conhecimento ou de cientificidade. (op. cit, p. 170).

Para Foucault, a pesquisa sobre conhecimento centra-se não no sujeito do conhecimento, mas nas relações de poder que o constituem, envolvendo tipos de conhecimento e de saber.

É preciso se livrar do sujeito constituinte, livrar-se do próprio sujeito, isto é, chegar a uma análise que possa dar conta da constituição do sujeito na trama histórica. É isto que eu chamaria de genealogia, isto é, uma forma de história que dê conta da constituição dos saberes, dos discursos, dos domínios de objeto, etc., sem ter que se referir a um sujeito (Foucault, 1995b, p. 7).

Piaget (1896-1980), como observamos anteriormente, ao falar de epistemologia genética, dispensa especial atenção, em suas pesquisas, ao que denomina "*primórdios do conhecimento*". Ao estudar a "*construção contínua dos conhecimentos*", inicia desde as fases psicogenéticas mais elementares, no campo da Psicologia Infantil e da Biologia.

Para ele, o sujeito (uma junção de sujeito psicológico e sujeito epistêmico)[23] interage continuamente com o objeto e com o mundo físico, não implicando, no

[23] Referências a essas denominações foram feitas, quando tecemos considerações sobre a Epistemologia.

entanto, que conheça o mundo tal como é.

> *...o conhecimento não procede, em suas origens, nem de um sujeito cognoscente de si mesmo nem de objetos já constituídos (do ponto de vista do sujeito) que se lhe imporiam: resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre sujeito e objeto, e que dependem, portanto, dos dois ao mesmo tempo [...], o problema inicial do conhecimento será, portanto, o de construir tais mediadores: partindo da zona de contato entre o próprio corpo e as coisas* (Piaget, 1990, p. 8).

No desenvolvimento de qualquer conhecimento, diz que existem dois aspectos: "saber fazer" e "saber por quê". Os procedimentos do sujeito (a maneira com que resolve seus problemas) leva ao "saber fazer" algo, e faz parte das atividades do sujeito psicológico, e esses procedimentos estão sempre relacionados com as estruturas[24] do sujeito epistêmico, dirigidas à compreensão, a "saber por que". Os elementos que constituem as estruturas cognitivas[25] são percepções, recordações, associações, conceitos, operações, objetos ou mesmo outras estruturas. As estruturas não são estáticas, elas se reconstroem ou se transformam; uma estrutura cognitiva de um nível anterior de desenvolvimento se transforma em uma subestrutura na estrutura de nível superior.

O desenvolvimento de conhecimento no ser humano, segundo Piaget, inicia sua construção progressiva das estruturas pela ação. Ou seja, o instrumento de troca inicial, entre sujeito e objeto, não é a percepção, mas a ação, de modo que *toda percepção confere significações da ação aos elementos percebidos*.

As relações entre as ações do sujeito e a realidade[26] sobre a qual atua, estão

---

[24] Referências a ***estruturas*** foram feitas anteriormente, ao falarmos da Epistemologia Genética.

[25] ***Estrutura cognitiva***, para Piaget, é "*o sistema das conexões que o indivíduo pode e deve utilizar e que não se reduz absolutamente ao conteúdo de seu pensamento consciente, pois é o que lhe impõe certas formas mais que outras, e isso segundo níveis sucessivos de desenvolvimento cuja fonte inconsciente remonta até às coordenações nervosas e orgânicas*" (Piaget, 1978, p. 227). Por isso, ele postula a "tomada de consciência", a passagem dos elementos de um plano inconsciente (inferior) para um plano superior consciente, permitindo ultrapassar contradições existentes.

[26] ***Realidade***, para Piaget, tem uma gênese biológica: é composta de um organismo (sujeito mental) e de um entorno (objeto). A ***realidade*** existe, e como tal não pode ser conhecida pelo sujeito, pois quanto mais este avança na direção de querer compreender os objetos, mais complexos estes se tornam (o que Piaget coloca como

dentro do estudo de contradições (dialéticas construtivistas) que Piaget adota. Uma vez que, para ele, a adaptação do sujeito à realidade está conjuntamente ligada à atuação de nossas percepções e noções (que vamos produzindo) dos aspectos da realidade, e estas, por sua vez, ao se relacionarem, são sujeitas a constantes contradições (afirmações e negações, por perturbações ou lacunas do tipo: fatos contrários às previsões, ausência de um objeto ou de um conhecimento numa situação em que são necessários, objetos inassimiláveis e outras).

Esta ausência de adaptação recíproca (equilíbrio) entre fatores positivos e negativos leva às contradições. Em meio a essas contradições e conseqüentes "equilíbrios-desequilíbrios-equilíbrios" das estruturas, desenvolvem-se os conhecimentos.

> *... uma das fontes do progresso no desenvolvimento dos conhecimentos deve ser procurada nos desequilíbrios como tais, que por si sós obrigam um sujeito a ultrapassar seu estado atual e procurar o que quer que seja em em direções novas. [...] são estes desequilíbrios que constituem o móvel da pesquisa, pois sem eles o conhecimento permaneceria estático* (Piaget, 1976, p. 18-19).

Piaget, desenvolve a noção de equilibração das estruturas cognitivas como parte importante em sua teoria de conhecimento. Equilibração é um processo central que conduz a certos estados de equilíbrio cognitivo, "*capazes de construir e manter uma ordem funcional e estrutural num sistema aberto* [em que há trocas com o meio]" [27] (op. cit., p. 12). É, portanto, uma ação conservadora que não preserva a estrutura total ou subestruturas em um estado final, mas em um novo ponto de partida.

Todo equilíbrio cognitivo está baseado em duas funções:[28] a assimilação e a

um afastamento do objeto em relação ao sujeito). Os objetos são limites jamais atingidos, sempre sujeitos a modificações. Como o sujeito é tanto um organismo quanto fonte de ações materiais, ele é em si mesmo um objeto da ***realidade***. Assim a ***realidade*** consiste no mundo material e nos sujeitos (cf. Vuyk, 1984, p. 74-75).

[27] O que está entre colchetes foi complemento nosso, relativo a outras afirmações de Piaget.

[28] ***Função*** denota a atividade proveniente do funcionamento de uma subestrutura sobre a estrutura total do organismo. Elas são invariantes durante toda a vida do organismo. Exemplos: função respiratória (ou a respiração), função cognoscitiva.

acomodação. Em geral, a assimilação consiste em incorporação de um elemento em um sistema já existente, que pode ser de modo fisiológico (pelo organismo) ou de modo cognitivo (pela integração de um objeto aos esquemas)[29] ou de ambos os modos. Já a acomodação é uma modificação do sistema mediante uma assimilação de elementos. Como diz Piaget, todo esquema assimilatório tem que se acomodar aos esquemas que assimila.

No intuito de analisar o processo de formação das estruturas intelectuais, habituado como biólogo às classificações, Piaget trabalha, principalmente, em termos de dados experimentais, com uma forma de organização da atividade mental em estágios desde o nascimento da criança até a idade adulta. São ao todo três estágios: o primeiro (do nascimento até cerca de 2 anos) _ *sensório-motor* _ que subdivide em dois sub-estágios de pensamento pré-operacional; o segundo (aproximadamente de 2 anos até a adolescência) _ *operações lógico-concretas* _ que também subdivide em dois subestágios (de 2 a 7 anos _ preparação para as *operações lógico-concretas* _ e de 7 anos até a adolescência _ das *operações lógico-concretas*); e o terceiro (da adolescência até a idade adulta) _ *lógica formal* . Piaget, diz que essas são etapas cujo alcance pode variar em relação às idades, mas não em termos de ordem e sucessão. Há, segundo ele, uma hierarquia de estruturas, na qual o papel do tempo é importante, embora não cronologicamente fixo.

De cada um dos estágios, procuraremos abreviar o que ele diz a respeito mais diretamente do conhecimento.

No período sensório-motor "*existe uma inteligência antes da linguagem, mas não existe pensamento antes da linguagem*" [30] (*Piaget, 1978, p. 216*). Pensar é, por exemplo,

[29] Segundo Piaget: "*Um* ***esquema*** *é um modo de reações susceptíveis de se reproduzir e susceptíveis, sobretudo, de ser generalizadas.[...] O* ***esquema*** *de uma ação é, por definição, o conjunto estruturado dos caráteres generalizáveis desta ação, isto é, dos que permitem repetir a mesma ação ou aplicá-la a novos conteúdos*" [grifos nossos] (Piaget, apud Battro, 1978, p. 92).

[30] Piaget faz a seguinte distinção entre ***inteligência*** e ***pensamento:*** a ***inteligência*** não é acessível de modo imediato como o pensamento, ela é a coordenação necessária para se atingir um fim ou solucionar um problema.

classificar, ordenar, correlacionar ou dissociar; que são operações que primeiro devem ser executadas em ações, para depois tomarem parte do pensamento. Ainda nesse período, a criança (perto de 2 anos) é capaz de representar uma coisa por meio de outra _ função simbólica _, por exemplo, através da linguagem ou de símbolos individuais (como os gestos). Há um começo de imagens mentais ou de imitações que são interiorizadas.

Em nível de operações lógico-concretas, a criança se torna capaz de operar com uma certa lógica (de classes, relações e números) e de operar com reversibilidade (invertendo as operações). Assim, também já são possíveis a classificação (inclusão de uma subclasse em sua classe) e a seriação (ordenação de elementos seguindo uma mesma relação).

Em nível de operações formais, segundo Piaget, a pessoa é capaz de raciocinar e deduzir com uma lógica, sobre proposições ou hipóteses e combinará diferentes agrupamentos através da reversibilidade ampliada (inversão, reciprocidade, correlatividade e identidade).

Piaget disse ter encontrado, em seus estudos e experiências, variações na velocidade e duração de cada estágio de desenvolvimento e diz ser devido a quatro fatores de desenvolvimento intelectual: hereditariedade (maturação interna), experiência física (ação sobre os objetos), transmissão social (fator educativo) e equilibração (fator fundamental, que deve intervir inclusive entre os outros fatores).

Em qualquer dos estágios, ele diz que existem dois modos de se adquirir conhecimentos em função da experiência: pela percepção (conhecimento imediato da realidade), ou pelas ligações sucessivas (função do tempo e das repetições objetivas) (op. cit., p. 259).

Embora fale de conhecimento de um modo geral: "*O ponto de partida do conhecimento está constituído pelas ações do sujeito sobre o real. [...] conhecer é produzir um*

O pensamento é uma interiorização da inteligência através de um simbolismo e não de uma ação direta (cf. Piaget, 1978, p. 216).

pensamento, de modo a reconstruir o modo de produção dos fenômenos" (Piaget, apud Battro, 1978, p. 60), ou mesmo: "*...o conhecimento constitui sempre um processo ...*" (Piaget, 1973, p. 27), as elaborações de Piaget sobre a noção de conhecimento centram-se (conforme ele mesmo determina)[31] em estudos relativos ao desenvolvimento do crescimento dos conhecimentos.

Fala em tipos de conhecimento: conhecimento cópia _ "*um modelo de conhecimento segundo o qual a operação constituirá a simples imagem de transformações exteriores dadas ou já realizadas...*"; conhecimento assimilação _ "*modelo de conhecimento segundo o qual a operação é um ato que se adquire em função da coordeanção própria das ações do sujeito, porque essa coordenação, como tal, implica já algum elemento de transformação no sentido lógico-matemático do termo*"; conhecimento físico: "*...não é devido nem apenas à experiência exterior nem apenas à experiência interna, mas a uma união necessária entre as estruturas lógico-matemáticas nascidas da coordenação das ações e os dados experimentais assimilados a elas*"; conhecimento inconsciente: "*os reflexos e a própria morfologia dos órgãos aos quais estão ligados constituem uma espécie de conhecimento antecipado do meio exterior, conhecimento inconsciente e material, é verdade, mas indispensável ao desenvolvimento ulterior do conhecimento efetivo*" (op.cit., p. 60-61). Aqui é válido, além de uma confirmação a respeito da concentração de Piaget no processo de evolução dos conhecimentos, um realce para o fato de ele considerar conhecimento também em termos de um processo mental inconsciente.

Conne (1992), baseada na teoria piagetiana, escreve a partir de uma vertente referente ao tema saber e conhecer e à transposição didática,[32] na qual enfatiza a importância de se compreender as relações entre o conhecimento e a didática, numa

---

[31] Conforme consta na introdução da obra *A Epistemologia Genética* (Piaget, 1980, p. VI) e em *Psicologia e Epistemologia* (Piaget, 1973, p. 7-10), Piaget defende que a Filosofia não atinge um "saber" com garantias e métodos de controle característicos de um conhecimento, e que até então conhecimento é visto sob um conjunto complexo de fatores que é determinado em razão de considerá-lo como um "fato", um "estado", enquanto, para ele, "*conhecimento é sempre vir a ser*" e, portanto, uma questão de conhecer este "vir a ser", o processo. Ainda em suas palavras: "*Em que condições se tem o direito de falar de conhecimento e como salvaguardá-lo contra os perigos interiores que não cessam de ameaçá-lo?* ".

[32] Conne (1992, p. 266) define ***transposição didática*** como "*um processo que faz com que os objetos do saber matemático científico sejam transformados em saberes a ensinar, depois em saberes do ensino*".

analogia entre as relações do sujeito e de uma situação, que diz induzir e canalizar conhecimentos.

Em suas palavras: "*Se os processos cognitivos se referem à adaptação do sujeito à situação e à reequilibração das estruturas cognitivas, o saber se refere à utilidade dos conhecimentos para a transformação das situações*" (Conne, 1992, p. 222).

Essa autora distingue o saber do conhecimento na definição:

> *Quando o sujeito reconhece o papel ativo de um conhecimento sobre a situação, por ele mesmo, a ligação indutora da situação sobre este conhecimento torna-se inversível, ele sabe. Um conhecimento assim identificado é um saber, é um conhecimento útil, utilisável, no sentido de que ele permite ao sujeito agir sobre a representação* (op. cit., p. 225).[33]

Para ela, as diferentes epecificações do saber se dão segundo os tipos de uso do conhecimento, como entre saber-pragmático[34] e saber-sábio (incluindo o científico ou acadêmico, ou mesmo, saberes instituídos e não científicos, como a astrologia), em que o uso do conhecimento é mais *ativo* em relação ao saber-pragmático e mais *discursivo* no saber-sábio.

Essa autora diz que, segundo as concepções correntes, o saber se opõe ao conhecimento pelo fato de que o primeiro é descontextualizado, despersonalizado, sócio-culturalmente instituído, mas ela considera que essas atribuições, embora inerentes ao saber, não são constitutivas da distinção entre saber e conhecer, já que "*um saber é um conhecimento útil. [...] o critério de 'útil' adotado não é uma finalidade do conhecimento. Esse será o empreendimento didático a operar esse ponto, de tornar conhecíveis os saberes, e depois sabidos, senão sábios, os indivíduos*" (op. cit., p. 250).

---

[33] Tradução nossa. No original: "*Lorsque le sujet reconnait le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ces sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation.*"

[34] O ***conhecimento-pragmático*** (realtivo ao pragmatismo) é visto como a soma das idéias de todas as atribuições feitas a um objeto que possam ter um efeito prático qualquer. Segundo Conne (1992, p. 253) o ***saber-pragmático*** é um saber em meio a uma situação e estruturado por ela, ou seja, é mais que um saber-fazer, é um saber-fazer dentro de uma situação.

Seguindo nesse viés, ela coloca em questão o saber e estuda o conhecimento como uma *transposição do saber*, já que o estudo do conhecimento passa pelo estudo de fenômenos cognitivos (um saber) e constitui uma transposição do saber sobre o campo da psicologia e da epistemologia. "*O saber é um conhecimento que controla uma situação e suas transformações, indutoras de conhecimento*" (op. cit., p. 240), em que o conhecimento é preso entre duas ordens de objetividade: a do meio material _ dependente da situação _, e a dos saberes _ de seu uso _, transformando eles mesmos e/ou a situação.

Na conclusão desse seu artigo, Conne diz que sua pretensão não foi a de ter uma teoria geral sobre este espaço delimitado pelo conhecimento e o saber, mas sim de explorá-lo, defendendo a idéia de que transposição didática e saber estão sempre juntos em um par.

Diretamente ligados a teorias epistemológicas, estão os trabalhos de Alfred J. Ayer, Roderick M. Chisholm e Caio Prado Jr., aos quais devemos muitas reflexões no que se refere à constituição de conhecimento.

AYER (1986, p. 7) faz uma interessante discussão inicial sobre o uso da palavra conhecimento e a análise de seu significado. Ele diz que, se olharmos pelo dicionário léxico, por exemplo, "ter conhecimento" é "conhecer que algo é o caso",[35] pois temos conhecimento como: "ato ou efeito de conhecer, de estar certo e informado de". Mesmo nesse caso, nos colocamos diante do aspecto da crença e da verdade desse "algo". Diferenciando crença de uma afirmação, lembra a possibilidade de se acreditar em alguma coisa sem conhecê-la. E segue questionando: "*Quando se conhece que 'alguma coisa é assim', não pode ser errado? É necessário distinguir entre os tipos de conhecimento que podem ser conhecidos diretamente e aqueles que só podem ser conhecidos indiretamente?*" Pois, segundo ele, existe um sentido em que "conhecer que alguma coisa é o caso", é conhecer o que ela é diretamente

[35] No original, Ayer (1986, p. 8): "... *to have knowledge is to know that something or other is the case*".

(e aqui exemplifica com conhecer a cor de um objeto, ou mesmo sentenças da Lógica e da Matemática), "conhecer que alguma coisa é assim" e, dessa forma, é inquestionável no fato de ser verdadeiro, são o que ele denomina de *afirmações necessárias* _ "*necessary statements*" _. Mas, em outro sentido, estão as *afirmações empíricas* _ "*empirical statements*" _, as quais ele diz que podem ser sujeitas a dúvidas, sujeitas à inspeção de diferentes graus de evidência.

Faz uma série de questionamentos e discussões a respeito de "conhecer um fato ou um objeto" e "conhecer que" em duas seções intituladas: "*Traços e características do conhecimento*" e "*Conhecer consiste em estar num estado mental especial?*"

Destacamos seus questionamentos sobre "conhecer algum objeto":

> *Talvez seja um engano filosófico falar de objetos. Talvez seja possível mostrar que toda vez que parecemos estar diante de um caso de conhecermos um objeto, seja na verdade o caso de saber que algo é o caso. O que é conhecido, nesse sentido, deve ser verdadeiro, enquanto que aquilo em que se crê pode muito bem ser falso* (op. cit, p.9).

Do mesmo modo, diz ele, se tomado como uma questão de estar num estado de consciência no sentido de *prontidão cognitiva*, conhecer leva a se assumir uma análise em termos de ato e objeto como uma descrição adequada de conhecimento, o que, por sua vez, gera problemas do tipo: o que é a consciência em si mesma? Como se relaciona aos seus objetos (fatos, coisas)? Nada a separa de seus objetos, embora estejam separados? E cita como exemplo questões do idealismo subjetivo de Berkeley e de filósofos existencialistas, estes últimos quando tentam responder negando a lei da identidade ou mesmo falando "*do 'nada' como se fosse um tipo especial de agente, cuja função fosse separar a consciência de si própria*" (op. cit., p. 23).

Ayer também nos afirma que o fato de dizer simplesmente "eu conheço" provoca um engajamento de si próprio a ter que responder pela verdade, porque o que não é verdade não pode ser conhecido. Os sujeitos estão convencidos desta verdade sobre determinadas coisas, baseados em alguma experiência que os levam a assegurá-la.

Assim, Ayer, no decorrer de suas discussões, acrescenta um estado epistêmico ao sujeito que diz conhecer "algo", que ele precisa estar seguro, certo a respeito. E, o que é "conhecido" passa a ser "algo do qual se está certo de ser verdadeiro". Questiona a diferença entre conhecimento e crença verdadeira, dizendo que é a mesma diferença, por exemplo, que existe entre uma pessoa que diz que "conhece o que ocorrerá" como resultado de uma apuração lotérica, e outra pessoa que diz que adivinhou o resultado da apuração. Para a primeira pessoa, dizer que "conhece" *concede-lhe o direito de estar certa, enquanto para a segunda pessoa,* dizer que somente adivinhou lhe nega o direito de estar certa.

Finaliza então sua fala sobre o título de "conhecer como ter o direito de estar certo", [36] dizendo que existem três condições necessárias e suficientes para "conhecer que alguma coisa é o caso". *A primeira que o que se diz conhecer seja verdade, a segunda que se esteja seguro dela e a terceira que se tenha o direito de estar* seguro. Esse direito pode ser obtido de vários modos, como por percepção, por testemunho ou por base em leis científicas.

Chisholm inicia seu livro _ *Theory of Knowledge* _ tendo como um dos objetivos fazer uma análise epistemológica das características de uma afirmação ou crença tida como verdadeira, no intuito de "aperfeiçoar" o conjunto de crenças que possa ser tratado na Teoria do Conhecimento e assim estabelece que irá trocar crenças não justificadas por justificadas, e as menos justificadas por outras mais justificadas. Ou seja, a partir da formulação tradicional de conhecimento _ *crença verdadeira justificada* _ elabora um minucioso estudo centrado nas justificações.

Ele pressupõe um conceito para justificação epistêmica baseado em que ela é *objetiva, interna e imediata*. Diz que ela é *interna* e *imediata*, porque pode ser

[36] No original, Ayer (1986, p. 31) : "*Knowing as having the right to be sure*".

encontrada diretamente por reflexão; *objetiva*, porque ela mesma constitui um objeto de justificação e conhecimento.

Para continuar sua análise, Chisholm expõe treze categorias epistêmicas ou estágios, segundo os quais pretende obter uma classificação epistêmica para as proposições. Elas são ordenadas do seguinte modo: (6) certa; (5) óbvia; (4) evidente; (3) mais do que dúvida razoável; (2) epistemicamente clara; (1) provável; (0) balanceada; (-1) provavelmente falsa; (-2) claramente duvidosa; (-3) razoavelmente duvidosa; (-4) evidentemente falsa; (-5)obviamente falsa; (-6) certamente falsa. Ele as define e inclusive menciona as possíveis inclusões de uma categoria em relação à outra, sendo que, quanto mais positivo é o número correspondente a sua classificação, em maior grau a proposição está justificada.

Chisholm segue falando sobre as "propriedades auto-apresentadas" (como: sonhar, imaginar, desejar, temer, e outras) como uma fonte de certezas, pois, conforme coloca no início do capítulo intitulado "A *estrutura do conhecimento empírico*", ele almeja formular critérios para a aplicação dos conceitos epistêmicos, como "estar certo", "ser evidente" e "ser provável", sobre os quais tem discutido, inclusive elaborando definições e princípios epistêmicos.

Ao fazer uma análise criteriosa da interpretação do conceito de justificação epistêmica nas duas correntes de abordagem tradicional da teoria de conhecimento _ "externalista" e "internalista" _, Chisholm conclui que há inadequabilidade de situar-se totalmente em qualquer uma delas, porém demonstra uma maior identificação com a "internalista" quando diz:

> *As explicações "externalistas" de justificação epistêmica que nós temos considerado são tais que ou elas são vazias ou elas fazem uso de conceitos internos. [...] não existe indicação de que conceitos de justificação externalista possam* ***substituir*** *conceitos internos* [grifo nosso] (Chisholm, 1989, p. 84).[37]

[37] No original: "*The "externalistic" explications of epistemic justification that we have considered are all such that either they are empty or they make use of internal concepts.(...)there is no indication that externalistic justification concepts may* ***replace*** *internal concepts.*"

A partir da definição clássica (tradicional) de conhecimento como sendo crença verdadeira justificada, ou seja:

*O sujeito conhece uma proposição **p** se:*

*(1) ele acredita em **p**;*

*(2) **p** é uma proposição verdadeira;*

*(3) ele chegou à **p** por um método aceitável."*

ele faz uma modificação trocando "justificada" por "evidente"; formulando então a seguinte definição de conhecimento _ *crença verdadeira evidente* _:

*S conhece que **p** é verdadeira, por definição se:*

*(i) **p** é verdadeira;*

*(ii) **S** aceita **p**;*

*(iii) **p** é evidente para **S*** (op. cit., p. 90).

Onde uma proposição pode ser caracterizada como "evidente" se satisfaz:

*"**p** é evidente para **S**, por definição ⟷ Para toda proposição **q**, acreditar em **p** é pelo menos tão justificado para **S** como é negar **q**"* (op. cit., p. 11).

[Toma: ***p*** e ***q*** como proposições e ***S*** uma pessoa].

Mas, a seguir, mostra um problema denominado "*O Problema de Gettier*",[38] em que as condições para ***S*** conhecer ***p***, pela definição clássica de conhecimento, assim como pela sua, são satisfeitas e, no entanto, isto não implica dizer que ***S*** conhece ***p***, embora, do ponto de vista técnico, ***S*** esteja garantida em conhecer ***p***. Ou seja, o *problema de Gettier* é um contra exemplo à definição clássica de conhecimento e à sua própria definição.

[38] Segundo Chisholm (1989, p. 91), esse problema foi publicado em 1993, por Edmund L. Gettier, sob o título de "*Is justified true belief knowledge?*", no periódico **Analysis**, v. 23, p. 121-123.

A reflexão sobre por que *S* não conhece, segundo Chisholm, apesar de satisfazer às definições, aliada à parte técnica, conduz a exames não só das próprias definições como também do que pensamos a respeito desse problema, do conhecer de *S*. É sobre isso que aproveitaremos para falar agora e deixaremos as críticas à definição clássica de conhecimento para a seção seguinte.

Neste problema, temos *p* como a seguinte afirmação (proposição): "*Ou Jones possui um Ford, ou Brown está em Barcelona*", que é uma proposição verdadeira para *S* e também para quem se inteira do problema, só que ela é verdadeira para *S* pela primeira parte _ "*Jones possui um Ford, ...*" _ que o levou a aceitá-la, enquanto para os demais ela é verdadeira pela segunda parte (exceto para *S*, que segundo as condições do problema, desconhece este fato) _ "*(...) ou Jones está em Barcelona*" _. Esse jogo lógico permite ver que as definições de conhecimento referidas não são adequadas ao tomarem conhecimento como tendo o status de uma proposição _ *conhecimento como aquilo que se conhece ser o* caso _, com a justificativa (que autoriza aceitar a proposição) podendo ser alguma coisa à parte, não constitutiva do conhecimento, não estando "junta"_ de modo que se a mudarmos estaremos constituindo um outro conhecimento _. Para nós, o que ocorre com *S* é que ele não tem como produzir o *conhecimento* como os outros; o *conhecimento* por nós produzido tem nele (no próprio conhecimento) uma justificativa que não é a mesma para *S*. Daí poder-se afirmar que ele não conhece *p* como verdade, ele não produziu (para nós outros) algo que garantisse a sua certeza de conhecer.

Após constatar a inadequação das definições de conhecimento, Chisholm tenta acrescentar mais uma hipótese sobre a proposição ser "definitivamente evidente", porém não chega a formular mais nenhum conceito ou definição de conhecimento nesta sua publicação.

Prado Jr., como ele mesmo diz na introdução de seu livro: *Notas introdutórias* *à lógica dialética*, tem como objetivo fazer uma análise da atividade do pensamento[39] no que diz respeito à sua função elaboradora do conhecimento. Para isso, utiliza a dialética como um método lógico.

Segundo esse autor:

> *Os processos pensantes se centralizam na identificação, e esta se realiza pela assimilação do objeto do pensamento e da identificação, a representações mentais - imagens ou conceitos[40] - preexistentes e pré-constituídos no psiquismo do indivíduo pensante. [...] Trata-se da questão essencial da teoria do conhecimento, a saber, o processo de elaboração desse conhecimento, uma vez que o conhecimento de cada indivíduo nada mais é que o conjunto de representações mentais presentes no psiquismo desse indivíduo* [grifo nosso] (Prado, 1961, p. 139).

Ao falar de conhecimento como um conjunto de imagens ou conceitos, diz que o conhecimento científico não se constitui de um conjunto de conceitos em que os conceitos particulares se aglomeram simplesmente, mas que reciprocamente se incluem e integram. No conhecimento vulgar (não científico), considera que isso também ocorre, mas com menor sistematização, ou seja, um entrosamento menos rigoroso e com menor precisão e rigor dos conceitos. Contudo, em qualquer que seja o conjunto de conceitos, estes se entrosam de tal maneira que são inseparáveis, têm significado nesse conjunto de que participam (cf. op. cit., p. 66-67).

Desta operação mental de relacionar os conceitos, "relacionamento", de modo que eles percam sua especificidade e se fundam, formando relações conceituais (novas) e novos conceitos, ele diz: "*elabora-se em conseqüência o conhecimento*" (op. cit., p. 229).

---

[39] A respeito de ***pensamento***, Prado (1980, p. 98) diz: "*pensamento não é senão o próprio processo, que podemos observar no fato psicológico da sucessão ou desfilar de representações mentais (sensiveis e conceituais) [...] Esse desfilar que chamamos movimento do pensamento, é o próprio pensamento*".

[40] Prado Jr. denomina como ***conceituação*** ou ***conceito***: "*uma relação ou representação mental de um sistema de realções, sistema esse onde os termos constituintes de tais relações perdem sua especificidade, ou valen não por essa especificidade, mas unicamente pela sistemática em que eles se dispõem relativamente uns a outros*". Nesse sentido, conclui que os ***conceitos*** são função uns dos outros e do conjunto da conceituação que entre si eles integram, a representação mental da realidade objetiva exterior ao pensamento.

Representa o que denomina de ciclo do conhecimento por:

$$\text{Atividade} \underset{\text{dirige}}{\overset{\text{condiciona}}{\rightleftarrows}} \text{Pensamento} \underset{\text{orienta}}{\overset{\text{elabora}}{\rightleftarrows}} \text{Conhecimento}$$

2.3.3 Observações a partir das concepções de conhecimento

A necessidade de uma definição de *conhecimento* passou a ser um ponto relevante, quando cada vez mais notamos os problemas envolvidos. Questões como: "O que é *conhecimento*?" "Como posso dizer que 'alguma coisa' é *conhecimento* produzido pelo aluno?" "*Conhecimento* é algo transmitido?" "Existe *conhecimento* em um livro de Cálculo?" são algumas das sentenças construídas ao refletirmos sobre as concepções epistemológicas abordadas por cada um dos autores que acabamos de expor. Nas observações da presente seção e no próximo capítulo, estaremos falando a respeito e respondendo a essas questões. Mas podemos adiantar que as respostas <u>dependem</u> dos pressupostos teóricos, da noção ou definição de *conhecimento* tomada.

Em alguns dos autores citados (Mora, Chisholm e Ayer), existe uma preocupação com a exigência de mais investigações sobre a noção de *conhecimento*, de se poder torná-la mais explícita ou chegar a uma definição. Para nós, essa noção é usada cotidianamente com uma grande liberdade de significados literais,[41] que a torna difusa e às vezes confusa, embora a maioria dos autores especialistas no assunto procure esclarecê-la. Pelo fato de ser definida, não deixa de ser uma noção complexa (com muitos significados literais e relações com outras noções, necessárias ao seu entendimento). Por exemplo, na citação de Piaget:

[41] Para nós, o ***significado literal*** é a parte que se refere aos significados dicionarizáveis, estáticos. (Mais referências no item 1.3).

"conhecer consiste em construir ou reconstruir o objeto do conhecimento de modo a compreender o mecanismo desta construção...", a qual tem uma aparência simples, mas se complexifica a partir do instante em que procuramos investigar o que significam em sua teoria as noções envolvidas, como a de "*construir o objeto de conhecimento*", ou do "*mecanismo*" da construção, que requer uma compreensão de quase toda sua elaboração da epistemologia genética.

A diferença entre conhecer algo ou saber da existência de tal coisa ou de suas propriedades tem sido explorada através de elaboração de uma tipologia de conhecimento:

- os conhecimentos que são diretos ou imediatos (das verdades de fato, de coisas apreendidas pelo sentido), ou ainda como são às vezes denominados: sensíveis (baseado em impressões);
- os conhecimentos analíticos (*a priori* para alguns)[42] e os sintéticos (a *posterori* para alguns);

[42] Os termos ***a priori*** e ***a posteriori***, mesmo em relação a conhecimento têm usos diferenciados, conforme podem ser conferidos em Abbagnano (1996, p. 93-94) e em Mora (1996, p. 24-27). Segundo esses autores, a noção kantiana de ***a priori*** como conhecimento independente da experiência, oposto a conhecimento ***a posteriori*** _ obtido através da experiência _ é, de um modo geral, a mesma de Leibniz e dos seguidores de Wolff, embora tenham sempre estabelecido algumas diferenças. Para Kant, por exemplo, o ***a priori*** constitui "*o elemento formal, ou seja, ao mesmo tempo condição e fundamento de todos os graus de conhecimento; e não somente do conhecimento, já que também no domínio da vontade e do sentimento subsistem elementos a priori [...] Os juízos sintéticos a priori são possíveis....*" (Abbagnano, 1996, p. 94). Para Peirce (1980, p. 267): "*Espero ter neste escrito tornado verossímel que as leis aritméticas sejam juízos analíticos, e conseqüentemente a priori*".

Quanto ao termo ***analítico*** e ***sintético***, Mora (1996, p. 24) afirma que Kant chama de "*um juízo analítico aquele em que a conexão entre o sujeito e o predicado é pensada mediante identidade, ao passo que nos sintéticos tal conexão é pensada sem identidade. [...] Todos os juízos de experiência são sintéticos. [...] os sintéticos são sempre a posteriori.*" "*...Hume e Leibniz coincidem em que os juízos analíticos são a priori e os sintéticos a posteriori...* [Aqui cabe um esclarecimento de que, para Liebniz, algumas verdades de razão _ como as proposições lógicas e matemáticas _ são necessárias e eternas, analíticas, enquanto para Hume, não.] ". "*Embora Kant fale de juízos sintéticos a priori, o seu propósito é descobrir elementos apriorísticos nos juízos matemáticos e nas proposições da ciência natural, especialmente na física. Tais elementos não são verdades eternas mas condições da possibilidade de conhecimento...*" (op. cit., p. 25). Ainda segundo Japiassu (1991, p.19 e 226), a analítica (análise) transcendental de Kant "*tem por objeto a decomposição de nosso conhecimento a priori nos elementos do conhecimento puro do entendimento, isto é das categorias*". *[...]* "*Os sintéticos a posteriori são simplesmente aqueles que são derivados da experiência, constituindo portanto um conhecimento empírico*".

- os conhecimentos que são mediatos ou inteligíveis (de verdades da razão, de objetos abstratos, adquiridos através de inferências);
- os conhecimentos intuitivos (baseados na intuição, forma de contato direto da mente com o real).

Porém, nossas questões a respeito de conhecimento não estão centradas nessa discussão entre saber e conhecer.

Mesmo falando de conhecer, observamos que as metáforas e os empregos na linguagem verbal a respeito de conhecer e conhecimento são muito maleáveis. Só para lembrar alguns, podemos citar que conhecer é dito a respeito: de algo familiar (já visto, memorizado, sem outras explicações) que pode incluir desde pessoas, objetos ou sensações; da capacidade de distinguir entre duas espécies de coisas (por exemplo: vinhos, tons musicais). Conhecer um assunto (por exemplo: um conteúdo matemático) ou uma ação (por exemplo: manejar uma máquina).

Como pudemos observar também nas definições e concepções que expusemos, e reafirmado por Ayer (1986, p. 8):

> *...o dicionário dá a definição de "estar consciente ou informado de", "apreender ou compreender como fato ou verdade", o sentido, ou sentidos, nos quais ter conhecimento é conhecer que alguma coisa ou outra é o caso.*

Sendo assim, após essa indicação de alguns modos usuais e, ao mesmo tempo, bem gerais sobre conhecer _ gerais no sentido de vagos _ e de refletirmos um pouco quanto às suas características ou a sua natureza, notamos que é necessário começar a tecer e a precisar melhor os pontos que serão básicos ao tratarmos este assunto: conhecer e conhecimento, pois acreditamos que esse assunto requer uma maior clareza em termos de significados que se possa produzir e, conseqüentemente, em termos de seu uso, pelo menos dentro desse nosso campo epistemológico de investigações.

Um desses pontos é que consideraremos conhecer, o ato enquanto tal, um processo consciente,[43] embora tenhamos evidente que, para se chegar a "conhecer algo", possamos ter outros processos mentais anteriores ou concomitantemente relacionados e apenas passíveis de serem conscientes (capazes de se tornarem conscientes, mas às vezes não-conscientes).

Com essa determinação sobre a natureza consciente do processo de conhecer, evitaremos envolver em nossa pesquisa processos mentais não-conscientes, como os que são detectados nos chamados "insigths", que parecem surgir repentinamente como numa brilhante idéia para resolver um problema, e não se sabe bem responder como se chegou até ela. Por vezes, o máximo que se consegue é pensar posteriormente no que pode ter contribuído e tornar consciente parte dos processos mentais envolvidos, que aí sim, poderão ser investigados.

Contudo, os processos mentais dos quais não se toma participação consciente, quer seja porque a atenção do sujeito observado não está centrada no próprio agir mas deslocada a outros pensamentos alheios ao interesse do observador, quer seja por causas menos acessíveis como os processos inconscientes, não são objetos de nossos estudos. Somente são pesquisados e tratados, neste trabalho, os processos mentais observáveis através das atividades do sujeito e conscientes para ele _ o sujeito que os executa _ e que, uma vez exteriorizados, em forma de ações, como os gestos, a fala ou a escrita, permitem uma observação por uma terceira pessoa (no caso, os pesquisadores).

Um segundo ponto que, também diz respeito à produção da noção de

[43] Processos mentais, conforme encontramos, por exemplo, em Del Nero (1997, p. 126), podem ser ***conscientes ou passíveis de se tornar conscientes***, diferentemente de processos cerebrais que podem ser ***inconscientes*** (como o controle de torque de músculos, controle de glicose no sangue, de ordem puramente fisiológica). *Entre os processos mentais, ele distingue: o pensamento, a emoção, a atenção, o juizo, a motricidade e o sonho. Para* nós, por exemplo, a memorização é um processo apenas passível de tornar-se consciente, ou seja, nem sempre é totalmente consciente, ao passo que pensamento e conhecimento são conscientes.

conhecimento, está ligado a uma dicotomização, por vezes observada no tratamento deste assunto, entre o sujeito e um "suposto" conhecimento produzido; como se o conhecimento tivesse uma existência independente do sujeito que o produz, como se estivesse em algum lugar (por exemplo, nos livros) pronto para ser apropriado, para ser conhecido, transmitido através dos escritos, das falas, de gerações a gerações. Começamos a ponderar, não pela ação complexa de "transmitir", mas admitindo-se uma certa compreensão de transmitir (como sendo "enviar algo" para algum possível receptor), pensar primeiramente no que é transmitido.

Uma forma usada de transmissão são os escritos, discursos traduzidos em enunciados. Mas, se os escritos são fontes profícuas, não é pelo fato de conterem conhecimentos, conforme argumentaremos a seguir, e sim pelo fato de serem os resíduos de enunciações, fontes a partir das quais se pode produzir conhecimentos, pois os discursos são produzidos através de uma linguagem com todas as suas funções, inclusive de uma semântica que também depende do vivido pelo sujeito e de suas demandas. Assim, após o sujeito produzir (em um 1º momento) seus discursos, estes são postos (em um 2º momento) em enunciados escritos que, ao próprio autor[44] talvez seja possível uma re-produção (em um 3º momento, de leitura) dos conhecimentos do 1º momento.

Contudo, para um leitor há muito afastado do autor, não só cronologicamente mas em termos da linguagem, certamente os conhecimentos produzidos podem ser outros e até completamente distintos daqueles do autor (no 1º momento).

Além disso, mesmo admitindo que o leitor não tenha interferências na comunicação nem de fatores referentes à estrutura da língua _ para que ninguém o culpe por "não saber ler" _, o leitor pode não produzir igualmente os conhecimentos do autor em seu 1º momento. Haja vista o que acontece com alunos que, apesar de lerem o livro texto corretamente, não produzem o conhecimento que o professor espera. Logo, não é conveniente afirmar que conhecimentos são transmitidos, que

[44] Para uma discussão epistemológica a respeito de autor, leitor e produção de significado, ver Lins (1996).

um texto possui conhecimentos, porque, se assim fosse, todos que pudessem lê-lo (corretamente em termos da língua) re-produziriam o mesmo conhecimento.

Um terceiro ponto de observação, ligado à produção de conhecimento, é que se fala muito mais do sujeito perante o ato de conhecer _ *sujeito do conhecer* _ ao invés do ***sujeito do conhecimento***. Ou seja, assim como na definição clássica de conhecimento, a preocupação é com um sujeito que age na ação de *conhecer algo* que, passando a ser conhecido pelo sujeito, é dito ser um conhecimento, onde o central é o *sujeito do conhecer*. No nosso entender, a preocupação deve ser com um *sujeito do conhecimento*, com ligação intrínseca, existencial do conhecimento a partir do sujeito e, ao mesmo tempo, sujeito do conhecimento, como encontramos no Modelo Teórico dos Campos Semânticos.[45]

A ênfase no *processo constitutivo de conhecer* (como é dito: "processo de conhecimento") é mantida ao se falar em aspectos envolvendo a construção de conhecimento, como desenvolvimentos perceptuais, cognitivos e afetivos, etapas do desenvolvimento de conhecimento, esferas de conhecimento (representativa e imaginativa) e tipos de conhecimento (cotidiano, escolar, reflexivo, abstrato, metódico, científico e outros), tendo, assim, um outro enfoque, no qual se atribui uma importância mínima, ou nenhuma, ao *sujeito do conhecimento* em prol do *sujeito do conhecer*.

A partir desse enfoque, podemos citar "conhecimento", visto como o conjunto de "representações mentais presentes no indivíduo",[46] que inclui que conhecimento

[45] Mais referências em Lins (1997a) e também no capitulo 3 desta tese.

[46] Assim tratam Prado (1961, p. 139 e 197) e Pinto (1969, p. 22). Já Leontiev (1978, p. 84) prefere usar a palavra pensamento em vez de "representações mentais": "*Chamamos pensamento, em sentido próprio, o processo de reflexo consciente da realidade, nas suas propriedades, ligações e relações objetivas, incluindo mesmo os objetos inacessíveis à percepção sensível imediata. O homem, por exemplo, não percebe os raios ultravioletas, mas nem por isso desconhece a sua existência e as suas propriedades. Que torna possível este conhecimento? Ele é possivel por via de mediações. É esta via que é a via do pensamento. O seu princípio geral é que submetemos as coisas à prova de outras coisas e, tomando consciência das relações e interações que se estabelecem entre elas, julgamos a partir das modificações que aí percebemos...* [os grifos são nossos]".

Ou seja, toma como base importante o *pensamento*, que equivale às *representações mentais*, mas *conhecimento* também aparece de modo difuso.

pode se dar até com ausência de consciência (reflexos primordiais, como relações obtidas de impressões sensoriais elementares). Para nós, não é aceitável, uma vez que se mostra "ultraglobalizante" e, portanto, ineficiente a alguns de nossos propósitos. Por exemplo, não faz distinção entre um conhecimento com justificação matemática e um outro com justificação na autoridade de um livro ou de um professor.

Nossas observações principais sobre a definição clássica de conhecimento _ crença verdadeira justificada _ são: temos três partes disjuntas, três frentes separadas. A proposição é verdadeira de maneira absoluta; o fato de o sujeito poder acreditar, por caminhos bons (legítimos) ou ruins, desconecta o que ele conhece ou não do que ele acredita; e dizer que um método é aceitável significa um julgamento sobre o sujeito estar justificado ou não. A justificativa não é constitutiva, é apenas um juízo sobre como o sujeito chegou à proposição.[47]

A definição clássica de conhecimento também apresenta-se inadequada, para nós, pelo mesmo fato anteriormente citado na definição de conhecimento discutida por Ayer (conhecer que alguma coisa é o caso), qual seja, ela não distingue dois conhecimentos pelos caminhos que se chegou até eles. Coloca conhecimento com o status de uma proposição,[48] como "algo que se conhece ser o caso".

Como quarto ponto, devemos dizer que concordamos especificamente sobre a constatação de se ter uma certa *crença-afirmação* a respeito de "algo", do qual o sujeito acredita ser verdadeiro. O fato de ser verdadeiro é uma característica obtida socialmente, pois, apesar de parecer como produto final subjetivo _ uma verdade para o sujeito _ é construída em um processo de demanda social, dialético, adverso a qualquer idéia de absoluto. Epistemologistas (como A. J. Ayer e R. M. Chisholm) e psicólogos (como A. Leontiev, J. Bruner e Vygotsky) têm trabalhado esta questão

---

[47] Um exame de algumas conseqüências da definição clássica de conhecimento referida por Chisholm é feita por Lins (1997a).

[48] Segundo Lins (1997a, p. 5): "*From the classical definition I want to emphasise the fact that knowledge, according to it, has the status of a proposition, being "that which one knows"; actually, that is true even for practitioners of the "implicit knowledge" idea*".

das verdades ou certezas socialmente aceitas. Mas Chisholm (1989) é um, dentre os demais autores pesquisados, que analisa como aspectos do conhecimento _ "crença tida como verdadeira e evidente _ como vimos anteriormente.

Quanto à discussão feita por Ayer, pelo menos três observações imediatas gostaríamos de destacar, pensando em relação à produção de conhecimento. A primeira é que, admitindo "conhecer que algo é o caso" como um possível entendimento do que seja *conhecimento*, temos a reafirmar o nosso quarto ponto básico: que realmente não faz sentido para o sujeito que diz conhecer "algo", que este "algo" não seja considerado por ele uma verdade. A segunda observação é que o processo de conhecer parece assumir o "status" de uma descoberta _ *conhecer que alguma coisa é assim* _ quando se supõe que tomamos o conhecimento de "algo dado", enquanto, para nós, é no próprio processo de produção de conhecimento que construímos esse "algo", que construímos os *objetos*. A terceira é que, pelo fato de ele assumir que conhecimento pode ser como uma descoberta, como um produto "obtido" ao final do processo de conhecer, este conhecimento independe do modo como se chegou a ele e do próprio sujeito, enquanto sujeito do (seu) conhecimento. O que nos leva a afirmar que Ayer tem uma posição objetivista.

Em nossa prática de sala de aula, observando o que teria o aluno constituído como conhecimento a partir do Cálculo, temos exemplos em que, ao fazerem a mesma afirmação, como: "*a derivada é o coeficiente angular da reta tangente*", um aluno o faz porque, segundo ele, o professor sempre usa assim, enquanto outro aluno está seguro em afirmar a mesma coisa, porque produz a noção de derivada como coeficiente angular da reta tangente, passando por um processo (baseado em limite ou em infinitésimos) de aproximação sucessiva de retas secantes à reta tangente ou da coincidência da curva com a própria reta tangente (se olhado em uma mônada infinitesimal do ponto de tangência). Diante de tais exemplos, não podemos dizer que produziram o mesmo conhecimento, embora a afirmação seja a mesma e estejam seguros em poder dizê-la. Portanto, não podemos tomar como adequada uma teoria epistemológica que trate dicotomicamente o que é <u>conhecer</u>

"algo" para então pensar o que seria *conhecimento*. Do mesmo modo é para nós inadequada a noção de *conhecimento* apenas a partir do que se "conhece ser o caso", ou como Ayer diz: em "*conhecer que alguma coisa é o caso*". Logo, sentimo-nos mais à vontade para seguir em nossos empreendimentos de pesquisa sobre a constituição de significados e conhecimentos, mediante a observação de um modelo teórico que possa considerar a possibilidade de se ter conhecimentos diferentes, embora ambos satisfazendo igualmente as condições de "conhecer que alguma coisa é o caso".

A partir das reflexões sobre experiências vivenciadas no ensino e aprendizagem, nosso intuito inicial não foi tomar uma definição de conhecimento, mas bem direcionar os significados a serem produzidos a partir deles e segundo nossas posições, indagações, observações e análises constantes deste trabalho. Contudo, no decorrer das leituras, com ênfase principalmente na Epistemologia, tornou-se evidente o quanto é central, perante as nossas inquisições e as teorias desenvolvidas pelos epistemólogos, precisar a noção do que tratamos por *conhecimento*, uma vez que a variação semântica dessa palavra permite tecer frentes de argumentação em campos teóricos e práticos distintos (como pudemos observar também em autores citados), que nem sempre nos satisfazem, conforme exemplificamos. A definição deste elemento crucial em nossa pesquisa é a que propõe Lins (1994) no Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS).

A escolha deste modelo teórico (MTCS) como fundamento para nossa pesquisa não quer dizer, entretanto, que o aceitamos sem nenhum questionamento de seus princípios enquanto adequados, ou não, a nossas buscas. Não é simplesmente um ponto de partida. Inclusive, conforme um dos nossos objetivos, à proporção que formos caminhando em nosso trabalho, devemos, concomitantemente, estudá-lo e analisá-lo em conjunto com nossa "práxis"[49] para tentar mostrar <u>como</u> pode favorecer, e quais as possíveis limitações a um estudo

[49] Usamos ***práxis*** para nos referirmos abreviadamente ao conjunto de práticas sociais a que somos assujeitados e sujeitos, incluindo as práticas educativa, de ensino, científica e cultural.

epistemológico dos significados e objetos constituídos na aprendizagem do Cálculo.

No Capítulo 3, apresentamos as considerações teóricas que julgamos mais pertinentes ao MTCS, entre elas a de *conhecimento.*

Todavia, de um modo geral, sem a preocupação com qualquer modelo, podemos dizer que o conhecimento e, mais amplamente, o pensamento,[50] são proporcionados por nossas percepções e funções mentais básicas _ capacidade de atenção, de formação de imagens e de conexões _ cuja atuação consideramos sempre em um meio psíquico-social (aqui o hífen é para lembrar o quanto estão imbricados). Pois, assim como não podemos separar nossas atividades cognitivas das afetivas, nem as psíquicas das fisiológicas (posto que elas compõem as unidades psicológicas)[51], também são inseparáveis, a nosso ver, as atividades psicológicas do sujeito e os processos sociais os quais ele vivencia.

Em nossa pesquisa, mesmo direcionando a uma investigação epistemológica, na qual, como afirmamos, focamos o *sujeito do conhecimento* (o aluno), é impossível separar suas ações (que seja uma simples atenção ou um pensar sobre) de sua demanda social. Ao tentarmos fazê-lo, parece-nos ter sido feito um recorte no contexto em estudo, como se a visão que temos do sujeito fosse limitada e não pudéssemos mais nos relacionar a coisas bem pertinentes como o sentido, ou o motivo[52] que parecem "impulsionar" o sujeito em sua produção de *significados* e

50 Entendemos ***pensamento*** como relações e combinações, conscientes, das funções mentais básicas _ associação, atenção, formação de imagens e conexões _. Concordamos com Vygotsky, quando diz que "*o pensamento não é algo acabado, pronto para ser expresso. O pensamento se precipita, realiza certa função, certo trabalho. Este trabalho do pensamento é a transição desde as sensações da tarefa _ através da construção do significado _ ao desenvolvimento do próprio pensamento*" (Vygotsky, 1991, p. 125).

De acordo com o Modelo Teórico dos Campos Semânticos, consideramos ***significado*** como sendo o "***conjunto de coisas que se pode dizer e efetivamente se diz a respeito de um objeto***" [grifo nosso] (Lins, 1997b, p. 145).

51 Conforme Vygotsky (1991, p. 108): "*...o objeto da psicologia não constitui o fenômeno psicológico neutro, e sim o fenômeno psicofisiológico integral único, que convencionalmente denominamos fenômeno psicológico*".

52 Segundo Leontiev (1978, p.96 e 97), o sentido foi psicologicamente estudado com várias orientações, sendo que ele parece considerá-lo como criado pela globalidade de uma situação, quando diz: "*o sentido é antes de mais uma relação que se cria na vida, na atividade do sujeito. [...] é criado pela relação objetiva que se reflete no cérebro do homem, entre aquilo que o incita a agir e aquilo para o qual a sua ação se orienta como*

conhecimentos. Logo, os *significados* a serem produzidos e observados, mesmo a partir do Cálculo, o serão nesta demanda social, em que os sujeitos estão inseridos. Isso é reforçado na seguinte citação:

> *...a atividade complexa dos animais superiores, submetida a relações naturais entre coisas, transforma-se, no homem, numa atividade submetida a relações sociais desde a sua origem. Esta é a causa imediata que dá origem à forma especificamente humana do reflexo de realidade, a consciência humana* (Leontiev, 1978, p. 78).

resultado imediato. Por outras palavras, o sentido consciente traduz a relação do motivo ao fim. [...] para encontrar o sentido pessoal devemos descobrir o motivo que lhe corresponde". Então, designa por motivo aquilo em que a necessidade do sujeito objetivamente se concretiza nas condições consideradas, que estimula e orienta a sua atividade. Em nossa pesquisa , basta falar somente em *sentido*, que consideramos como "o que leva o sujeito a engajar-se em uma atividade".

Capítulo 3

REVISÃO DE LITERATURA

3.1 INTRODUÇÃO

Dentro da literatura envolvendo pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, voltamos nossa atenção, neste capítulo, para algumas que abordam tópicos sobre limites e infinitésimos ou sobre a construção do pensamento diferencial e integral com ênfase em aspectos epistemológicos.

Com interseção nessas linhas, poucos são os artigos e pesquisas encontrados. Para justificar a pequena quantidade encontrada desses trabalhos, resolvemos fazer um quadro demonstrativo do universo de trabalhos, da última década, envolvendo Cálculo, pesquisados em alguns dos principais periódicos internacionais a que temos acesso: *"Journal of Mathematics Education"*, *"Journal for Research in Mathematics Education"*, *"The American Mathematical Monthly"*, *"Recherches en Didactique des Mathématiques"*, *" Journal of Mathematics Teacher Education"*; *"Educational Studies in Mathematics"* e, também, nos *Proccedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - PME*, nos anais do *ICME 8* (8^{th} International Congress on Mathematical Education), incluindo os de *História e Educação Matemática* (Braga: Universidade do Minho).

Dos diversos assuntos constantes nos trabalhos pesquisados, buscamos agrupá-los pela definição de suas linhas centrais mais evidentes. Aqueles que têm forte interseção com mais de um grupo receberam observação a respeito. Selecionamos cinco grupos ligados a Cálculo: 1. Grupo de abordagens de conteúdo; 2. Grupo de informática e computação; 3. Grupo de ensino e aprendizagem; 4. Grupo de história; 5. Grupo de epistemologia.

Grupos ligados ao Cálculo

Grupo 1.	Grupo 2.	Grupo 3.	Grupo 4.	Grupo 5.
8 artigos	17 artigos	20 artigos	5 artigos	12 artigos
1 int.G3	1 int.G4 3 int.G5	2 int.G1 1 int.G2 1 int.G4 3 int.G5	1 int.G5	2 int.G3

1. Grupo de abordagens de conteúdo:

MALM, D.E.G. *How to integrate rational functions.* ***The American Mathematical Monthly***, v. 99, n. 8, p. 762-772, 1992.

GILLMAN, L.. *An axiomatic approach to the integral.* ***The American Mathematical Monthly***, v.100, n. 1, p. 16-25, 1993.

GALE, D. *Teaching integration by substitution* . ***The American Mathematical Monthly***, v. 101, n. 6, p. 520-526, 1994.

THURSTON, H. *What is wrong with the definition of dy/dx ?* ***The American Mathematical Monthly***, v. 101, n. 9, p. 855-857, 1994.

THOMPSON, P.W. *Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus.* **Educational Studies in Mathematics**, v. 26, n. 2-3, p. 229-274, 1994. [Interseção com o Grupo 3.].

TUCKER, T.W. *Rethinking rigor in Calculus: the role of the Mean Value Theorem.* ***The American Mathematical Monthly***, v. 104, n. 3, p. 231-240, 1997.

SWANN, H. *Commentary on rethinking rigor in Calculus: The role of the Mean Value Theorem.* ***The American Mathematical Monthly***, v. 104, n. 3, p.241-245, 1997.

GRABINER, J.V. *Was Newton's Calculus a dead end ? The continental influence of Maclaurin's Treatise of Fluxions.* ***The American Mathematical Monthly***, v. 104, n. 5, p. 393-410, 1997.

2. Grupo de informática e computação:

JUDSON, P.T. *Elementary business calculus with computer algebra.* ***Journal of Mathematical Behavior***, v. 9, p. 153-157, 1990.

PALMITER, J.R. *Effects of computer algebra systems on concept and skill acquisition in calculus.* ***Journal of Mathematical Education***, v. 22, n. 2, p.151-136, 1991.

WATT, J.X. *The effects of an experimetal spatial ability treatment program on Calculus achievement with university students.* ***Journal for Research in Mathematical Education***, Indiana University (Dissertation) DAI, 51A, 3354 [DA 9107314], 1990.

TUFTE, F.W. *The influence of computer graphics on the formation of the derivative and integral concepts.* ***Journal for Mathematical Education***. University of Wisconsin - Madison (Dissertation) DAI, 51 A, 1149 [DA 9025734], 1990.

SCHROCK, C.S. *Calculus and computing: an exploratory study to examine the effectiveness of using a computer algebra system to develop increased conceptual understanding in a first-semester calculus curse.* ***Journal for Mathematical Education***. Kansas State University (Dissertation) DAI, 50A, 1926 [DA 8924337], 1989.

CROCKER, D.A. *A qualitative study of interactions, concept development and problem-solving in a Calculus class immersed in the computer Algebra System Mathematical.* **Journal for Research in Mathematical Education**. Ohio State University (Dissertation) DAI, 52A, 2850-2851 [DA 9201643], 1992.

HART, D.K. *Building concept images: supercalculators and students' use of multiple representations in calculus.* **Journal for Research in Mathematical Education**. Oregon State University (Dissertation) DAI, 52A, 4254 [DA 9214776], 1992.

BAE, J.S., et al. *Roles of calculators to understand the mathematical process in the classroom.* ***Anais do ICMI 8*** - Sevilha, p. *121, 1996.* [Interseção com o Grupo 4.].

FIGUEIRIDO, V.L.X., COSTA, S., GROU, M.A. *Advanced calculus students research projects through computer.* ***Anais do ICMI 8*** - Sevilha, p. 558, 1996.

SOUZA, L.G.S., MOREIRA, D.T. *Visualizing the Calculus.* ***Anais do ICMI 8*** - Sevilha, p. 559, 1996.

SALVADOR, J.A., SANTOS, V.M.P. dos. *Calculus and computer.* ***Anais do ICMI 8*** - Sevilha, p. 563, 1996.

BEZERRA, J.Q., FOSSA, J.A. *Calculus, computers and conceptual learning.* ***Anais do ICMI 8*** - Sevilha, p. 685, 1996. [Interseção com o Grupo 5.].

BORBA, M.C. *Overcoming limits of software tools: a student's solution for a problem involving transformation of functions.* ***Proccedings of the 19th PME Conference*** - Brasil, v. 2, p. 11-17, 1995 . [Interseção com o Grupo 5.].

GÓMEZ, P., FERNÁNDEZ, F. *Graphics calculators use in pre-Calculus and achievement in Calculus.* ***Proccedings of the 21th PME Conference*** - Finlandia, v. 3, p. 1-8, 1197.

HONG, Y.Y.H., THOMAS, M. *Using the computer to improve coceptual thinking in integration.* ***Proccedings of the 21th PME Conference*** - Finlandia, v. 3, p. 81-88, 1197. [Interseção com o Grupo 5.].

MESA, V.M. *The use of the graphing calculator in solving problems on functions.* ***Proccedings of the 21th PME Conference*** - Finlandia, v. 3, p.240-247, 1197.

ATIGUE, M. *Le logiciel 'Derive' comme reveleteur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'appentissage.* ***Educational Studies in Mathematics***. Dordrecht: Klüwer Academic Publish, v. 33, n. 2, p. 133-169, 1997.

3. Grupo de ensino e aprendizagem:

PROTTER, M.H.*The self-paced Calculus Program at Berkeley.* ***The American Mathematical Monthly***, v. 98, n. 3, p. 245-248, 1991.

BRESSOUD, D,M. *Why do we teach Calculus?* ***The American Mathematical Monthly***, v. 99, n. 7, p. 615-617, 1992.

KLEINFELD, M. *Calculus: reformed or deformed ?* ***The American Mathematical Monthly***, v. 103, n. 3, p. 230-232, 1996.

KNISLEY, J. *Calculus: a modern perspective.* ***The American Mathematical Monthly***, v. 104, n 8, 724-721, 1997.

OBEBEE, A., ZORN, P. *Pro choice*. **The American Mathematical Monthly**, v.104, n. 8, p. 728-730, 1997.

KAPUT, J.J. *Rethinking Calculus: learning and thinking*. **The American Mathematical Monthly**, v. 104, n. 8, p. 731-737, 1997.

ASKEY, R. *What do you do about Calculus ? First, do no harm*. **The American Mathematical Monthly**, v. 104, n. 8, p. 738-743, 1997.

STRIBLING, M.L. *The influence of mathematics backgound and continuity of coursework on sucess in college Calculus*. **Journal for Mathematical Education**. University of Kenucky (Dissertation) DAI, 51A, 1137 [DA 9025256], 1990.

GROU, M., COSTA, S. *Enseñanza del Calculo por medio de proyectos*. **Anais do ICMI 8** - Sevilha, p. 34, 1996. [Interseção com o Grupo 2.].

POBLETE, A., GUZMÁN, I., MENDEZ, C. *Resolución de problemas y variedades didacticas matematicas*. **Anais do ICMI 8** - Sevilha, p. 100, 1996. [Interseção com o Grupo 1.].

DIAZ, M.V. POBLETE, A. *Tipos de problemas y evaluación de los aprendizajes en Cálculo Diferencial*. **Anais do ICMI 8** - Sevilha, p. 102, 1996. [Interseção com o Grupo 1.].

KIM, K.H., KANG, O.K., SHIN, H.S. *Student difficulties in learning basic concepts of Calculus*. **Anais do ICMI 8** - Sevilha, p. 118, 1996. [Interseção com o Grupo 4.].

SOARES, R.S., FOSSA, J.A. *Alternative assessment and learning Calculus*. **Anais do ICMI 8** - Sevilha, p. 331, 1996.

MUNDY J.F., GOROFF, D. *Evaluating and documenting calculus reform*. **Anais do ICMI 8** - Sevilha, p. 430, 1996.

TÉLLEZ, M.P.M. *Sobre la enseñanza del Cálculo.* ***Anais do ICMI 8*** - Sevilha, p. 458, 1996.

ESPINOZA, L. AZCÁRATE, C. *A study on secondary teaching system about the concept of limit.* ***Proccedings of the 19th PME*** Conference - Brasil, v.2, p. 11-17, 1195. [Interseção com o Grupo 5.].

PENCE, B.J. *Investigating the impact of change in the Calculus curriculum at San Jose State University.* ***Proccedings of the 19th PME Conference*** - Brasil, v. 1, p. 216, 1195. [Interseção com o Grupo 5.].

KRASJCSIC, G.C. *Observations about teaching mathematical definitions and concepts to non-native speakers of English in Papua New Guinea.* ***Proceedings de História e Educação Matemática (ICMI 8)***, v. II, p. 438-444, 1996.

DOWNS, J.M. *On the notion of function.* ***Proccedings of the 20th PME Conference*** - Valencia, v. 3, p. 321-328, 1196. [Interseção com o Grupo 5.].

TURÉGANO, P. *Concept-images of the definite integral identified in secondary school students.* ***Proccedings of the 21th PME Conference*** - Finlandia, v.1, p. 295, 1197.

4. Grupo de história:

ARMELLA, L.M. *Calculus: history and cognition.* ***Proceedings de História e Educação Matemática*** (***ICMI 8***), v.II, p. 294-300, 1996. [Interseção com o Grupo 5.].

LAUGWITZ, D. *On the historical development of infinitesimal Mathematics.* ***The American Mathematical Monthly***, v. 104, n. 5, p.447-445, 1997.

SILVA-DYNNIKOV, C.M.S. *O conceito de derivada no ensino da matemática no Brasil do séc. XIX, o ensino de Cálculo no Brasil.* ***Proceedings de História e Educação Matemática (ICMI 8)***, v.II, p. 80-87, 1996.

JOHNSON, P.E. *Newton's realization of the Fundamental Theorem of Calculus.* ***Proceedings de História e Educação Matemática (ICMI 8)***, v.II, p. 359-364, 1996.

VAN MAANEN, J. *The Calculus, out of the blue ?* ***Proceedings de História e Educação Matemática (ICMI 8)***, v.I, p. 148-159, 1996.

5. Grupo de epistemologia:

WILLIAMS, S.R. *The understanding of limit: three prspectives.* ***Proccedings Fourteenth PME Conference*** - México, v.I, p. 101-108, 1990. [Correlato ao artigo a seguir]

WILLIAMS, S.R. *Models of limit held by college Calculus students.* ***Journal for Research in Mathematical Education***, v. 22, p. 219-236, 1991.

WHITE, P., MITCHELMORE, M. *Conceptual knowledge in introductory Calculus.* ***Journal of Mathematical Education***, v. 27, n. 1, p. 79-85, 1996.

MAMONA, J.C. *Students' interpretations of some concepts of mathematical analysis.* ***Journal for Mathematical Education***, University of Southampton, United Kingdom (Dissertation) DAI, 51 A, 441 [BRDX89054], 1990.

DOWNS, M.J. *Pupils' interpretations of limit concept : a comparison study between Greeks and English.* ***Proccedings Fourteenth PME Conference*** - México, v.II, p. 67-74, 1990.

SCHNEIDER, M. *A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané.* ***Educational Studies in Mathematics***, v. 23, n. 4, p. 317-350, 1992.

DÍAZ, M.L., OTEIZA, M.F. *Preconceptos en Cálculo superior.* **Anais do ICMI 8** - Sevilha, p. 136, 1996.

VÁZQUEZ, S.M., ASTUDILLO, G.T., ESTEBAN, I.C. *Análisis de los conceptos de limite y continuidad en los libros de textos de bachillerato.* **Anais do ICMI 8** - Sevilha, p. 268, 1996. [Interseção com Grupo 3.].

AMIT, M. & VINNER, S. *Some misconceptions in Calculus - Anecdotes or the tip of an iceberg?* **Proceedings Fourteenth PME Conference** - México, v.I, p. 3-10, 1990.

HITT, F. *The concept of function: continuity image versus discontinuity image.* **Proccedings Fourteenth PME Conference** - México, v.II, p. 67-74, 1990. [Interseção com o Grupo 3.].

BALDINO, R.R., CIANI, A.B., LEAL, A.C. *Can the average student learn analysis?* **Proccedings of the 21th PME Conference** - Finlandia, v. 2, p.33-40, 1197.

ASPINWALL, L. et al. *Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative.* **Educational Studies in Mathmatics**, v. 33, p. 301-317, 1997.

Ademais, devido a nosso embasamento epistemológico, resolvemos também evidenciar a seguir alguns trabalhos (item 3.2), que são referências em nosso meio acadêmico ao falar-se em ensino e aprendizagem de Cálculo ligados à produção cognitiva dos alunos.

Esta breve revisão, entretanto, pretende se limitar a observações selecionadas a respeito deste material bibliográfico, que nos pareceu ter favorecido reflexões dentro de nossa pesquisa relativa à produção de significados para objetos constituídos a partir do Cálculo e de sua possível diversidade. Não poderíamos deixar de mencionar que algumas dessas referências bibliográficas do item 3.2 são utilizadas em vários dos trabalhos citados, principalmente os dos Grupos 5. e 3. (com suas interseções no campo epistemológico).

3.2 REVISÃO DE PESQUISAS ENVOLVENDO ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO

3.2.1 Linha cognitivista das pesquisas de D. Tall

Começamos por destacar o trabalho de David Tall a respeito do *pensamento matemático avançado* que, inclusive, levou à formação, em 1985, de um Grupo de Trabalho do PME e à elaboração da obra *Advanced Mathematical Thinking* a qual compartilha com vários outros autores, abordando três linhas mestras: a psicologia e a natureza do pensamento matemático avançado; a teoria cognitiva envolvida no processo de concepção deste tipo de pensamento; e publicações de pesquisas cognitivas, em diferentes áreas, envolvendo o ensino e aprendizagem do pensamento matemático avançado.

Nesta obra, Tall (1991, p. 3), ao falar sobre o ciclo de atividades do pensar matemático avançado, afirma que ele pode ser visto como aquele que, partindo da contextualização de um problema na investigação matemática, conduz à formulação de *conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova. Além disso, a possibilidade* de definição formal e de dedução são fatores que distinguem o pensar matemático avançado em relação ao pensar matemático elementar.

Diz, ainda, que muitos dos processos (transição e reconstrução mental, generalização e abstração, intuição, rigor, análise e síntese) não são exclusivos do pensar matemático avançado, podendo ser encontrados em um nível de pensamento mais elementar. Sobre a passagem desse nível elementar para o avançado, diz:

> *A mudança do pensar matemático elementar para o avançado envolve uma transição significante: de descrever para definir, de convencer para provar de um modo*

lógico baseado nas definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva [...] É a transição de coerência da matemática elementar para a conseqüência da matemática avançada, baseia-se em entidades abstratas as quais o indivíduo precisa construir através de deduções das definições formais (op. cit., p. 20, tradução nossa).[7]

No estudo dos processos cognitivos envolvidos na construção do pensamento matemático avançado, Tall considera dois aspectos complementares como importantes: a *criatividade* na geração de novas idéias e o poder de convencimento da noção matemática de *prova*. O desenvolvimento desse processo de construção mental do pensar matemático ele considera diferente da apresentação que temos dos conceitos e fundamentos "seguros" da matemática, mesmo na questão da sua lógica em relação à lógica matemática.

Sobre conceitos, aproveitamos para fazer algumas colocações do nosso modo de pensar. Não nos parece ser evidente a dicotomização entre "*conceitos matemáticos formalmente definidos*" e os "*processos cognitivos que os constituem*", conforme tratam Tall & Vinner (1981). Uma primeira dúvida paira quanto a essas definições formais de conceitos, pois, se são definições formalmente aceitas pela comunidade acadêmica, não são mais conceitos, elas são definições, que podem ser consideradas resíduos da explicitação (por alguém) de um conceito. Portanto, o que está sendo fixado é uma definição, e não (como fica parecendo) o conceito ao qual se quer chegar; mesmo admitindo construções subseqüentes relativas a um conceito (parecem acrescentar: mesmo, ou seja, um mesmo) durante o processo de constituição. Logo, "*conceitos matemáticos formalmente definidos*" são, na verdade, definições formais que, no processo de constiuição, relacionam-se com um conceito.

Uma outra dúvida está em afirmarem que, durante o processo mental de reconhecimento e manipulação de um conceito, muitas interferências (conscientes

[7] No original: "*The move from elementary to avanced mathematical thinking involves a significant transition: that from decribing to defining, from convincing to proving in a logical manner based on rhose definitions. This transition requires a cognitive reconstruction [...]. It is the transition from the coherence of elementary mathematics to the consequence of advanced mathematics, based on abstract entities which the individual must construct through deductions from formal definitions*".

ou inconscientes) afetam o seu significado e uso. O que querem que se entenda por reconhecimento? Estabelecimento do conceito em um "*ícone*", guardando a "semelhança" de uma fotografia, como diz Pierce? Não, certamente. Acrescentamos, então, por uma necessidade nossa, que não é questão de re-conhecimento, mas de tomar certas "coisas" como dadas (não a priori, mas dentro da situação) e a partir delas constituir significados ou outros conhecimentos e usos que, uma vez referentes a um objeto, é comum dizer que o sujeito "tem" (produz) um conceito a respeito. Mas também que nem sempre se consegue manifestar (de um modo razoável e aceitável) um conceito em uma definição de certa forma "correspondente", ou mesmo que tenha que existir sempre um "conceito matemático formalmente definido", uma definição.

Citamos, como exemplo, a questão de "número". De um modo geral (não especificando em número inteiro, real, ou outro), para a comunidade matemática, qual foi a definição aceita no século passado (para não ir muito longe)? Seria uma temeridade dizer que não se produzia qualquer conceito a respeito de número. E hoje? Vamos ter que fazer divisões na comunidade dos matemáticos para saber qual a definição conceitual aceita? Certamente que não. Adota-se uma, dependendo da situação e da demanda de seu uso. Sabemos que o conceito de número é algo que constantemente é elaborado, e qualquer definição conceitual que se possa construir sofre influências, inclusive em campos não matemáticos, como o da linguagem _ "*o conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado* " _, e o psicológico _ resultado da construção de uma estrutura cognitiva _[2]. Por vezes, número _ como um conceito que tem sua constituição citada em meio a um processo

[2] A definição de ***número*** como "*o conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado*" está em Ferreira (1995, p. 459), onde encontramos uma circularidade nas definições, uma vez que ***conjunto*** é designado como "*qualquer coleção de seres matemáticos*" e ***coleção*** como "*conjunto ou reunião de objetos da mesma natureza ou que têm qualquer relação entre si*".

Em termos psicológicos, temos exemplo na gênese epistemológica de Piaget, nas construções de estruturas cognitivas, onde encontramos ***número*** como: "*uma coleção de objetos concebidos ao mesmo tempo equivalentes e seriáveis*". Para ele: "*...o **número** organiza-se, etapas por etapas, em estreita solidariedade com a elaboração gradual dos sistemas de inclusões (hierarquia de classes lógicas) e de relações assimétricas (seriações qualitativas), constituindo-se assim a série dos **números** como síntese operatória da classificação e da seriação.* [Grifo nosso] (Battro, apud Piaget, 1978, p. 168)".

genealógico: "*O conceito abstrato de número é o resultado de um longo processo de desenvolvimento com a invenção da escrita constituindo uma clara e definida demarcação* (Damerow, 1996, p. 296)" _ ou número em um "*pensar algébrico*" como:

> *...qualquer elemento do conjunto de base de uma estrutura algébrica. [...] Segundo nosso ponto de vista, números naturais, inteiros, reais e complexos são números, mas também o são: polinômios, vetores, matrizes, permutações, conjuntos, e assim por diante, sempre que estiverem sendo considerados do ponto de vista da estrutura algébrica correspondente* (Lins & Gimenez, 1997, p. 152).

Em outras palavras, por ser "algo" ilimitado e com características potenciais, é em meio a um processo dialético aparente, em uma trama de mediações com o "objeto" a ser conceituado, que se produz um conceito, à medida que agimos e falamos. Um conceito, por ter esta característica de ser muito "volátil", escapa facilmente de qualquer tentativa de controle na prática de observação da aprendizagem. Como é percebido? Nas atividades do sujeito, através da atenção e estudo do processo de produção de elementos epistemológicos: os símbolos, os significados, seus modos de produção, os objetos, os conhecimentos, e *principalmente as relações (mediações) entre eles. Pois são esses os contribuintes* na constituição de representações simbólicas, inclusive de uma definição.

Uma relativização a respeito da definição de um conceito, nas palavras de Tall & Vinner, pode ser observada a seguir:

> *A definição de um conceito (se existe uma) é um assunto completamente diferente. Nós olharemos a **definição conceitual** como sendo as palavras usadas para especificar aquele conceito. [...] De qualquer forma, a definição conceitual é dada ou construída por ele mesmo* [o estudante], *ele pode variar com o tempo. Deste modo, uma definição conceitual pessoal pode diferir de uma definição conceitual formal, a mais recente definição conceitual a qual é aceita pela comunidade matemática em geral* (Tall & Vinner, 1981, p. 152).[3]

[3] Originalmente: "*Whether the concept definition is give to him or constructed by himself, he may vary it from time to time. In this way a personal concept definition can differ from a formal concept definition, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community at large.*

Ele define "*imagem conceitual*" como sendo a estrutura cognitiva total (incluindo os processos, propriedades e imagens mentais) associada ao conceito. Fala sobre os conflitos cognitivos que podem ser gerados pelas "*imagens conceituais e definições conceituais*" frente às "*imagens conceituais evocadas*" pelos alunos e às "*definições conceituais formais*". Segundo ele, a "*imagem conceitual evocada*" é em geral uma porção da "*imagem conceitual*", ativada momentaneamente.

Posteriormente, no artigo publicado com Gray (Gray & Tall, 1994, p. 121) eles consideram a dualidade entre processo e conceito em Matemática. Representam ambiguamente o "amálgama" da combinação cognitiva de processo (***process***) e conceito (***concepts***) que podem ser evocados por um mesmo símbolo em **proceitos**. Em suas palavras:

> *Um **proceito elementar** é o amálgama de três componentes: um **processo** que produz um **objeto** matemático, e um **símbolo** que representa ou o processo ou o objeto. [...] Um **proceito** consiste de uma coleção de proceitos elementares que têm o mesmo objeto [grifos nossos].*

Exemplificam como um proceito elementar os primeiros estágios de como vemos um número. Inicialmente, dizem eles, o símbolo 3 evoca tanto o processo de contagem "um, dois, três" quanto o número propriamente. Três é um conceito abstrato, mas com o seu uso (na comunicação) e na ação sobre ele através das operações aritméticas (evocadas pelo símbolo "1+2", "1+1+1", e outros) ele cresce em seu significado (literal), ligando os aspectos processual (da operação) e conceitual. A combinação do pensar conceitual e processual, que o símbolo 3 acaba por evocar, eles denominam de pensar "*proceptual*" (proceitual).[4]

[4] A essa combinação mencionam também a operação de " '*encapsulação*' (*encapsulation*) *de um* processo (no exemplo, o de 'contagem') como objeto (um número, com seu conceito): '*The sequence of number words becomes part of a procedure to point at sucessive elements; each number word is uttered in turn until the last word is identified as the number of elements in the collection. In this manner we see the process of conting* *encapsulated* *as the concept of number.*' Para eles: "*The cognitive process of forming a (static) conceptual entity from a (dynamic) process has variously been called 'entification' (Kaput, 1982), 'reification'(Sfard, 1989,1991), and 'encapsulation' (Dubinsky, 1991)*" (op. cit., p. 118-119).

Seus demais trabalhos se valorizam, para nós, à medida que trazem para reflexão, dentro do estudo da aprendizagem, as idéias e dificuldades dos alunos, como relevantes. Podemos observar essa inserção no estudo das dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos, de seus *fatores de conflito cognitivo*, referentes a: limites e continuidade (Tall & Vinner, 1981, p.154-169 e Tall, 1980a), infinitesimais (Tall, 1981 e Tall, 1982), infinito (Tall, 1980b), uso do computador (Tall, 1991) e, mais recentemente, no estudo das "*unidades cognitivas*"[5] (Bernard & Tall, 1997), entre outros.

3.2.2 Obstáculos epistemológicos: as idéias de Cornu, Sierpinska e Rezende.

Os trabalhos desses autores aos quais nos reportaremos têm como base a "definição conceitual"[6] de obstáculo epistemológico, segundo Bachelard e Brousseau, como sendo causas inerciais, de estagnação, na constituição de conhecimentos: é um conhecimento que satisfaz durante um certo tempo (por resolver determinados problemas), mas que, perante um novo problema ao qual não é adequado, não se enxerga a inadequação (cf. Cornu, 1983, p. 30). [7]

[5] Em trabalho apresentado na 21st Conference of the International Group for the Psichology of Mathematics Education - 21st PME, T. Bernard e D.Tall designaram uma peça da estrutura cognitiva que permanece no foco de atenção (para determinada pessoa) como ***unidade cognitiva***. Pode ser um símbolo ("1+1 é 2"), um fato ("a soma de dois números pares é um par"), uma relação, um teorema, e assim por diante. A partir dessa idéia, observam as unidades cognitivas e conexões feitas por estudantes em provas matemáticas da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{3}$.

[6] "Definição conceitual" conforme citação de Tall que fizemos anteriormente.

[7] Nas palavras de Bachelard (1971, p. 165): "*...é no próprio ato de conhecer, intimamente, que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, lentidões e perturbações. É aqui que residem causas de estagnação e mesmo de regressão, é aqui que iremos descobrir causas de inércia a que chamaremos obstáculos epistemológicos*".

Abrimos um parêntese para dizer que, nos termos propostos no MTCS, a estagnação fica por conta da impossibilidade de produção de determinados significados.[8]

Em seu artigo Sierpinska (1987, p. 371-397) relata uma pesquisa com grupos de estudantes de Arquitetura diante das dificuldades que denomina de "*obstáculos relativos a limite*" em Cálculo. Esse artigo faz parte de um projeto mais amplo para elaborar situações didáticas com o objetivo de ajudar também a estudantes de Matemática e Física do Warsaw Liceum, onde lecionava.

No referido artigo, ela coloca a necessidade de aparecimento de conflitos mentais para superar obstáculos, guiados pela escolha de contextos matemáticos próprios à situação. Dentro desse princípio, trabalha a parte experimental da pesquisa com o contexto relativo a séries infinitas, tendo como um fator dessa escolha o desenvolvimento histórico do Cálculo ligado a séries infinitas. Tem como objetivo auxiliar os estudantes a superarem obstáculos concernentes à compreensão do conceito de limite. Explicita as noções de conhecimento científico (empírico, formal, escorado em símbolos), infinito, função e números reais, como as principais fontes de obstáculos relativos a limite.

Sierpinska, em um outro artigo, relaciona a noção de significado diretamente à de "***compreensão de conceito***":

> *Compreender o conceito será concebido como o ato de captar seu significado. Este ato será provavelmente um ato de generalização e síntese de significados relacionados a elementos particulares da "estrutura" do conceito (a estrutura é a rede de sentidos das sentenças que consideramos).* (Sierpinska, 1990, p. 27).

Ainda em sua pesquisa envolvendo estudantes de Arquitetura (cf Sierpinska 1987, p. 371-397), a fim de atingir seus objetivos, ela valoriza as falas dos alunos em suas análises das sessões junto aos mesmos, nas quais não só observa, mas

[8] No Capítulo 3, falamos mais a respeito.

interage com eles em meio às suas atividades. É uma *"observadora ativa"*.[9] Essa metodologia de pesquisa participante nos parece adequada ao seu objetivo de auxiliar os estudantes na superação de obstáculos, porém, no referente às suas análises, tanto das *"compreensões das concepções dos estudantes"* quanto de suas atitudes em direção à produção de conhecimentos matemáticos, deve ser levada em consideração a interação significativa de sua participação, ou seja, de análises de compreensões e produções de alunos sob sua interferência ativa.

Nas conclusões dessa pesquisa ela escreve que nenhum dos obstáculos epistemológicos foi completamente sobreposto, mas que o ponto inicial para que isso aconteça pode ter se estabelecido nos conflitos mentais. Ela enfatiza as diferenciações de atitudes dos estudantes de Arquitetura, em relação aos de Matemática, frente ao uso de ferramentas matemáticas. O que acreditamos[10] poder ser ocasionado pelo contexto social, pois, enquanto estudantes de Arquitetura, as demandas e os seus interlocutores em relação à Matemática são completamente diferentes daqueles de um estudante de Matemática.

> *O ser humano age com relação às coisas na base dos sentidos que elas têm para ele. Estas coisas incluem todos os objetos físicos, outros seres humanos (amigos ou inimigos), instituições, idéias valorizadas (honestidade), atividades dos outros e outras situações que o indivíduo encontra na sua vida cotidiana. [...] O sentido destas coisas é derivado, ou surge, da interação social que alguém estabelece com seus companheiros* (Blumer, apud Haguette, 1990, p. 31).

[9] Esta designação de *"observador ativo"* e *"observador passivo"* (Schwartz & Schwartz, apud Haguette, 1990, p.64) distingue os papéis do observador quanto à sua interação com os observados.

[10] Não é mera conjectura essa influência sentida em relação a diferentes cursos. Tornou-se uma crença, que teve por auxílio as observações vividas (pela pesquisadora deste trabalho) enquanto professora de Cálculo e Geometria para várias turmas de Arquitetura.

Bernard Cornu (1983), em sua tese de doutorado: *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*, ao pesquisar sobre a noção[11] de limite via obstáculos epistemológicos, diz que esta não pode ser desenvolvida sem considerar outras noções que são desenvolvidas paralelamente e ligadas a ela, e que juntas compõem o "*campo conceitual*" em relação ao conceito de limite. Para realçar essas outras noções em relação a limite, faz uso constante da História da Matemática.

O autor observa bem que, dentro da aprendizagem de limite, temos a noção de limite e sua definição (weirstrassiana, por e e d) como duas coisas relativamente separadas, distintas. Por exemplo, nos seus respectivos usos: com a definição, demonstramos que o "limite da soma é a soma dos limites" mas não calculamos um limite.

Historicamente, diz que a noção de limite funcionou para muitos matemáticos antes que se tivesse a definição atual. O nosso modo de ler e refletir sobre a história[12] nos faz discordar sobre o modo desta abordagem de Cornu a respeito de sua gênese da noção de limite, buscando premissas desde construções gregas, como os paradoxos de Zenon e o cálculo de área do círculo pelo método da exaustão (de Eudoxo). Para nós, a "noção de limite" só é possível de ser pensada como tal (como atualmente pode ser admitida) depois que se produziram significados e relações, permitindo-nos pensar e enunciar a partir do "objeto matemático": limite. Antes disso, era outra coisa, produziam-se outras noções, outros *conhecimentos*.[13] A "semelhança" acontece porque, ao ler a história passada, produzimos juntamente significados presentes, objetos e relações que parecem então terem sido possíveis.

[11] Vamos entender **noção** como um "pseudoconceito", parafraseando Vygotsky, no que diz respeito à anterioridade e ligação próxima a conceito. Para Cornu (1983, p. 23-24) parece haver uma certa ambigüidade entre **conceito de limite e noção de limite.**

[12] No Capítulo 1, item 1.3.2, falamos sobre esse modo de reflexão usado em nossa pesquisa histórico-epistemológica.

[13] *Conhecimento* como considerado no MTCS (Capítulo 3).

Portanto, é mais aceitável dizer, a nosso ver, que essas outras noções (embora diferentes) possam, com nossa leitura, estar "próximas" da noção de limite, do que dizer que sejam "*premissas da noção de limite*" (cf. Cornu, 1983, p. 41).

Cornu enriquece sua pesquisa, ao estabelecer e investigar com os estudantes o que denomina de ***concepções espontâneas e concepções próprias***. Por *concepções espontâneas* trata as idéias que um sujeito tem a priori, antes de uma organização pelo ensino e aprendizagem. E, por *concepções próprias*, as concepções pessoais que os alunos formam tanto das concepções espontâneas quanto a partir do ensino, e que, como ele mesmo diz, são análogas à *imagem conceitual* tomadas por Tall & Vinner. Sua investigação analisa essas concepções, utilizando problemas propostos aos alunos, nos quais procura explorar expressões particulares referentes ao estudo de limite, como "tende na direção de" (*tend vers*) e a palavra "limite". Essa parte de seu trabalho foi particularmente interessante para nós, ao refletirmos sobre as enunciações feitas envolvendo o que chamamos de *estipulado de limite*,[14] tanto nas observações em sala de aula de Cálculo como nas entrevistas.

Bem como Cornu, Wanderley M. Rezende (1994), em sua dissertação de mestrado: *Uma análise histórico-epistêmica da operação de limite*, tendo o mesmo referencial teórico sobre obstáculo epistemológico, defende a idéia de que os obstáculos epistemológicos não apresentam apenas aspectos negativos, mas são também fatores de progresso para o conhecimento da operação de limite. Nessa direção, trabalha com quatro obstáculos epistemológicos que considera básicos, que são: a transposição metafísica, a transposição cinética, a transposição numérica e a reticência ao infinito.

As posições de Rezende são explícitas a respeito do "conhecimento matemático" ser uma <u>construção</u> (uma elaboração humana sujeita a mudanças), feita

[14] No Capítulo 3, falamos dos *Campos Semânticos* que consideramos em relação a um núcleo constituído a partir de *estipulações locais de limite*.

em direções estabelecidas por intervenções que incidem na produção científica e são motivadas por fatores políticos e econômicos. Pensando na produção matemática, podemos dizer que, dentre os diversos motivos sociais envolvidos nesta produção, esses fatores têm realmente peso. E que, mais especificamente dentro da demanda que impõem ao sujeito produtor (matemático ou não), temos como destaque o fator subjetivo do poder explanatório desse sujeito.

3.2.3 Uma análise do pensamento diferencial: em Cabral e Cassol

A dissertação de mestrado de Tânia B. Cabral (1992), *Vicissitudes da Aprendizagem em um curso de Cálculo*, tem uma direção epistemológica ao promover análises a respeito da formação do que denomina de *pensamento diferencial*,[15] envolvendo a produção de significados. Embora, em primeiro plano, tenha uma articulação e interesse próprios com uma proposta didático-pedagógica (*Assimilação Solidária* - AS),[16] *visando a expor uma compreensão das dificuldades* especiais existentes no processo de aprendizagem de alunos em uma sala de aula de Cálculo. Com esse objetivo, a pesquisadora participou, regularmente durante um ano, como observadora do ensino em uma turma de Cálculo I para Licencietura e Bacharelado em Matemática, tendo paralelamente acompanhado um grupo de alunos (da mesma turma) com dificuldades especiais em Cálculo I, os quais desenvolveram um trabalho ("ensino remedial") em sessões noturnas.

Em meio às compreensões e produções dos alunos em sala de aula, devido a AS adotada, Cabral considerou importante investigar o *tempo de trabalho produtivo* e o *tempo de trabalho socialmente necessário* ao ensino e aprendizagem, para estabelecer

[15] Segundo essa autora, o ***pensamento diferencial*** congrega a noção de função relacionada a um pensamento algébrico e geométrico que permite a aprendizagem do aluno em Cálculo.

[16] Assimilação Solidária é tida como "*uma metodologia alternativa ao ensino tradicional, fundada na medida do tempo de trabalho produtivo como critério de aprovação*". Para melhores referências, ver Baldino, Cabral & Barbosa (1991).

uma comparação baseada entre o tempo institucional e o tempo didático (conforme Chevallard).

Nesse trabalho, os aspectos teóricos epistemológicos sobre a produção de significado são fundamentados na *teoria do valor signo* de Baudrillard e relacionados às teses de Althusser, quanto às práticas sociais e à ideologia no estudo das suas condições de produção.

> *A ideologia, nos termos de Altusser, ou trabalho de significação, nos termos de Baudrillard, permitem que analisemos as vicissitudes do aluno como uma das formas que comparecem no jogo de que toma parte, qual seja, valorizar a mercadoria de que dispõe: sua força de trabalho* (Cabral, 1992, apresentação do v. Delta).

As conclusões, quanto aos significados, são então construídas na prática educativa. Sobre isso, a pesquisadora afirma:

> *O significado do querer declarado dos alunos, a aceitação do novo jogo em nível do discurso oral, corrobora a construção do código profissional, enquanto os significados de suas ações, vistas por nós como séries de acontecimentos discursivos, corroboram a construção dos códigos familiar e escolar* (op.cit., v. Delta, p. 161).

Os dados recolhidos do trabalho de campo foram obtidos por meio das técnicas de entrevistas, observação participante e uso do diário de campo. Juntamente com esses dados, a cada relato das sessões, a pesquisadora inclui o que denomina de uma "proto-análise", na qual faz um exame dos acontecimentos (falas dos alunos e do professor, as reações em nível psicológico, pessoais, os encaminhamentos dos grupos de trabalho e do grupão e as estratégias dos alunos e do professor).

Nas conclusões finais, procede a uma análise global de todo o processo vivenciado.

Tanto nas proto-análises, quanto na análise mais global, observa-se o uso de uma análise criteriosa, com descrição meticulosa e com inferências pessoais de interpretações a respeito das dificuldades de compreensão dos alunos. Essas pontuações realçam principalmente questões psicológicas (cognitivas e afetivas) envolvidas nas dificuldades e nos conflitos do ensino e da aprendizagem de Cálculo.

Entre as considerações finais do seu trabalho, como primeira proposta de continuação da pesquisa, está o investimento em psicanálise para abordar a questão do "*desejo*".[17] Como segunda proposta: "... *continuar o estudo da formação do pensamento diferencial, como articulação de campos semânticos* ..."

A respeito dessa segunda proposta, podemos dizer que, de certo modo, procuramos contemplá-la no decorrer de nossa pesquisa, ao estudarmos a constituição de alguns significados e objetos a partir do Cálculo.

A dissertação de mestrado de Cassol (1997): *Produção de significados para a derivada*, tendo por base uma análise de significados para derivada, tem maior proximidade de nossa pesquisa, em termos tanto dos fundamentos teóricos epistemológicos _ centrados no Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) _, quanto dos procedimentos metodológicos.

Segundo esse autor, o MTCS foi adotado por corresponder à sua própria forma de analisar o ensino e aprendizagem no que concerne à ênfase dada ao pensar do aluno.

Após uma exposição do MTCS, Cassol passa à análise dos significados produzidos pelos alunos para derivada, considerando cinco campos semânticos: o "*Campo Semântico da Variação Instantânea (CSVI): derivada como taxa de variação instantânea*", o "*Campo Semântico do Limite (CSL): derivada como um limite*", o "*Campo Semântico da Declividade:*

[17] A linha de psicanálise lacaniana é a citada pela autora que, desde 1990, iniciou seus estudos sobre a experiência analítica lacaniana. Podemos dizer que sua pesquisa tem em Lacan uma base teórica, pois são feitas várias referências aos trabalhos e conceitos fundamentais de Lacan. Em janeiro de 1998, como resultado das reflexões de Cabral sobre a conexão Educação Matemática - Psicanálise, temos sua tese de doutorado: "*Contribuições da Pscanálise à Educação Matemática: a lógica da intervenção nos processos de aprendizagem*".

derivada como declividade", o "*Campo Semântico da Velocidade (CSV): derivada como medida de variação*", e o "*Campo Semântico do Formulário (CSF): derivada como resultado de uma fórmula*".

Essa análise é feita por uma metodologia qualitativa, abrangendo as seguintes fontes: 1. *teste de sondagem* _ aplicado a alunos que já haviam cursado recentemente a disciplina (38 alunos de graduação e 21 do curso de especialização) _; 2. *entrevistas gravadas* _ com doze alunos selecionados no teste de sondagem, em duplas ou individualmente, através de perguntas semi-elaboradas _; 3. *atividades de ensino* _ observações (escritas ou gravadas, pelo pesquisador, em sala de aula) _.

O teste de sondagem, por ser composto de cinco questões desdobradas em subitens e ter sido aplicado em muitos alunos, constitui-se em um volumoso material para exame.

Por exemplo, a primeira questão consta de:

1. Abaixo você tem um conjunto de afirmações sobre derivadas. Diga quais são as que você julga corretas e quais julga incorretas. Solicita-se cuidado especial em justificar as respostas.

1.1 - Derivada de uma função f num ponto a é a reta tangente ao gráfico de f neste ponto.

correta ☐ *incorreta* ☐

Justificação:

1.2 - Derivada de uma função no ponto a é o $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

correta ☐ *incorreta* ☐

Justificação:

1.3 - *A derivada de uma função num ponto* $x = x_1$ *é* $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

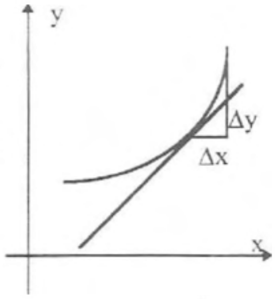
correta ☐ *incorreta* ☐

Justificação:

1.4 - O valor da derivada da função f é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f, nos pontos onde existe tengente ao gráfico de f:

correta ☐ *incorreta* ☐

Justificação:



1.5 - A derivada de y = f(x) é a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *, onde* Δy *e* Δx *são os acréscimos das variáveis dependente e independente, respectivamente.*

correta ☐ *incorreta* ☐

Justificação:

1.6 - A derivada mede a variação média da quantidade representada pela variável dependente de uma função em relação à quantidade representada pela variável independente;

correta ☐ *incorreta* ☐

Justificação:

1.7 - A derivada mede a variação instantânea da quantidade representada pela variável dependente em realção àquela representada pela variável independente;

correta ☐ *incorreta* ☐

Justificação:

O tipo de análise feita, demonstrada no corpo do trabalho para a primeira e segunda questão, indica que Cassol, além de proceder a uma distribuição percentual, segundo as respostas dos alunos de forma: *correta, incorreta, sem respostas, justificação*, conforme consta de um quadro à página 106, também analisou essas respostas, dispensando atenção especial às justificações.

A parte de descrição e análises das atividades dos alunos, incluindo essa dos testes de sondagem, que constam nos Capítulos 3, 4 e 5, é fértil em contribuições e observações para professores que lidam com ensino e apredizagem de "derivada" e para pesquisadores que, como nós, se interessam pela produção de conhecimento e investigação do pensamento diferencial. Por exemplo, a respeito das questões 1.2 e 1.3 (citadas), entre outras coisas, encontramos:

> *São 66% dos alunos que julgaram correta a questão 1.2, mas apenas 24% julgaram correta a 1.3. A questão 1.2 está apresentada na forma usual de definição na bibliografia e, por conseqüência, na sala de aula. Enquanto que a definição de derivada*

apresentada na forma 1.3 não é tão freqüente. Isso mostra que não é suficiente dizer que a derivada é um limite, mas é preciso dizer que é um limite posto de determinada forma: a forma expressa na questão 1.2. Esta é que constitui a derivada, não aquela posta na questão 1.3. A presença de D é fator de identificação com derivada. As justificações por desenhos mostram isso.

Em suas conclusões, além dos pontos cruciais ressaltados a respeito das produções de significados para derivada, reforçamos como importante sua constatação a respeito das enunciações dos alunos nas estratégias pedagógicas:

> *... afirmamos que o instrumento que melhores frutos produziu para a aprendizagem da derivada foi a busca incessante de significados declarados para toda afirmação proferida e toda operação executada.*

3.3 ALGUNS TRABALHOS DO GRUPO 5: EPISTEMOLOGIA E CÁLCULO.

Neste item, optamos por uma resenha descritiva de alguns dos trabalhos do Grupo 5, deixando nossas considerações críticas para as consclusões finais deste mesmo item, devido às interseções notadas. A escolha deste grupo foi motivada pela temática: Cálculo e Epistemologia.

O artigo de Williams (1991), *Models of limit held by college Calculus students*, é realtivo a estudos feitos sobre o "*entendimento do conceito de limite*" para dez estudantes, selecionados entre trezentos e quarenta e um, de salas de aula de segundo semestre de Cálculo, mediante um questionário inicial com três questões sobre limite. Após essa seleção, seus procedimentos foram em função de três objetivos: (a) exibir a existência de modelos alternativos ou informais sobre limite entre os estudantes; (b) provocar, por meio de atividades, um estado de "*conflito cognitivo*" que levasse os estudantes a mudarem suas concepções alternativas, de modo que passassem a refletir uma concepção mais formal; (c) documentar os fatores de tal mudança.

Ao iniciar seu artigo, o autor aponta os estudos de pesquisadores (Davis & Vinner, 1986; Tall & Vinner, 1981; Sierpinska 1987; Cornu 1983, entre outros) que confirmam as dificuldades dos estudantes de um completo entendimento do conceito de limite, em que um conceito formal de limite é norteado pela definição formal de limite por épsilon-delta (desde Cauchy).

Em sua fase de pesquisa de sessões de atividades e entrevistas com os alunos (cinco sessões em sete semanas), Williams mostra que existem outros entendimentos adquiridos pelos estudantes já submetidos ao ensino de limite, e que são entendimentos paralelos que geralmente os fazem preterir a definição formal de limite. Diz que, apesar desses entendimentos paralelos ou modelos informais de limite parecerem suficientes aos alunos na resolução da maioria das questões que enfrentam em seus cursos de Cálculo, eles podem "*conduzir a sérios equívocos e interferir na aprendizagem futura*". Mas ele demonstra dificuldades em poder discriminar os estudantes mediante tais modelos ressaltados nas atividades feitas com eles:

> *... os estudantes frequentemente descrevem seus entendimentos de limite em termos de dois ou mais destes modelos informais e são dispostos a aceitar diferentes descrições de limite como válidas. Desde que os conceitos de limite dos estudantes parecem ser amálgamas complexos de idéias informais, é extremamente difícil classificar os estudantes em categorias distintas* (Williams, 1991, p. 225).

Embora também explicite o estudo de algumas "*variações idiossincrássicas*" de modelos de limite, segundo o autor, os dois tipos mais comuns de modelos alternativos construídos (ou *modelos espontâneos de limite*, como denominados por Cornu) e utilizados pelos estudantes pesquisados são caracterizados em: "*limite visto como algo não atingível*" e "*limite visto em um processo dinâmico*", sendo que este segundo modelo descreve um processo de avaliar uma função em diferentes valores cada vez que esses valores estiverem mais próximos de s ($f(x) \to L$ quando $x \to s$) ou descreve um processo mental de imaginar pontos sobre um gráfico movendo-se cada vez mais próximos de um ponto limite (cf. op.cit., p. 228).

Quanto à tentativa de criar conflitos cognitivos que provocassem um abandono de suas *concepções alternativas* e uma mudança conceitual, nem sempre se mostrou bem sucedida, principalmente devido à combinação de fatores que, segundo Williams, dificultam aos estudantes apreciarem a necessidade da definição formal de limite. Dentre esses fatores, os mais influentes são : a crença na verdade matemática, a simplicidade e praticidade dos modelos alternativos de limite, as experiências prévias com gráficos de funções (fazendo com que tomem gráficos a priori) e as crenças arraigadas na eficácia de seus modelos mentais, perante as demandas nas salas de aula de Cálculo.

Em suas conclusões, está a sugestão de que, para melhorar o entendimento dos estudantes a partir da definição formal de limite, é necessária uma "*instrução cuidadosa e explícita* ", que estime os diversos modelos de limite construídos pelos estudantes bem como os tipos de conhecimento avaliados (como os a priori de gráficos e funções).

O trabalho de White & Mitchelmore (1996), *Conceptual knowledge in introductory Calculus*, fundamentado em sua tese de doutorado, relata a investigação com um grupo de quarenta estudantes de graduação em Matemática, a respeito da aplicação de conceitos quanto a taxas de variação instantânea para resolver problemas aplicados.

O método investigativo baseou-se em dados obtidos em quatro testes aplicados aos estudantes em diferentes ocasiões: antes, durante, ao final, e seis semanas após o curso introdutório de Cálculo por um semestre; e, também, em dados de entrevistas com quatro estudantes de cada um dos dez grupos em que foram divididos. Segundo os autores, as entrevistas serviram para clarear e complementar os dados escritos.

Os problemas dos testes foram construídos de modo que, além de requererem dos estudantes o envolvimento com taxas de variação ou maximização (derivadas), tinham uma diversificação em quatro versões, apresentadas uma de cada vez em cada uma das ocasiões acima mencionadas. Essa diversificação ia de uma versão *A*, na qual os alunos tinham que saber transpor e equacionar todas as razões para um modo simbólico próprio e depois operarem, a outras versões *B*, *C*, e *D*, em que gradualmente as informações das taxas de variação foram cada vez mais sendo dadas em formas simbólicas reconhecidamente prontas para serem operadas.

Por exemplo:

A) Se o lado de um cubo está decrescendo a uma razão de 2 centímetros por minuto, a que razão está contraindo o seu volume quando o volume do cubo é de 64 centímetros cúbicos?

B) Dado que x é decrescente à razão de -2 centímetros por segundo e $V = x^3$, encontre $\frac{dV}{dt}$ quando $V = 64$.

C) Dado $\frac{dx}{dt} = -2$ e $V = x^3$, encontre $\frac{dV}{dt}$ quando $V = 64$.

D) Dado que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, $V = x^3$ e $\frac{dx}{dt} = -2$, encontre $\frac{dV}{dt}$ quando $V = 64$.

Antes de proceder às análises dos dados, os autores fundamentam alguns pontos teóricos básicos. Um deles é que a matemática avançada necessita de conceitos abstratos _ conceitos formados em um processo de "abstração", [18] que é sumarizado por Dreyfus (1991) na seqüência: *generalização* → síntese → *abstração* e, de modo similar, por Sfard (1991) em: *interiorização* → *condensação* → *reificação*. [19] Ainda a

[18] ***Abstração*** tomada como um processo de identificar certas propriedades invariantes em um conjunto de vários dados, no qual as generalizações são sintetizadas a partir desses dados em novas abstrações (cf. Skemp, apud White & Mitchelmore, 1996, p. 80).

[19] A palavra "reificação é uma tradução nossa da palavra inglesa "*reification*", uma vez que não possuímos tradução exata em uma única palavra em português. Convém explicarmos, portanto, que entendemos "reificação" como um processo de "coisificação", transposição de um processo abstrato e dinâmico em um objeto estático (uma "coisa").

esse respeito, de processos e objetos, os autores citam Gray & Tall (1994), ao referirem-se aos "*procepts*" (amálgamas de processos e conceitos em um mesmo símbolo), e falam de sua importância na formação de *conceitos gerais-abstratos*, obtidos nas várias repetições da seqüência *generalização → síntese → abstração*.

Outro ponto é sobre o conhecimento procedimental _ *procedural knowledge* _ como um conhecimento de procedimentos padrões de aprendizagem, que dizem poder ou não estar fundamentado em um *conhecimento conceitual*, [20] e que, caso não esteja, ele nada mais é do que um "*conhecer de regras sem conhecer como elas funcionam*" (White & Mitchelmore, 1996, p. 81).

Ao analisar as resoluções dos problemas pelos estudantes, os autores iniciam por dizer que eles agem de acordo com esses pontos teóricos citados, onde, no primeiro passo, eles necessitam identificar os conceitos apropriados ao contexto do problema e relacioná-los, o que envolve *conhecimentos conceituais* (incluindo os conceitos em Cálculo) e definição de novas variáveis e seus realcionamentos algébricos _ *modelização* _ através da *simbolização*. É nessa parte de definição de novas variáveis, que os estudantes precisam atuar em um alto nível de *generalização*, enquanto na *simbolização* das taxas de variação, dependendo da situção complexa do problema, eles se defrontam com a necessidade de *conceitos gerais-abstratos*. A seguir, até são capazes de operar simbolicamente para escreverem uma solução do problema, mas em um *entendimento superficial* das variáveis envolvidas, que geralmente não lhes permitem usar símbolos para representar conceitos, ou seja, os significados são negligenciados e só restam regras de manipulação algébrica (op.cit., p. 82).

Em suas conclusões e implicações dessa pesquisa, White e Mitchelmore dizem que muitos estudantes parecem ter um *conceito abstrato-particular* (*abstract-apart concept* _ análogo, em nosso entendimento, ao que Cornu denomina de

[20] Conhecimento conceitual: conhecimento que envolve uma definição conceitual ? Vejam nossas observações a respeito, na exposição da linha cognitivista de D. Tall, anteriormente, no item 2.2.

concepções espontâneas e Tall de *concepções próprias* _[21]) capaz de bloquear sua aprendizagem significativa. Incluem como pré-requisito ao estudo de Cálculo um *conceito geral-abstrato* de variável, que poderia ser desenvolvido em um curso de pré-Cálculo, em nível universitário.

O artigo de Aspinwall et al. (1997),[22] *Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative*, baseado no trabalho de tese de doutorado de Aspinwall, centra-se no papel exercido pela visualização no entendimento dos estudantes em cursos de Cálculo.

Depois de citar uma ampla literatura a respeito dos benefícios ou obstáculos do poder da visualização, referenciados em autores como Tall & Vinner, Presmeg, Clements & Kaput, Janvier, Radatz, Krutetskii e outros, dizem:

> ...*enormes* ***diversidades*** [grifo nosso] *existem não somente na capacidade individual de formar imagens (Barlett, 1977; Kosslyn, 1980), mas também no uso das imagens visuais quando indivíduos diferentes fazem Matemática (Presmeg, 1985)* (Aspinwall et al., 1997, p. 303).

Entre as possíveis diferenças individuais, destacam o aspecto da *controlabilidade* (*controllability*) das imagens usadas pelos indivíduos, exemplificando com o estudo de um caso, descrito em um trabalho de Presmeg (1992),[23] em que um estudante de segundo grau tem como imagem típica de parábola sempre uma parábola centrada sobre o eixo-y, tornando-se para ele um obstáculo ao trabalhar com parábolas que não têm esse comportamento. Tais imagens, dizem, parecem ser

---

[21] Conforme constatamos nos trabalhos citados desses autores, item 3.2.

[22] Este artigo tem como autores responsáveis: Leslie Aspinwall, Kenneth L. Shaw e Norma C. Presmeg, e está baseado na tese de doutorado de Aspinwall, defendida em 1994, na Florida State University, sob orientação de Shaw.

[23] Segundo bibliografia do artigo de Aspinwall et al. (1997): Presmeg, N.C.. *Prototipes, metaphors, metonymies and imaginative racionality in high school Mmathematics*. ***Educational Studies in Mathematics***, v. 23, p. 295-610, 1992.

incontroláveis quanto ao seu aparecimento no pensamento do estudante, elas estão além de sua vontade inerente à cognição.

A metodologia usada pelos autores desse artigo é o estudo de caso que, segundo eles, pode ser visto como uma derivação do método de entrevistas clínicas de Piaget. O entrevistado é um estudante de Cálculo III, Tim, de um curso de Engenharia de Sistemas que, após cursar um ano de Cálculo, colabora com a pesquisadora L. Aspinwall (sua professora em Cálculo III) e os demais pesquisadores. O objetivo é investigar as respostas desse estudante ligadas às tarefas matemáticas em Cálculo, visando a estudar o uso que ele faz das conexões entre as representações gráficas de funções (suas imagens pessoais) e de suas funções derivadas, ou, mais amplamente, o papel que desempenham as imagens na aprendizagem de Tim.

Nesse sentido, os problemas propostos a Tim, com excessão dos primeiros, foram elaborados após análises de suas respostas a esses primeiros problemas e das análises de suas respostas durante as entrevistas dos pesquisadores sobre estas tarefas. Esses problemas eram de tipo não usual (não rotineiros), para os quais Tim tinha que explicar seu processo de pensar.

Ao analisar os modos de pensar de Tim, os pesquisadores consideram os seguintes aspectos definidos anteriormente por Krutetskii: 1. *analítico* _ no qual há predominância de um componente cognitivo *lógico-verbal* forte sobre um componente cognitivo fraco de *representação-visual* ("*visual-pictonal*") _; 2. *geométrico* _ com predominância do componente forte de *representação-visual* sobre um médio componente *lógico-verbal* _; 3. *harmônico* _ forte componente *lógico-verbal* e forte componente de *representação-visual*, bons conceitos espaciais _. Com base nesse estudo de Krutetskii da estrutura das capacidades matemáticas, confirmam que a capacidade visual de Tim pode representar um obstáculo para ele.

Dentre os resultados das análises dos pesquisadores, estão:

_ O entendimento matemático simbólico de Tim, testado em problemas em que deveria encontrar a derivada para determinadas funções, foi satisfatório. Em suas palavras: "*Tim era adepto a aplicar regras para determinar derivadas em situações variadas*" (Aspinwall et al., 1997, p. 309).

_ O pensar de Tim demonstrado nas entrevistas é análogo ao tipo *harmônico* de Krutetskii, pois tendia a empregar tanto o *lógico-verbal* quanto a *representação-visual* . Isso foi percebido em suas construções, envolvendo função derivada, que eram sintetizadas tanto em representações algébricas quanto gráficas, e no modo como facilmente transladava de uma a outra.

_ Tim experiencia imagens dinâmicas e abstratas que o auxiliam a produzir um bom nível de funcionamento matemático, até mesmo com respeito às suas memorizações de fórmulas. Entretanto, ocasionalmente, as imagens dinâmicas tornam-se incontroláveis para Tim, o que resulta em imagens mentais que mais obliteram o entendimento que o facilitam, conforme constatado, pelos pesquisadores, no caso da derivada de $y = x^2$, em que ele demonstra um conflito cognitivo entre a declividade gradual que constata através de $y = 2x$, simbolicamente como uma reta, e a imagem gráfica de $y = x^2$, a partir da qual interpreta que a inclinação da parábola, à medida que cresce, e para ele torna-se "vertical", parece ter comportamento diferenciado em relação à parte próxima da origem dos eixos em que o crescimento é lento. Tim mostra-se completamente inseguro na comparação da função $y = x^2$ e sua derivada $y = 2x$, com as informações gráficas que infere.

Entre as conclusões, os autores destacam:

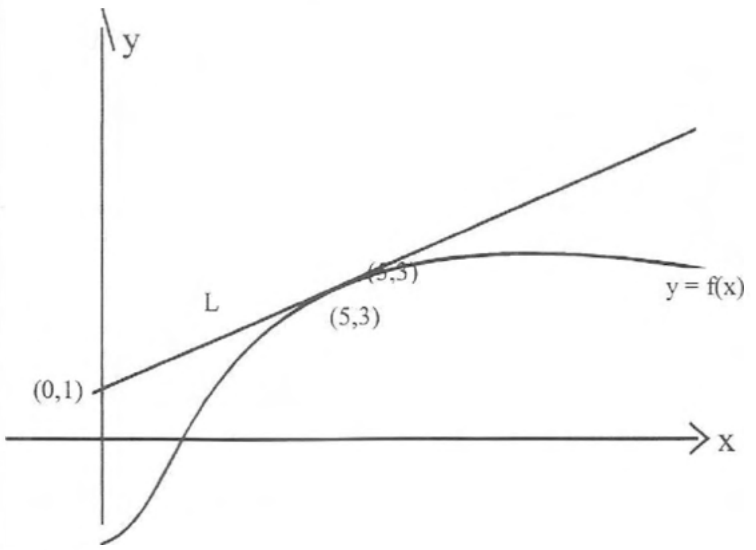
_ Embora muitos cursos tenham o propósito de enfatizar uma abordagem gráfica para a aprendizagem em Cálculo, e autores de livros textos proponham mais gráficos baseados na tese de que o entendimento conceitual dos estudantes aumenta quando gráficos são usados e imagens correspondentes são invocadas, nós precisamos concientizar-nos de que problemas podem ocorrer, de que imagens dinâmicas, invocadas pelos gráficos em Cálculo, podem criar um impedimento ao entendimento matemático.

_ A sugestão não é de abandono desse processo de uso de imagens, mas atenção por parte dos educadores quanto à possibilidade de causar dificuldades em vez de somente benefícios.

O artigo de Amit & Vinner (1990), *Some misconceptions in Calculus: anecdotes or the Tip of an iceberg?*, nos traz uma análise epistemológica do entendimento conceitual de derivada por alunos que passaram por um curso de Cálculo. Baseados em um "*estudo de caso de um questionário*" respondido por um estudante, a pesquisa torna-se um conjunto mais amplo de análises em função das especulações vividas pelos pesquisadores enquanto professores de Cálculo, *levando-os a afirmar que as interpretações feitas são sintomáticas e a "ponta de um iceberg"*, no entendimento do pensar matemático avançado dos estudantes nesta disciplina. Em suas palavras (tradução nossa):

> *Embora declaremos nossas hipóteses como especulações estas não são de modo algum desligadas da prática. Elas têm forte suporte em nossa experiência como professores de Cálculo.[...] Alguns leitores podem considerar isso uma informação anedótica. Acreditamos que é sintomático e é somente o topo de um iceberg* (op.cit., p.5).

O questionário respondido pelo estudante "Ron" (aluno da Ben-Gurion University, final do primeiro ano de economia), após ter tido Cálculo tanto no ciclo anterior à universidade quanto no primeiro ano universitário, contém duas questões:



1. A linha L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (5,3).

A. Encontre f(5).

B. Encontre f ' (5).

C. Qual é o valor da função f(x) em x = 5,08
(o mais aproximado possível).

2. *A. O que é uma derivada? Defina ou explique como desejar.*

B. O que significa que a derivada de $f(x) = x^2$ é 2x ?

C. Usando somente uma calculadora, você pode sugerir um método para calcular um valor aproximado da derivada de 4^x em x = 2 ?

Por favor explique e justifique todo passo de sua solução.

As soluções de Rom foram:

1A. O valor da função em 5 é 3. Explicação: (5,3) é o ponto de tangência.

1B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-0} = \frac{2}{5} = tg\alpha$

Explicação: A derivada em x=5 é a declividade da tangente da função y = f(x) neste ponto.

1C. $y - y_0 = \frac{2}{5}(x - x_0)$

$y - 3 = \frac{2}{5}(x - 5)$

$y - 3 = \frac{2}{5}x - 2$

$y = \frac{2}{5}x + 1$ *Esta é a equação da tangente em (5,3).*

Agora encontraremos a integral (a função primitiva).

$F(x) = \int (\frac{2}{5})x + 1\, dx = \frac{(2/5)x^2}{2} + x + c = \frac{1}{5}x^2 + x$

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$

$f(5 + 0{,}08) = \frac{1}{5}5^2 + 5 + (\frac{2}{5}5 + 1)\ 0.08.$

Explicação: Usando a declividade da tangente, encontramos a equação da tangente em (5,3). Por meio disto nós encontramos a integral (a função primitiva) e por aproximação linear (Taylor), aproximação de primeira ordem, encontramos uma aproximação do valor da função em x = 5,08.

2A. A derivada é a declividade da tangente ao gráfico em um certo ponto. Isto é a derivada em um certo ponto. Falando de modo geral, ela é a dclividade da tangente ao gráfico (a tangente do ângulo de inclinação).

2B. Isso significa que a declividade da tangente para a função x^2 é 2x. Por exemplo em x = 2, y = 4 a declividade da tangente é y ' = 2.2 = 4.

2C. $\lim_{h\to 0} \frac{4^{x+h} - 4^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4^x 4^h - 4^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{16 4^h - 16}{h}$

Explicação: $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$, $y = 4^x$, $y' = 4^x \ln a$.

Das análises e conclusões dos autores, destacamos:

_ As respostas de Rom às questões 2B e 2C, se olhadas pelo conceito de derivada como "declividade da tangente ao gráfico em um certo ponto", como Rom diz, juntamente com seus cálculos, dão a impressão de que seu conceito de derivada é satisfatório. Mas, por 1C, pode-se ver que o modo de explicar ao estudante a derivada através de um desenho típico (parecido com o da questão 1) onde somente uma tangente é desenhada, pode fazê-lo considerar a derivada como a equação desta tangente (particular), trocando o conceito por esta imagem.

Os autores afirmam que essa idéia foi expressa por vários outros estudantes em diferentes ocasiões, durante as atividades em sala e na resposta a essa mesma questão.

_ A resposta 1C vem da equação da tangente ($y = \frac{2}{5}x + 1$), tratada como se fosse a derivada de f(x). Note-se aqui o uso comum (por muitos livros textos, *estudantes e professores) da letra F (maiúscula) para primitiva*, e o "*uso de passos arbitrários que facilitem a situação e dê a solução de acordo com planos originais*", como tomar a constante de integração igual a zero, que é um fenômeno típico entre os estudantes.

_ Os algoritmos e fórmulas algébricas são geralmente conhecidos quando se trata de calcular a função ou derivada em um certo ponto.

_ Explicitamente, mesmo em entrevistas, Rom demonstra conhecer a definição de derivada, como o fez em 2A e 2C. Isso torna difícil explicar e evidenciar o conflito de Rom, como visto em 1C.

_ Pode-se considerar o pensar de Rom, principalmente em 1C, como um conceito errôneo proveniente de formações lingüísticas incompletas ou mesmo erradas. Por exemplo, quando o professor diz "*a derivada*" ao invés de "*a derivada de uma função*" , ou "*é a tangente*" no lugar de "*é a declividade da tangente*", ou ainda "*tangente da função*" ao invés de "*tangente ao gráfico da função*". Assim, para um número grande de estudantes, encontramos como definição: "*a derivada é a tangente para a função em um certo ponto*", em que "*...certo ponto*" tem a conotação de ponto fixo quando associado a um imagem para derivada, ou seja, quando o estudante refere-se à "*tangente*" como uma entidade geométrica, e não de modo algébrico.

_Essas concepções errôneas dos conceitos precisam ser detectadas, pois não impedem os estudantes de serem aprovados em Cálculo, embora sofram conseqüências desastrosas em entendimentos e aplicações de conceitos, como velocidade, taxa de variação e valores marginais.

O artigo de Baldino, Ciani & Leal (1997), *Can the average student learn analysis?*, embora relate a tentativa de aprendizagem em Análise de três estudantes, sendo uma da graduação em Matemática e duas da Pós-Graduação em Educação Matemática, *refere-se de modo especial à definição de limite, que também é assunto* de interesse em Cálculo. Como os próprios autores consideram, é um *estudo de caso sob uma abordagem de pesquisa-ação.*

Como fundamentos teóricos, os pesquisadores usam a seguinte conceitualização: *imagem conceitual, definição conceitual, fatores de conflito* (Tall & Vinner, 1981); *processo, conceito, proceito, ambiguidade produto-processo, encapsulação* (Gray & Tall, 1994).

A pesquisa é desenvolvida com a participação de um professor, R.R. Baldino, em sessões de três horas semanais durante um ano letivo. Em negociação com o grupo, a linha metodológica e as estratégias didáticas de trabalho em grupo foram *estabelecidas. O assunto principal foi escolhido pelos estudantes:* "*construção dos números reais* ". O professor sugeriu a abordagem pelas seqüências de Cauchy, encorajando o trabalho com "epsilons e deltas". A partir daí, grande parte da atenção foi despendida à definição básica de limite.

As sessões foram relatadas e muitas delas discutidas, usando-se as gravações feitas em vídeo. Segundo os autores desta pesquisa: "*o modo do professor conduzir as sessões, as oportunidades, as intenções e efeitos de suas intervenções foram analisados e ajustados durante o ano*" (op. cit., p. 34).

A <u>nova estratégia didática traçada</u> _ Os autores iniciam dizendo que os estudantes pesquisados foram expostos tanto à "*definição intuitiva*" de limite em seus cursos de Cálculo, como à "*definição formal*" nos cursos de Análise, mas que eles tentavam, na verdade, aprender a definição pela repetição rotineira, sem entender os conceitos subjacentes, ignorando a busca de transição entre a *imagem conceitual* e *a definição conceitual* construídas, e que, portanto, agora deviam proceder de outro modo.

Antecederam essa decisão de mudança algumas sessões em que o professor provocou um "*fator de conflito potencial*" (Tall & Vinner, 1981) junto aos alunos, usando a contradição entre suas *imagens conceituais* (sobre limite de seqüências e convergência) e suas frases referentes à *definição conceitual*. Contudo, os efeitos não puderam ser considerados positivos. Eles afirmam (tradução nossa):

> *O professor fez um esforço para enfatizar o papel das definições em Matemática, mas sua tentativa foi repelida. Os estudantes manifestaram sua concepção de "definição" como uma "descrição completa" de um objeto. Para eles a definição de limite era simplesmente entendida por aquilo que fazia a idéia de limite "mais precisa"* (Baldino, Ciani & Leal, 1997, p. 36).

E questionam:"*Como fazer a imagem de definição conceitual forte o bastante para que adquira o poder de retificar todo o conjunto de imagem conceitual?*"

Eles denominam a estratégia antiga de "*estratégia didática de continuidade*" e a nova de "*estratégia didática : 1/n XPTO 0*". As principais caracteristicas da nova estratégia são:

_ Redefinir o modo de pensar em limite como processo (*process*) e produto (*product*). Para isso, chamando de definição conceitual a forma verbal usada para especificar o conceito, redefinem o processo como "*a seqüência de inferências necessárias para se proceder com a forma das palavras usadas na especificação do conceito de limite*", e o produto como "*a demonstração*" (no caso de limite, identificado ao discurso e-d do cálculo proposicional).

_ Centrar-se em *alcançar o proceito (procep) de limite ao lado da definição conceitual*.

_ Adotar um nome para a definição conceitual, tendo em conta que o simbolo $lim\ a_n = L$ evocava nos alunos a imagem conceitual da idéia de "tendência" . Para tanto, foi escolhido o símbolo XPTO, feita a definição e proposto o seguinte exercício:

"a_n *XPTO L significa* $\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ (n > N \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$. *Mostrar que* $\frac{1}{n}$ *XPTO 0*".

Onde XPTO não é um novo símbolo para limite, mas um nome (símbolo) para a definição, que deve ser usado pelo menos "*enquanto a definição conceitual não é forte o suficiente para governar a imagem conceitual* " (op.cit., p. 37).

Entre os resultados e discussões finais, salientamos:

_ O professor conseguiu conduzir, integrados na nova estratégia, os estudantes a completarem provas formais de exercícios do curso de Análise.

_ O XPTO trabalhado tornou-se mais que um símbolo para a definição ε-δ, marcou de modo afetivo os estudantes após a apresentação em uma sessão de poster de um "work-shop" para estudantes na universidade, ao ouvirem falar do XPTO como "*um novo símbolo desnecessário para limite*". Diante de tais atitudes tomadas por membros da universidade (professores inclusive), em avaliação posterior, disseram (tradução nossa):

> *Eles olhavam irritados para o XPTO. Parece que eles não querem levar em conta que estudantes seus tenham dificuldade em Análise.* [...] *Se nossa estratégia funcionar, eles serão obrigados a usá-la . Isto é uma ameaça a seus velhos hábitos* (op.cit., p.37).

3.3.1 Conclusões sobre o item 3.3

Procuraremos apontar o que encontramos de positivo e adequado nas revisões que destacamos neste item e o que ainda notamos prescindir.

Primeiro, de modo geral, esses trabalhos citados, por considerarem não só as idéias dos alunos, mas suas próprias falas transcritas, são ricas fontes de pesquisa e orientações relacionadas a problemas no campo epistemológico, tanto de constituição do *pensar matemático avançado* como das dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Como dizem Baldino & Cabral (1997, p. 2):

> *A relação entre a dificuldade de ensinar e construir estratégias é praticamente direta: tanto mais vasto é o campo das dificuldades levantadas, tanto mais amplo será o campo de estratégias para com elas poder lidar. As estratégias formuladas na literatura repousam em idéias de aprendizagem ativa e aprendizagem significativa e, para alcançar este escopo, lança-se mão de: reforçar o uso de intuições e metáforas, construir novos softwares, trabalhar com manipulações simbólicas, elaborar engenharia didática, usar mapas cognitivos, resolução de problemas, modelagem, entre outros.*

Segundo, mais especificamente notamos:

- Em relação aos fundamentos teóricos epistemológicos, os autores, em maior ou menor intensidade, têm muitas de suas referências a partir da noção de "*conceito*". Em Williams, temos: "*entendimento de conceitos*", "*conceito formal de limite*"; em White & Mictchelmore: "*conhecimento conceitual*", "*conceitos formados em um processo de abstração*", "*conceito geral abstrato*", "*conceito abstrato particular*" ; em Aspinwall et al.: "*entendimento conceitual*", "*conceitos espaciais*"; em Amit & Vinner: "*entendimento coceitual*", "*concepções errôneas dos conceitos*"; em Baldino, Ciani & Leal: "*imagem conceitual*","*definição conceitual*", "*proceito [processo + conceito]* ".

Além disso, para Willians, por exemplo, o entendimento *do conceito de limite* só é alcançado pelo estudante, quando ele entende a definição rigorosa por ε-δ (cf. Williams, 1991, p. 219). Fora esse, ele denomina os entendimentos como sendo "*entendimentos paralelos ou modelos informais de limite*", ou ainda "*conceito de limite dos estudantes*".

A "*definição conceitual*" é desse modo uma parte crucial do *conceito*, assim como para os autores que se referem à terminologia e concepção de *conceito* como compreendendo uma "*imagem conceitual* " e uma "*definição conceitual*" (cf. Tall & Vinner, 1981).

• Embora os autores falem de acordo com seus fundamentos teóricos, eles *relatam a ocorrência de mais de um modo de produção de significado para uma* determinada noção matemática ensinada ou aprendida em Cálculo. Podemos notar isso nas seguintes afirmações [traduções e negritos nossos]:

_ Em Williams (1991, p. 225):"*Os dados apresentados aqui, provenientes das entrevistas, concebem dois modelos de limite: aquele no qual limite é visto como não atingível e aquele no qual uma visão dinâmica é evidente.*"

Ou ainda (op. cit., p. 235): "*Tudo isso sugere que a melhora do entendimento dos estudantes a respeito de limite proveniente de um ponto de vista fomal, requer cuidado e instrução explícita, o que explica a rica variedade de modelos de limite que os estudantes constróem em sala de aula bem como os tipos de conhecimentos que eles validam*".

_ Em White & Mitchelmore (1996, p. 82): "*... o significado requerido é freqüentemente negligenciado no ensino e aprendizagem de álgebra, assim muitos estudantes somente aprendem a manipular regras sem referência ao significado da expressão que está sendo manipulada*".

_ Em Aspinwall et al. (1997, p. 306): "*... estas descrições detalharão a extensão do entendimento visual de Tim e a extensão em que emprega os modos analíticos de pensar*".

(op.cit., p. 309): "*Tim revelou seu pensar visual nesta tarefa. Ele trabalhou por 10 segundos e não mostrou nenhuma evidência de ter transladado do gráfico para a representação simbólica*".

(op.cit., p. 313): "... ele [o estudante Tim] estava inseguro em como comparar a função, y = x^2, *e sua derivada, y ' = 2x, com a mesma informação apresentada graficamente* ".

(op.cit., p. 314) "*Sua [de Tim] construção gráfica para a função derivada era freqüentemente forte o bastante para que ele transladasse alternando entre as representações gráficas e entre as representações algébricas e gráficas*".

_ Em Amit & Vinner (1990, p. 8): "*... existe uma tendência bem conhecida em cognição de que imagens visuais substituem conceitos, e na imagem visual somente uma tangente é desenhada, esta tangente pode substituir a derivada. A derivada será considerada como a equação desta tangente*".

(op.cit., p. 10): "*...quando dizemos 'tangente' você pode estar se referindo ou à entidade geométrica ou à entidade algébrica - a equação da tangente*".

_ Em Baldino, Ciani & Leal (1997, p. 37): "*Precisamente, de acordo com a ambigüidade velha, o uso do símbolo 'lim 1/n = 0' significa ou um processo de tendência ou um valor final. A ambigüidade nova consiste em usar este símbolo para significar, ou que para todo epsilon podemos encontrar um N (o processo), ou que a proposição 'lim 1/n = 0' é verdadeira, isto é, pode ser sustentada (por um discurso epsilontico) no forum da comunidade matemática (produto).*" [...]

"a_n *XPTO L significa* $\forall\varepsilon\ \exists\varepsilon\ \forall n\ (n>N \rightarrow | a_n - L| < \varepsilon$. [...] É necessário salientar que XPTO não é um símbolo novo para limite, é um símbolo novo para a definição, não um nume para limite. É um significado temporário a ser usado...".

• Para nós as diferenças entre os processos e os conceitos, e seu amálgama (*procepts*) embora sejam ricas fontes de reflexão cognitiva, não têm ainda relações diretas com os modos de produção de significados e conhecimento em meio às atividades em sala de aula de Cálculo. Talvez um avançar dos estudos na direção do que Barnard & Tall (1997) chamam de *unidade cognitiva* (*cognitive unit*) contribua mais próximamente para as reflexões das questões que nos preocupam e possam servir de base teórica a pesquisas futuras. Por enquanto, a idéia de *unidade cognitiva*:

> *...é uma peça da estrutura cognitiva que permanece no foco de atenção por um tempo [...] pode ser um símbolo, um fato específico como '3+4 é 7', um fato geral como 'a soma de dois números pares é par', [...]um teorema [...], e assim por diante. [...] o que é uma unidade cognitiva para um indivíduo pode não ser uma unidade cognitiva para outro* (op. cit., p. 41).

Nessa direção epistemológica, lembramos que, Vygotsky promove um elo entre a *unidade psicológica* (afetiva+cognitiva) de análise do comportamento humano _ o *significado* _ e a *unidade do pensamento verbal* no significado das palavras:

> *... é no significado da palavra que o pensamento e a fala se unem em pensamento verbal. É no significado, então que podemos encontrar as respostas às nossas questões sobre a relação entre o pensamento e a fala* (Vygotsky, 1995, p.4).

Capítulo 4

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

4.1 INTRODUÇÃO

Conforme dissemos nos direcionamentos e posicionamentos iniciais deste trabalho, a base de nossa pesquisa está na investigação epistemológica da produção de determinados significados a partir do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Por isso, olhamos para modelos epistemológicos que nos permitissem uma maior proximidade do processo de produção de significados. O ***Modelo Teórico dos Campos Semânticos*** (**MTCS**) é um modelo assim pautado desde sua gênese.

Dedicamos a primeira parte deste capítulo ao **MTCS**, uma vez que tomamos como um de nossos objetivos mostrar a sua adequacidade como modelo teórico básico a esta pesquisa. Portanto, além de ser nosso referencial mais relevante, também torna-se elemento de investigação.

Na segunda parte, fazemos uma incursão às teorias de Lev Semionovich Vygotsky, Mikhail Bakhtin e Jerome Bruner, que são autores que mostram preocupações com a produção de significados e se compatibilizam em vários pontos relacionados ao MTCS.

4.2 O MODELO TEÓRICO

Este modelo começou a ser concebido por R.C. Lins a partir de sua tese de doutoramento em Educação Matemática — *A framework for understanding what algebraic thinking is* — concluída na University of Nottingham (UK) em 1992, na qual constrói, do ponto de vista epistemológico, uma caracterização para "*pensamento algébrico*" e mostra que esta caracterização é adequada examinando as atividades de estudantes frente a resolução de determinados problemas. Ao mesmo tempo esta caracterização do "*pensamento algébrico*" proporciona um entendimento do desenvolvimento histórico da Álgebra, ao qual encontramos dedicação de uma parte da tese. Segundo Lins (1992, p. 65):

> *As averiguações de nossa pesquisa histórica ajudarão a estabelecer simultaneamente o caráter cultural do desenvolvimento de um conhecimento algébrico e do desenvolvimento de um modo algébrico de pensar.*

Nos Anais do XVIII PME (Lisboa, 1994), ele publicou o artigo *Eliciting the meanings for algebra produced by students: knowledge, justifications and semantic fields*, no qual já discute alguns dos aspectos do referido modelo epistemológico.

Em junho de 1994, publicou na revista *Dynamis* (Blumenau, v.1, n.7) o primeiro artigo enfatizando o modelo, entitulado: *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da Álgebra e do pensamento algébrico.* Desde então, esse modelo tem sido implementado e divulgado por seu autor.

A seguir passamos a descrever e comentar sobre alguns aspectos e características epistemológicas do MTCS julgadas importantes do nosso ponto de vista e para esta pesquisa.

Um aspecto de destaque no MTCS é o tratamento dispensado ao que se refere a ***conhecimento***. Diferentemente de outras teorias epistemológicas (ou teorias do conhecimento) que falam sobre a natureza do conhecimento, sobre tipos de conhecimento, sobre o processo de conhecer e de várias outras coisas significantes em relação a conhecimento,[1] chegando ou não a falar de modo difuso o que é, afinal, conhecimento, o MTCS propõe, entre seus pontos centrais, uma definição:

conhecimento = (crença-afirmação, justificação)

Ou seja, *conhecimento* tem por elementos constitutivos uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação. O que nos faz estar diante de um <u>*sujeito do conhecimento*</u>, ou seja, de uma existência

[1] Algumas referências de autores e suas falas sobre conhecimento podem ser lidas no capítulo 2 desta tese.

interdependente e intrínseca do conhecimento a partir do sujeito, e também, do sujeito do conhecimento (produtor assujeitado).

Isso estabelece uma importância em determinados elementos e ligações no campo epistemológico e social da teoria do conhecimento, e também de sua utilidade prática, diferenciadas em relação a outros modelos que, ao invés do *sujeito do conhecimento*, consideram o sujeito perante o ato de conhecer _ *sujeito do conhecer* _. O *sujeito do conhecimento* é sujeito de sua *enunciação* e, portanto, só tem existência se pensado socialmente.

Começamos então a evidenciar que, no MTCS, *conhecimento* é algo do domínio da fala[2], da enunciação[3] que, uma vez admitida, nos permite afirmar algumas coisas importantes em termos epistemológicos, as quais não eram até então bem explícitas ou para as quais buscávamos correlações mais convincentes. Dentre elas, citamos: "nenhum texto ou enunciado — que são resíduos de enunciações — contém *conhecimento*".

Isso está de acordo com o fato de que dois sujeitos podem ler o mesmo texto e a partir dele produzir (ou não) diferentes significados, ou mesmo, *conhecimentos* diferentes. Algo é "levado" pelo próprio sujeito ao se dispor a ler um texto.

Um livro de Cálculo, por exemplo, só participa na produção de *conhecimento* por um sujeito se, pelo menos, três ações básicas ocorrem: 1. é identificado como um texto pelo sujeito; 2. seus escritos (incluindo qualquer "marca" literária visual) são vistos como símbolos _ com algum significado já convencionado que o sujeito "leva para lá" (inclusive de símbolos matemáticos) _ e, 3. ele o lê (não simplesmente articulando palavras) mas transformando[4] seu enunciado em uma enunciação, através do pensamento verbal ou da fala a um

[2] A *fala* pode ser também um falar consigo, uma espécie de fala interna.

[3] Nessa pesquisa consideramos ***enunciação*** como o ato de enunciar algo a algum interlocutor e, *discurso*, como uma enunciação ou um enunciado (resíduos de uma enunciação). Ambos utilizam, constantemente, um processo de inferência lógico dedutiva por meio da *linguagem*.

[4] Essa transformação de enunciado em enunciação também só é possível porque temos ali resíduos de uma enunciação (do autor), que no caso de enunciados matemáticos, permitem uma representação explícita do significado literal com pouco ou nenhum grau de liberdade interpretativa, deixando uma maior impressão de que o conhecimento está no texto. Segundo Bruner (1997, p. 39), nossos estados intencionais, como aqui consideramos em relação a autores e leitores, se realizam e são compreensíveis devido à participação conjunta em sistemas simbólicos da cultura.

interlocutor. Quanto a isso, devemos precisar duas coisas. Primeira, que a fala pode ser interior _ consigo mesmo, e nesse caso, a própria pessoa é o *interlocutor* ou está representando-o abstratamente _. Segunda, que o *interlocutor* é qualquer agente que propicie o desenvolvimento psicológico[5] do sujeito, não necessariamente uma pessoa.

O resultado da ação do sujeito perante uma determinada demanda que vem do outro (que pode ser até um grupo social amplo), para quem está buscando falar de modo adequado, de modo a ser entendido como aquele que responde àquela demanda, o "*insere no social a que pertencem os interlocutores, ao mesmo tempo que abre a possibilidade de orientar a si próprio dali para frente nas atividades em questão*" (Lins, 1994, p.33).

Com a definição de *conhecimento* do MTCS é perfeitamente possível dizer que, por exemplo, dois sujeitos que estão produzindo significado para a mesma sentença _ "a derivada de x^2 é $2x$" _ porém, um deles com justificação baseada na autoridade (é assim porque o professor disse) e o outro com justificação nos cálculos que fez usando a definição de derivada pelo quociente de Newton, constituem *conhecimentos* diferentes.

Essa diferenciação citada, não é possível com a definição de *conhecimento* de modo clássico _ uma "*crença verdadeira justificada* _,[6] em que a justificação tem relação com a certeza do sujeito em dizer que conhece e não com a afirmação (com a garantia do sujeito em poder enunciá-la), sustentando conhecimento na categoria de uma proposição aceita. Lins & Gimenez (1997, p. 143) fazem um comentário, não com esse propósito, mas que julgo poder esclarecer este viés entre a certeza do sujeito em dizer que conhece e a garantia de poder dizer:

> *Se alguém, começando amanhã, jogasse uma moeda para o alto e dissesse "vai chover amanhã", caso o resultado fosse cara, e "não vai chover amanhã", caso o resultado fosse coroa, e seguisse acertando por mil dias, ainda assim a comunidade dos meteorologistas não aceitaria a previsão do dia 1001 como conhecimento. A*

---

[5] Lembramos que, o termo *psicológico*, de acordo com Vygotsky, inclui tanto o cognitivo quanto o afetivo.

[6] No capítulo 2, há mais referências sobre esta definição segundo Ayer. Discussão a respeito, pode ser encontrada ainda em Lins (1997, p.4 e 5).

enunciação "Vai chover amanhã; (pois) eu joguei a moeda e deu cara." não seria legítima para esse interlocutor...".

A justificação _ *eu joguei a moeda e deu cara* _ pode dar ao sujeito (na milésima primeira vez) certeza de dizer que "vai chover amanhã", mas não a legitima (não lhe garante poder enunciá-la) se o interlocutor é a comunidade dos meteorologistas. Um outro bom exemplo da inadequacidade da definição clássica de conhecimento foi construído por E. L. Gettier _ *Problema de Gettier* _ o qual citamos no capítulo 2.

Logo, no exemplo anterior, se olharmos do ponto de vista da definição clássica de conhecimento, *a enunciação _ "a derivada de x^2 é $2x$" _ se torna* independente da justificação (tanto para o primeiro sujeito como para o segundo), os sujeitos têm certeza de poder dizer, e ambos teriam constituído o mesmo conhecimento, visto de modo absoluto, independente do método usado. Com o quê não concordamos.

A justificação que é aceitável para algum interlocutor (que legitima a enunciação para o *sujeito do conhecimento*) e que, se por um lado (teórico do modelo), está sempre junto à crença-afirmação na definição de um conhecimento, por outro lado (na prática), é a parte mais difícil de ser explicitada na enunciação, isto é, difícil no sentido de que nem sempre é falada juntamente com a proposição (crença-afirmação) e muitas vezes "diluída" em meio à fala ou, de modo muito sutil, enunciada como "é porque é", sem sequer uma complementação do tipo: "é porque meu professor disse", "é porque eu vi no livro", "é porque sempre foi assim (uma convenção cultural)".

Acreditamos que, um dos motivos dessa ocorrência um tanto quanto "falha" da justificação, pode estar no fato de que, para o sujeito da enunciação, a justificação já é julgada (por ele, o sujeito) como uma estipulação para aquele interlocutor (ao qual se dirige no momento) e, portanto, não é parte importante em sua resposta à demanda vinda do mesmo.

Ou ainda, um motivo próprio de cortes impostos pela interação de pensamento com fala, em meio a um diálogo em que ambas as partes compartilham de muitos *significados* comuns (ou de modos de produzi-los), mas que, se analisado por uma terceira pessoa, poderia parecer truncado e sem sentido. Um exemplo simplificado disso, é o fato de ser comum dois estudantes de graduação de matemática, que estudam freqüentemente juntos, ao discutir sobre um problema matemático, não se preocuparem em justificar nenhum dos resultados matemáticos usados.

Por isso, trabalhar o *conhecimento* do aluno segundo o MTCS, querendo (por exemplo) identificar as justificações em suas enunciações, requer observação cuidadosa não somente na preparação das atividades, mas, principalmente, na fala dos alunos ao discuti-las.

Nesse sentido, acreditamos que do ponto de vista prático de uma análise dos processos epistemológicos envolvidos na aprendizagem do Cálculo, quando não se tem atividades elaboradas de modo a permitir o realce das justificações, é muito mais conveniente e proveitoso evidenciar o trabalho partindo dos modos de produção de significado; sobre o quê falaremos a seguir, após algumas considerações pertinentes ao entendimento do assunto.

Um outro papel da justificação, é o de produzir, para o *sujeito do conhecimento*, objetos _ "algo" do qual o sujeito pode falar a respeito _. Neste modelo, *objetos* são constantemente constituídos, embora por fazerem parte muitas vezes de *estipulações* tomadas, pareçam ter uma "existência permanente", ligada a nossa "realidade". Mas, o que estamos considerando por *estipulações* e *realidade* a partir do MTCS?

Seguindo uma visão relativista de Nelson Goodman, citada por Bruner (1986, p. 99-104), não existe uma "*realidade definitiva*", mas construções mentais projetadas em um "*mundo objetivo*", mundo este que não pode ser ontologicamente privilegiado como o mundo real, único, porque dele fazendo parte, ao começarmos a pensar sobre algo, sempre temos uma versão de mundo (criado por outros) da qual partimos, construções das quais tomamos determinadas premissas como certas, as "estipulações". Elas não compõem nenhuma realidade básica ou "apriori", mas são elementos na produção de versões de mundo que tomamos para construções subseqüentes.

É o que ocorre nas versões de mundos criadas pelo físico, pelo artista, pelo romancista, nas quais, em cada caso, as construções são baseadas em diferentes limitações, que dão uma "corretude" a suas convenções. Goodman cita notados exemplos, como: a concepção de mundo da criança criado por Piaget, o mundo da arte de Picasso ou de Van Gogh, a visão geocêntrica de mundo criado na Idade Média, o mundo da Física moderna (após a teoria da relatividade), e o mundo de um paciente em suas sessões de terapia.

Destaca que as diferenças não são uma questão de "subjetividade" (como da arte) e de "objetividade" (como da ciência exata), mas sim, as diferenças ontológicas de construção, especialmente de sistemas de símbolos e de suas referências.

Ao falar sobre a noção de "*referência*", importante em sua teoria, Goodman diz:

> *A semelhança depende muito do costume e da cultura, de modo que, considerar um símbolo "icônico", ou até que ponto ele o é ou descreve seu sujeito fidedignamente, pode variar sem qualquer mudança no símbolo ..."* (Op. Cit, p.102).

Dessas idéias de Goodman, das quais Bruner compartilha em seu livro "Realidade mental, Mundos possíveis", concordamos com a construção simbólica que fazem de uma "*realidade*" a partir de um sistema de símbolos, de uma construção na qual certas partes (as estipulações) parecem permanentes, incluindo aí as realidades criadas quer seja pela ciência (na busca de verdades), quer seja pela história de ficção.

No que se refere às *estipulações*, o MTCS modifica essa noção a partir de Goodman, intensificando seu caráter não-permanente, uma vez que só considera sua criação em meio às atividades, denominando-as então de *estipulações locais*

Esse outro modo de olhar as estipulações _ em maior dinamismo _ com uma necessidade de produção e re-produção constantes, estão de acordo com a caracterização epistemológica de uma produção de significados e conhecimentos, dependentes da atividade do sujeito (em seu contexto), conforme requer o modelo.

São as estipulações locais que vão constituir o que se denomina núcleo de um modo de produção de significados, isto é, núcleo de um Campo Semântico (**CS**). Portanto, núcleos de CS podem ser pressupostos de objetos (como propriedades e imagens), diagramas, princípios, axiomas, ou mesmo um enunciado ou objeto produzido em um outro CS.

Em nossa pesquisa, em meio às atividades relativas a Cálculo, notamos alguns elementos que, devido à sua freqüência e importância como básicos na *produção de significados*, objetos e conhecimentos a partir do Cálculo, acabaram tendo denominações especiais como estipulações locais em núcleos de CS:

- *Estipulações locais a respeito de limite* - quando se tem no núcleo a definição Weirstrassiana de limite de uma função de uma variável real, ou seja: dizemos que " $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ tal que se

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon."$$

- *Estipulações locais a respeito de infinitésimos* _ quando se tem no núcleo elementos baseados na noção de infinitésimo _ a noção de infinitésimo como concebido desde Newton, de mônadas infinitesimais, de incrementos infinitamente pequenos; ou como para Leibniz (que dizia não serem números ou quantidades) uma classe de números menores que qualquer outro designado, às vezes também expressos como diferenciais ou como distâncias infinitamente pequenas[7]; ou mesmo a noção de infinitésimo (mais recente) como número *hiper-real* cujo módulo é menor que de qualquer número real positivo;
- *Estipulações locais visuais-geométricas* - quando se tem no núcleo *princípios ou resultados geométricos, gráficos* e desenhos de figuras planas ou espaciais.

[7] Cf. em ALCOBA (1996, p.160), LEIBNITZ (1983, p.7), e BARON (1985, v.3, p.28-34).

- *Estipulações locais do tipo algoritmos* - quando se tem no núcleo algoritmos: regras, fórmulas, seqüências memorizadas "de cor", sem relacionar ao entendimento e justificativa matemática.

No Capítulo 6, falamos mais sobre cada uma dessas estipulações locais, ao procedermos a análise dos dados obtidos na pesquisa de campo.

Observamos que, por vezes, no ensino e aprendizagem em Cálculo, conforme a atividade, o interlocutor e a demanda, um núcleo de um CS pode ser constituído por um único tipo dessas estipulações locais, e, quando isso é notado, designamos o CS de acordo, por exemplo, CS visual-geométrico.

Em outras vezes porém, os núcleos ou têm mais de uma dessas estipulações locais, com os elementos relacionados em estipulações locais complexas, ou há uma fluência tão grande entre um CS e outro que, torna-se difícil saber sem outras investigações, se há predominância desta ou daquela estipulação local para podermos especificar os CS.

Por exemplo, através da atividade de resolução de problemas, foi proposto o seguinte problema gerador:

> *Sendo f uma função, como $f(x) = x^2$, qual o modo que vocês mais usam para pensar e explicar para alguém o cálculo da derivada desta função num ponto de abcissa x_0 sabendo que ela é o "coeficiente angular da reta tangente" ao gráfico da função neste ponto?*

Diante do qual pudemos observar (cf. análise no Capítulo 6, atividade 3, **P3-G**) que os estudantes, ao participarem desta atividade, produziram suas *enunciações e enunciados em relação a mais de um dos tipos de estipulações locais mencionados*, sendo que em certos discursos durante a discussão, como: "Graficamente eu vou ter uma reta. Agora...se eu derivar isso daí, x^2, dá 2x", o estudante poderia estar se relacionando a estipulações locais visuais-geométricas (nas duas enunciações), a estipulações locais do tipo algoritmos (nas duas enunciações), de estipulações locais visuais-geométricas para estipulações locais do tipo algoritmos ou às duas (em um mesmo núcleo); o que demonstra também a importância das demais falas e a inserção das falas no contexto como um todo.

Em seu domínio didático-pedagógico, o professor procura estratégias de organização das atividades dos alunos, de valoração de certas atitudes e de determinados discursos, sempre tendo em mente demandas que, (entre outras coisas) o fazem produzir significados em certos CS e a querer que o aluno também produza significados em CS análogos. Além do mais, pensando em termos de aprendizagem efetiva do aluno, o professor quer que o aluno além de tomar como legítimo um certo modo de pensar, também passe a dominá-lo. Assim, novos núcleos são constituídos pelos estudantes em sala de aula de Cálculo, como um núcleo tendo estipulações locais a respeito de limite ou tendo estipulações locais a respeito de infinitésimos.

Há casos, porém, em que o sujeito não consegue passar a operar em um novo CS, ou seja, em um novo modo de produção de significado, e não percebe a sua dificuldade. A uma "*impossibilidade de produção de significado para uma proposição em determinado CS*" (Lins, 1993), denomina-se de limite epistemológico.

Em outros casos, mesmo já tendo operado em um certo CS, tendo tomado aquele modo de produção de significado para outras proposições, o sujeito não consegue produzir significado mediante uma nova proposição (embora seja possível) em relação àquele modo. A este tipo de dificuldade, denomina-se um obstáculo epistemológico.

Ainda sobre a constituição do MTCS, temos a destacar que, em outros modelos epistemológicos, usados como fundamentos em Educação Matemática, observamos uma diferença em relação ao MTCS no que se refere não só à concepção de elementos como objetos, conceitos e conhecimentos, mas também às suas relações.

Observamos que os modelos epistemológicos baseados em **estruturas** e em **sistemas** são desenvolvidos partindo de noções básicas de conjuntos e as relações entre os seus elementos, embora entre eles ainda existam variações dentro dessas concepções. Podemos citar alguns desses modelos e seus respectivos autores ou seguidores: Piaget (baseado em estruturas); Vygotsky, Prado Jr.e Bruner (em sistemas).

Ao citar esses modelos, nosso intuito não é discutí-los, mas tão somente de exemplificar como vemos algumas características sobre *pertinência* de objetos e *relações* que, essencialmente, constróem boa parte dessa diferença ontológica entre as linhas epistemológicas adotadas. Além das observações que determinadas leituras bibliográficas nos fornecem a respeito, temos em Lins (1994, p.31) um referencial.

Nas ***estruturas*** a pertinência de objetos é definida, os objetos pertencem ou não às mesmas. Coforme vimos no capitulo 1, uma estrutura, segundo Piaget por exemplo, é um "totalidade" que se transforma e auto-regula, que contém elementos e relações (de operações,espaço-temporais, causais, lógicas, simétricas, e outras) entre estes elementos. As relações são assim constituídas como pertinentes às estruturas. Citado por Battro (1978, p. 171-172), Piaget diz sobre objetos e relações:

> *O objeto é, por assim dizer, o invariante do grupo de deslocamentos. [...]*
>
> *Sem a conservação dos objetos não poderia haver grupo, pois, tudo parece mudança de estado. O objeto e o grupo de deslocamentos são, pois, indissociáveis, um constituindo o aspecto estático e o outro o aspecto dinâmico da mesma realidade. [...]*
>
> *Diremos que há estrutura... quando os elementos são reunidos em uma totalidade que apresenta certas propriedades como totalidade e quando as propriedades dos elementos dependem, total ou parcialmente, destas características da totalidade.*

Nos ***sistemas***, embora a pertinência dos objetos seja definida, as relações são não-permanentes. Como Lins explicita: "*... um desequilíbrio em algum ponto do sistema não reflete necessariamente em todos os seus outros pontos*". Essa diferença em relação às estruturas faz com que, mesmo os objetos estando no sistema (compondo pontos do sistema), as relações possam ser estabelecidas ou não, na dependência de outras relações anteriores e subordinadas.

Vygotsky (1995, p. 80) ao falar sobre o aparecimento de *sistemas*, exemplifica através da *relação de generalidade* (onde conceito científico tem a conotação de um conceito supra-ordenado, e a generalização significa a formação de um conceito supra-ordenado):

> ... *Um conceito supra-ordenado implica a existência de uma série de conceitos subordinados, e pressupõe também uma hierarquia de conceitos de diferentes níveis de generalidade. [...] Nos conceitos científicos que a criança adiquire na escola, a relação com um objeto é mediada, desde o início, por algum outro conceito. Assim, a própria noção de conceito científico implica uma certa posição em relação a outros conceitos, isto é, um lugar dentro de um sistema de conceitos.*

Prado Jr. (*1961*, p. *63-68*) *ao falar sobre a natureza relacional de uma* conceituação, considera *sistema* como um conjunto de elementos e relações *integrados em torno de uma mesma conceituação.* Ainda sobre sistemas, diz que:

> *O conhecimento científico [...] se compõe de um sistema de conjunto cujas partes, que seriam os conceitos particulares, reciprocamente se incluem umas nas outras, e têm sentido e conteúdo unicamente dentro do sistema em que se integram, e em função dele.*

Continuando, o autor afirma:

> *... pode-se concluir que os conceitos são função uns dos outros e do conjunto da conceituação que entre si eles integram. O que quer dizer que eles se configuram nesse conjunto, e portanto nas relações que o estruturam.*

Bruner (1997a, e 1997b) diz que o conceito central de uma psicologia humana é o *significado* e os processos de sua construção. Vários sistemas são por ele mencionados _ sistema simbólico, sistema interpretativo, sistemas culturais e outros _ objetivando explicar o processo de construção de significado.

> *... construímos mundos com o auxílio de sistemas simbólicos através da atuação em um "mundo dado" que tomamos como certo ...*
>
> *O significado do símbolo é dado pelo sistema de significados no qual ele existe.*
>
> *... a própria forma de nossas vidas é compreensível para nós mesmos e para os outros apenas em virtude desses sistemas culturais de interpretação.*
>
> *... é a cultura, e não a biologia, que molda a vida e a mente humanas, que dá significado à ação, situando seus estados intencionais subjacentes em um sistema interpretativo.*

Nos **campos** não há pertinência definida de objetos e as relações são não-permanentes. Nas palavras de Lins (1994, p. 31):

... objetos não podem fazer parte constitutiva de campos, e é neste sentido que o MTCS é um modelo não-essencialista, pois propõe que objetos são sempre - e incessantemente - constituídos, e não aproximados, abordados.

Qualquer impressão de permanência de um objeto, como se ele já estivesse assim há muito constituído, vem do fato de que em uma nova produção (a cada vez que falamos algo a um interlocutor) certas estipulações locais são "tomadas" em forma de esquemas, princípios, propriedades e imagens (por alguma função mental básica como a associação ou a formação de imagens), mas, não que um objeto permaneça como "aquele algo".

As produções subseqüentes a outras e que não se diferenciam muito das anteriores (as quais muitas vezes tornam-se estipulações locais para as produções seguintes) ou são produções em relação a estipulações locais já tomadas antes, nos trazem a sensação de estar nos aproximando de "algo" para poder dizer da "melhor forma", cada vez com maior "precisão". Geralmente, na busca de construir "verdades", que sejam pontos de consenso comum socialmente, no contexto de nossos interlocutores.

Tentando sintetizar nossa posição, afirmamos: justamente nesse movimento de produzir o objeto enquanto "algo" do qual pensamos e falamos (conceitos, definições, e tudo o mais), é que temos o objeto.

É claro, isso não nos torna idealistas ao ponto de achar que, objetos tomados como estipulações locais (por exemplo, pensando o Sol), deixam de existir (não aquece ou ilumina mais a Terra) se não falo a respeito, pois se encontram em nossa realidade.

Assim, a partir dessas caracterizações básicas _ atividade e produção de significados, enunciação e enunciado, interlocutor e demanda, conhecimento e sujeito do conhecimento, objetos e relações, estipulações locais e CS _ incluindo seus inter-relacionamentos, vamos nos posicionar ao falar do MTCS neste trabalho de pesquisa.

4.3 QUANTO A OBJETOS DO CÁLCULO

Neste item tecemos considerações a respeito de alguns objetos produzidos comumente no pensamento diferencial e integral, observados nas atividades vividas (durante anos) como professores de Cálculo, no intuito de contemplar significados não realçados e mostrar uma leitura de nossa experiência a partir do MTCS.

Um objeto denominado limite

Os significados a respeito de "limite" são produzidos, em nível inicial, geralmente dos seguintes modos:

1. Em um CS visual-geométrico, usando figuras de pontos sobre uma reta se aproximando de modo dinâmico (ao desenhar e falar) de um valor limite (ponto de acumulação); ou usando gráficos de funções que não ultrapassam determinados valores ou são limitados por outras funções, também *representadas graficamente; ou ainda, indicando que os gráficos* vão para o infinito, crescem ou decrescem indefinidamente. Juntamente podemos ter enunciações e enunciados do tipo: "se aproxima de...", "cada vez mais próximo de...", "tende a..."; ou simbologias como: " $x \to a$ ", $f(x) \to b$", onde *a* e *b* podem ser valores numéricos, ∞ (infinito), ou outras expressões funcionais.

2. Em um CS do pensamento algébrico[8], usando de cálculos numéricos aproximativos, inclusive com auxílio de calculadoras ou tabelas de valores. Nesse caso, é comum usar o pensamento funcional como simples "expressões algébricas", y = f(x), onde dado um valor a x se obtém um valor para y, trabalhando de modo dinâmico o discreto-numérico ao invés do contínuo-real, calculando $\lim_{x \to a} f(x)$ como se tivesse que calcular *f(x)* para vários valores de x bem próximos de *x* = *a* até descobrir (intuir) para que valor (ou para onde) "tende" *f(x)* "à medida que *x* tende para *a*".

[8] Segundo Lins & Gimenez (1997, p. 151) há distintos modos de se produzir significados para a álgebra, e o pensamento algébrico é um desses modos, que devido às características fundamentais apresentadas se adequa à situação em termos de operações aritméticas e funcionais (como soma, subtração, produto e quociente de funções à medida em que são especificadas em uma atividade).

Podemos ter também enunciados do tipo: "se aproxima de...", "cada vez mais próximo de...", "tende a..."; ou de simbologias como: " $x \to a$ ", $f(x) \to b$", onde a e b podem ser valores numéricos, ou mesmo ∞ (infinito).

3. Em um CS de algoritmos, quando se resolve limites por esquemas ("*rituais*"[9]) já estabelecidos (que foram autorizados, geralmente pelo livro ou professor, e aplicados em outros cálculos de limite anteriores com sucesso). Por exemplo:

1) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, sabe-se que tem que: (a) dividir o polinômio de grau maior pelo de grau menor, (b) simplificar, (c) fazer $x = a$. Ou usar a Regra de L'Hospital, derivando numerador e denominador até não ter mais 0/0 ao fazer $x = a$.

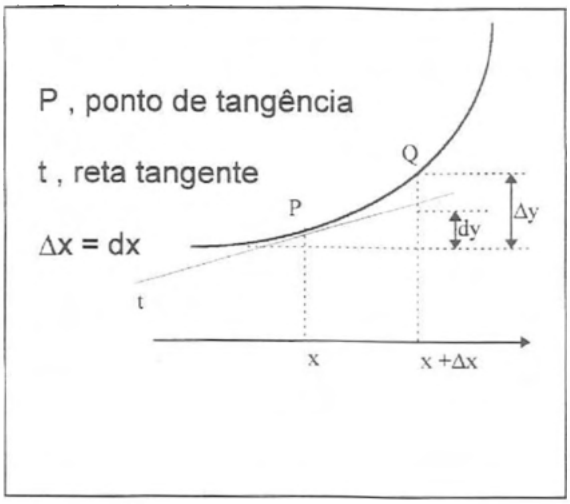
2) $\lim\limits_{n \to \infty}(\sqrt{n^2 + n} - n)$, sabe-se que tem que: (a) multiplicar e dividir por $((\sqrt{n^2 + n} + n)$ (o chamado "conjugado"), (b) simplificar, (c) fazer $n \to \infty$, quando tiver na forma $\frac{1}{n}$, pois $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Um objeto denominado derivada

Entre os significados produzidos para derivada os mais constantes são os de: limite do quociente de Newton, declividade da reta tangente em um ponto, função $f\,'$ obtida de uma função f por determinada regra, taxa de variação instantânea, velocidade instantânea, custo marginal e receita marginal.

[9] Como cita Davis (1988) e é reforçado por Rezende (1994, p. 7).

É importante que se note que esses significados são produzidos de mais de um modo, separadamente ou em conjunto. Por exemplo, pode-se produzir significado de taxa de variação instantânea, $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{ds}{dt}$ em um CS visual-geométrico seguido de um CS de limite, exibindo as partes Δx, Δy, dy, dx em um gráfico, e enunciando:



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$, ou em palavras:

> $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, *o limite deste quociente, quando h tende para zero, isto é, dy/dx , é chamado* ***taxa de variação de y em relação a x****. Assim ao variar x, y também variará, à taxa de dy/dx unidades por unidade de variação de x* (Swokowski 1983, p.193).

após ter definido derivada de *f* em *a*, por $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ desde que o limite exista, e ter introduzido a notação diferencial $\frac{dy}{dx}=f'(x)$.

OU

Pode-se tomar estipulações infinitesimais em vez de limite, como diz um dos professores observados (transcrição das anotações distribuídas aos alunos):

> *Por infinitésimos é como pensou Leibniz e como costuma-se pensar em Física. Aqui o acréscimo Δx é pensado como infinitamente pequeno e escrito dx. (..) Para calcular a derivada de y = f(x) = x², dá-se um acréscimo infinitesimal dx à variável x e calcula-se o acréscimo dy resultante em y. (...)*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xdx+dx^2}{dx}=2x+dx$$

O coeficiente angular da reta tangente, isto é, a derivada, é a parte real dessa expressão, isto é, a parte que se obtém desprezando o infinitésimo dx. Assim, $\frac{dy}{dx} \approx 2x = f'(x)$.

OU

Em um CS dos algoritmos, relacionando diretamente taxa de variação instantânea com o símbolo funcional de derivada:

> *Sendo y = f(x), a taxa de variação instantânea de y em relação a x é dada pela derivada de f, isto é, Taxa de variação =* $\frac{dy}{dx} = f\,'(x)$ (Hoffmann, 1982, p.68).

OU

Em um outro CS (com estipulações locais numéricas) ao dizer que: "taxa de variação instantânea é um valor calculado por uma razão $\frac{dy}{dx}$ entre duas quantidades, medindo a variação da quantidade *y* por unidade de *x*."

Por exemplo:

> *O conceito de variação marginal em economia corresponde ao conceito mais geral de taxa de variação instantânea. Por exemplo, se o custo total da produção de x unidades de um produto é dado por C(x), então o custo marginal é dado por C' (x), que é a taxa de variação de C(x).(...) Lembrando que C'(k), o custo marginal de em k, é o custo aproximado da (k+1)-ésima unidade depois que as k primeiras unidades tiverem sido produzidas (...) Mais genericamente, os economistas aplicam a derivada de uma função para estimar a variação na variável dependente causada por uma variação unitária da variável independente* (Leithold, 1988, p. 113 e 115).

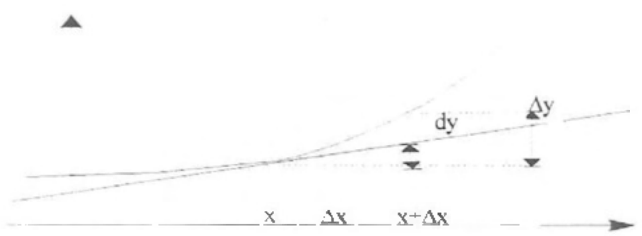
E aqui neste discurso voltado a área econômica, chamamos atenção ao fato de que, apesar de tratarem com funções contínuas de produção, geralmente só interessam resultados calculados em valores inteiros, daí a variação da k para a (k+1)-ésima unidade ser considerada como um Δx acréscimo suficientemente pequeno ("ínfimo", apesar de igual a 1) para termos uma boa aproximação.

OU ainda

Tendo no núcleo outras estipulações como a velocidade[10].

Um objeto denominado diferencial

Temos uma produção de significado em relação a estipulações visuais-geométricas e funcionais ao desenhar e escrever:



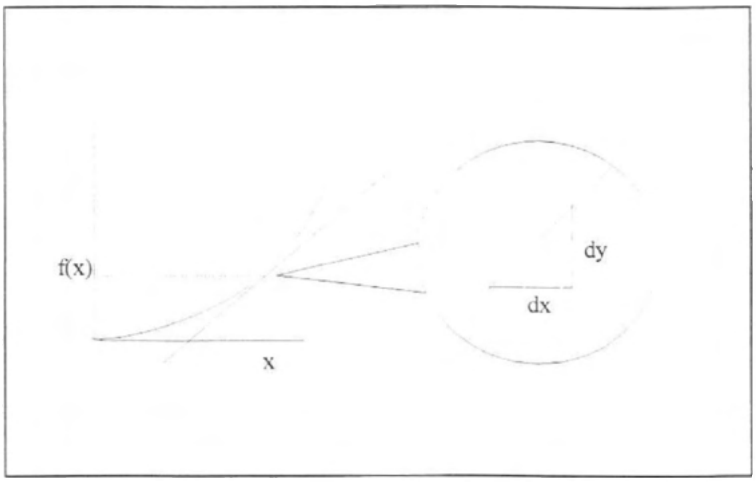
$\Delta x = dx$, diferencial da variável independente x
$\Delta y \approx dy = f'(x).dx$, diferencial da variável dependente y

OU

Temos uma produção de significados em relação a estipulações infinitesimais e visuais-geométricas, como propôs o professor aos seus alunos em uma das turmas observadas:

> *Aqui o acréscimo Δx é pensado como infinitamente pequeno e escrito dx. Em vez de uma figura (figura do livro) mostrando várias retas secantes aproximando-se da reta limite, que é a tangente, a figura abaixo mostra a ampliação da vizinhança infinitesimal do ponto de tangência por um microscópio de poder infinito. Na vizinhança infinitesimal do ponto de tangência, a curva e a reta tangente estão infinitamente próximas, de modo que aparecem confundidas em um único segmento. [...] Quando x varia de x a x + dx a função varia de f(x) a f(x + dx)...*

[10] Esse tipo de relação direta entre taxa instantânea e velocidade e entre taxa instantânea e declividade, podemos encontrar comentários, por exemplo, em Cassol (1997, p. 96-97) que tem como central em suas discussões a produção de diversos significados para a derivada.



Nesse caso, a letra *d* indica um operador que age sobre uma grandeza (*x ou y*) tendo como produto uma variação infinitamente pequena desta grandeza (*dx ou dy*).

Um objeto denominado integral definida

Três significados são proeminentes: o de área, o de somas de Riemann, e o de soma infinita de grandezas infinitesimais (comprimento, área, volume, e outros).

Como área :

É feita por aproximação da área de uma figura plana por polígonos (retângulos) cujas áreas são calculadas pelos métodos da geometria elementar.

As estipulações locais são predominantemente visuais-geométricas, iniciando com figuras do tipo (**fig 1**):

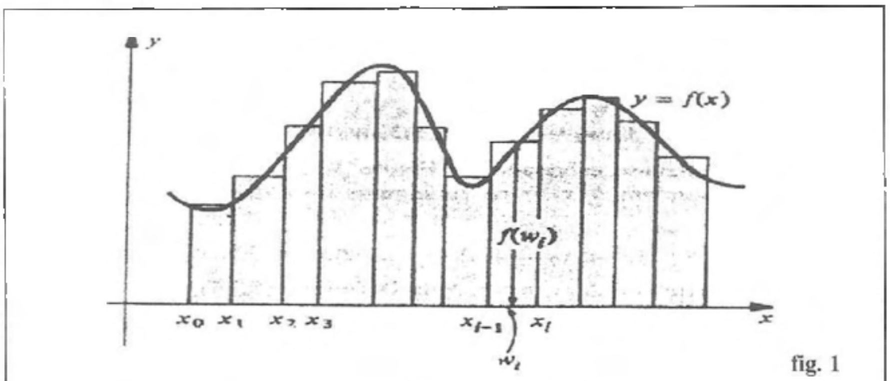


fig. 1

Onde a partição em subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, em que x_i são números tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ é dita ser qualquer, e tal que o maior dos números $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, entre $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, é chamado norma da partição, e denotado por $\|P\|$.

Além disso, à medida que temos n cada vez maior (mostra-se outras figuras com mais partições) a soma das áreas dos retângulos

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i$ mais se aproxima da área da figura delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Em que há um apelo direto ao visual para entendimento simultâneo da definição de área e integral definida.

Por exemplo, em Ávila (1978, p. 170),

> *A área assim definida é chamada a integral de f no intervalo [a,b], a qual é indicada com o símbolo* $\int_a^b f(x)dx$. *Portanto, por definição,*
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x.$$

<u>Como soma de Riemann</u> :

Definições apresentadas em Swokowski (1983, p. 230 e 233).

> *"Seja f uma função definida em um intervalo fechado [a,b] e seja P uma partição de [a,b]. Uma* ***soma de Riemann*** *de f em relação a P é qualquer expressão R_p da forma*
>
> $$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i,$$
>
> *onde w_i é um número em $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1,2,\ldots,n$."*

> *"Seja f uma função definida em um intervalo fechado [a,b]. A integral definida de f desde a até b, denotada por* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_i f(w_i)\Delta x_i$, *desde que o limite exista."*

<u>Como somas infinitesimais</u> :

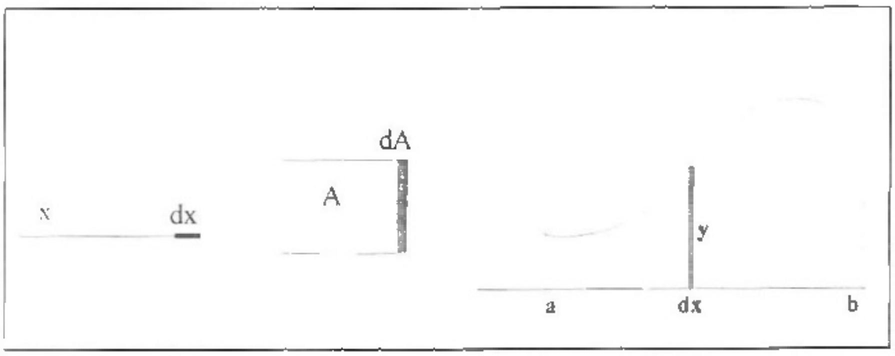
Por exemplo:

Em Ávila (1978, p. 171) encontramos:

> *O símbolo ∫ de integral é devido a Leibniz: ele é uma deformação da letra S de "soma", usado para lembrar que estamos lidando com o limite de uma seqüência de somas; f(x) dx seria, no entender de Leibniz, a área de um "retângulo infinitesimal" de base "infinitamente pequena" dx e altura f(x); a integral de f, de a até b, seria, então, a soma de todos esses retângulos infinitesimais.*

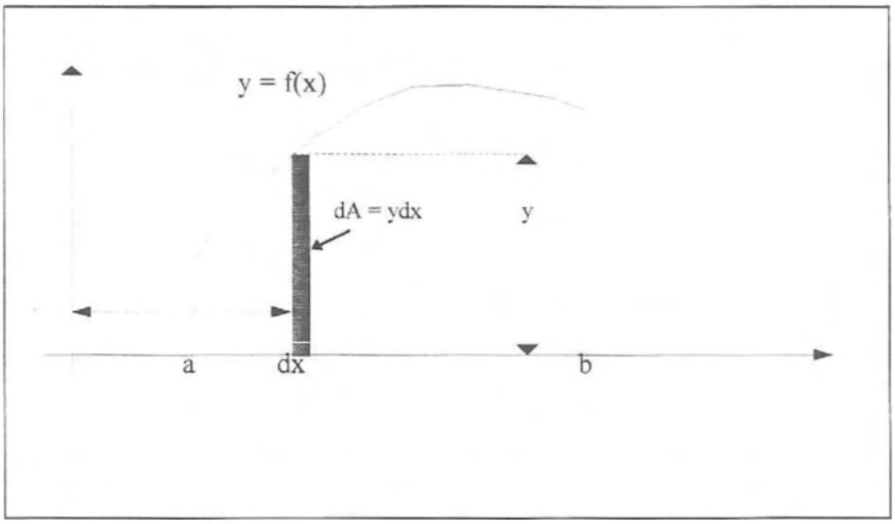
Nas anotações que um dos professores observados (durante a pesquisa de campo) fez aos alunos sobre a palestra do professor G. Guinness (abril/1997, Seminário de Educação Matemática - UNESP - Campus de Rio Claro):

> *As notações usadas hoje,* $\frac{dy}{dx}$ *e* $\int ydx$*, bem como as expressões cálculo diferencial e cálculo integral são devidas a Leibniz. São notações perfeitamente coerentes com o modo de pensar de Leibniz. A letra **d** indica um operador que faz passar de uma grandeza para uma variação infinitamente pequena desta grandeza, mantendo a natureza da grandeza. Por exemplo, se x é um comprimento, dx representa um comprimento infinitesimal, se A é uma área, dA representa uma área infinitesimal, se V é um volume, dV representa um volume infinitesimal, ddx representa uma variação infinitesimal de um comprimento infinitesimal, isto é, um infinitésimo de segunda ordem, etc.*



> *Se x é um comprimento,* $\int x$ *representa uma soma infinita de comprimentos x,* $\int dx$ *representa uma soma infinita de comprimentos infinitesimais, cujo resultado é, de novo, o comprimento x,* $A = \int dA = \int ydx$ *é uma soma infinita de áreas infinitesimais, reconstituindo a área sob a curva, etc.*

Em Simmons (1987, p.298) ele diz que: "*consideramos a maneira fácil e intuitiva de construir a integral definida*:



Pensamos na área sob a curva como sendo composta de uma grande quantidade de faixas retangulares verticais finas. A faixa típica mostrada na figura tem altura y e largura dx e, portanto, área

$$dA = ydx = \int f(x)dx, \quad \text{pois } y = f(x). \ (...)$$

Agora pensamos na área total A da região como o resultado de adicionar esses elementos de área dA quando nossa faixa típica varre toda a região. Esse ato de adição ou somatório pode ser simbolizado por

$$A = \int dA. \ (...)$$

$$A = \int dA = \int ydx = \int_a^b f(x)dx."$$

4.3 ALGUNS FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE: BRUNER, VYGOTSKY E BAKHTIN

Por estarmos nos apoiando em muitas das idéias destes autores consideramos importante falar sobre alguns enfoques de suas teorias, principalmente no que diz respeito à <u>significado</u>, <u>fala</u>, e <u>interlocutor</u>. Procuraremos explicitar, de modo sintetizado, os pontos com os quais concordamos e aqueles com os quais discordamos ou vemos possiveis adaptações e acréscimos no sentido de constituir juntamente com o MTCS um embasamento teórico coerente.

Apesar de não falar diretamente sobre conhecimento, Vygotsky (1896 - 1934) com formação superior em literatura, medicina e psicologia, trabalha especialmente dois fatores que lhe são próprios: o pensamento e a linguagem.

A fim de analisar a ontogênese do pensamento, Vygotsky estuda o problema da construção dos significados e dos conceitos.

Este autor concebe uma forma de funcionamento psicológico, no qual a constituição biológica (fisiológica) evolutiva do organismo é um sistema que incorpora e integra o uso de signos a partir de unidades (mônadas) de funcionamento psicológico, nas quais o afetivo e cognitivo são inseparáveis. *Concordamos com essa forma conjunta do afetivo e cognitivo nas questões psicológicas que, pela nossa visão de leigos, não há como ser tratada separadamente (se consideramos o comportamento humano)*, a não ser em termos de uma abstração teórica.

As análises simultâneas no campo da psicologia e semiótica são, segundo James V. Wertsch,[11] uma marca central nas obras de Vygotsky, que se evidencia quando ele fala das "ferramentas psicológicas" e seus sistemas complexos (como, por exemplo: linguagem, signos convencionais, sistemas de contar, técnicas mnemônicas e sistemas de símbolos algébricos). Estas funções psicológicas (como por exemplo: memória, percepção, operação sensório-motora e atenção voluntária) tornam-se "aproriações" dos individuos por fazerem parte do seu meio sócio-cultural.

> *A palavra "social", quando se aplica a nosso tema, tem uma grande importância. Acima de tudo, no sentido mais amplo da palavra, significa que tudo o que é cultural é social. A cultura é o produto da vida social e da atividade social humana. Por isso, ao tratar do problema do desenvolvimento cultural da conduta estamos introduzindo diretamente o plano social do desenvolvimento* (Vygotsky, apud Wertsch, 1988, p. 96).

[11] Ver Wertsch (1988).

> *... o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas* (Vygotsky, 1991, p. 101).

Quanto a ênfase dada por Vygotsky à linguagem, devemos dizer que, concordamos sobre o papel preponderante que a linguagem tem no nosso pensar e, particularmente, na fala. Em termos do pensar matemático, das enunciações matemáticas e dos enunciados matemáticos, se usa um misto de linguagem matemática formal (com toda sua lógica e simbologia própria) com outras linguagens (como a materna ou os gestos).

Uma das linhas gerais de estudo de Vygotsky, consiste na investigação de como as funções psicológicas se iniciam em uma forma primária ou elementar (com o desenvolvimento natural, como: movimentos, reações e percepções) e logo passam a formas superiores (com o desenvolvimento social ou cultural, como: pensamento verbal, memória lógica e atenção voluntária). As principais características de distinção entre as funções elementares e superiores são: 1. o controle voluntário (pelo sujeito) do meio que integra, pois as funções elementares são totalmente determinadas pela estimulação ambiental; 2. o aparecimento das realizações conscientes; 3. a origem e natureza social das funções psicológicas superiores;[12] 4. o uso de signos _ *ferramentas psicológicas* _ como mediadores das funções psicológicas.

> *A invenção e o emprego dos signos [ou de símbolos] na qualidade de meios auxiliares para a solução de alguma tarefa psicológica estabelecida no homem (memorizar, comparar algo, informar, eleger, etc) supõe, desde sua faceta psicológica, por um momento uma analogia com a invenção e o emprego das ferramentas.* (Vygotsky, 1995, p. 91).

Mais adiante (p. 123), esse autor continua:

> *Graças aos mais sensíveis experimentos realizados cremos possível formular a seguinte regra geral: na estrutura superior o signo e o modo de seu emprego é o determinante funcional ou o foco de todo o processo [psicológico].*

[12] Quanto à ***natureza e origem das funções psíquicas superiores***, ele diz que são relações interiorizadas de ordem social, por isso, quando estuda o desenvolvimento psicológico, desde a criança, não se orienta, como Piaget, em direção à socialização da criança (em como ela se comporta no coletivo), mas sim em como as relações sociais se transformam em funções psíquicas, ou como o coletivo cria as funções psíquicas superiores.

Considerando a importância do social na construção do psicológico, podemos compreender o destaque dado em seus estudos para os signos, em particular para os da linguagem em correlação com o pensamento.

Segundo ele:

> *O pensamento não é algo acabado, pronto para ser expresso. O pensamento se precipita, realiza certa função, certo trabalho. Este trabalho do pensamento é a transição desde as sensações da tarefa _ através da construção do significado _ ao desenvolvimento do próprio pensamento* (Vygotsky, 1991a, v.I, p. 125).

> *... o pensamento pode funcionar sem quaisquer imagens verbais ou movimentos de fala detectáveis pela auto-observação* (Vygotsky, 1995, p. 41).

Para Vygotsky, a unidade de análise do comportamento humano é o ***significado***, que ele considera como sendo a unidade do ***pensamento verbal.*** Quando o pensamento se expressa na palavra ou com ela se realiza, há um aperfeiçoamento do pensamento no que denomina de ***pensamento verbal***.

> *... é no **significado** da palavra que o pensamento e a fala se unem em pensamento verbal. É no significado então, que podemos encontrar as respostas às nossas questões sobre a relação entre o pensamento e a fala* (op. cit., p. 4).

Os significados das palavras são construções dinâmicas na própria relação particular entre pensamento e fala. Mas para este autor, o pensamento e a fala "*têm raízes diferentes*". Em seus respectivos desenvolvimentos a fala tem um estágio racional (pré-intelectual) enquanto que o pensamento um estágio pré-linguístico, que acabam por se encontrarem, transformando então o pensamento em verbal e a fala em racionalmente significativa.

> *O pensamento verbal não é uma forma de comportamento natural e inata, mas é determinado por um processo histórico-cultural e tem propriedades e leis específicas que não podem ser encontradas nas formas naturais de pensamento e fala* (op. cit., p.44).

Vygotsky afirma que nos primeiros estágios de desenvolvimento, quando a criança ainda conhece poucas palavras, ela tenta dominar a fala, pois anteriormente no "pré-intelectual" a fala tinha somente funções de descargas emocionais e de contato social, e a partir do momento em que a criança passa a prender o signo aos objetos ("cada coisa tem seu nome") ela começa a usar uma *função simbólica, a unidade do pensamento verbal (o significado).* Logo, juntamente com o processo de atenção, associação, formação de imagens, tem-se como *indispensável* o uso do *signo para completar as operações mentais e* alcançar a construção de conceitos.

Em suas palavras:

> *Os complexos*[13] *que correspondem ao significado das palavras não são desenvolvidos espontaneamente pela criança: as linhas ao longo das quais um complexo se desenvolve são predeterminadas pelo significado que uma determinada palavra já possui na linguagem dos adultos.(...) O adulto não pode transmitir à criança o seu modo de pensar. Ele apenas lhe apresenta o significado acabado de uma palavra, ao redor do qual a criança forma um complexo ...* (Vygotsky, 1995, p.58).

Ainda referindo-se a significado (p. 125):

> *O significado é apenas uma das zonas do sentido, a mais* ***estável*** *e precisa. Uma palavra adquire seu sentido no contexto em que surge; em contextos diferentes, altera seu sentido. O significado permanece* ***estável*** *ao longo de todas as alterações de sentido. O significado dicionarizado de uma palavra nada mais é do que uma pedra no edifício do sentido, não passa de uma potencialidade que se realiza de formas diversas na fala.*

Podemos observar que, para Vygotsky, o *significado* é visto como uma construção social da mente, de origem convencional, como parte mais estável do processo de produção de sentido; sendo dicionarizável e permanecendo estático, o que, para nós, é equiparável ao que consideramos, nesta pesquisa, como *significado literal*.

Sentido e *significado* para muitos são vistos como sinônimos, inclusive para lingüistas, porém a interface de estudos com a psicologia _ psicolinguística _ permitiu uma distinção destes conceitos.

[13] Um ***pensamento por complexos*** (ou simplesmente um ***complexo***) é um tipo de pensamento no qual objetos, anteriormente isolados na mente, passam a estar associados devido às impressões subjetivas ou às relações entre si. Vygotsky diz ter investigado e observado cinco tipos de complexos: associativo, de coleções naturais, em cadeia, difuso e o pseudoconceito. Este último, o ***pseudoconceito***, é o complexo predominante sobre todos os outros complexos, sendo o elo de ligação entre o pensamento por complexos e o pensamento por conceitos (cf. Vygotsky, 1995, p. 52-59).

Para Vygotsky, por exemplo, *sentido* é a união dos acontecimentos psicológicos que a palavra evoca conscientemente e tem um predomínio sobre o *significado da palavra*.

Contudo, ainda que Vygotsky afirme que a palavra, frase ou enunciado adquira seu sentido e significado no contexto do discurso, ele não desenvolveu esta idéia de contexto.[14] Recorremos a Bakhtin, por concordar com a dimensão dada por ele à palavra ou à frase em um enunciado ou em uma enunciação, ampliando as afirmações de Vygotsky em direção a um funcionamento semiótico mais contextualizado:

> *Quando a atividade mental se realiza sob a forma de uma enunciação, a orientação social à qual ela se submete adquire maior complexidade graças à exigência de adaptação ao contexto social imediato ao ato de fala, e, acima de tudo, aos interlocutores concretos* (Bakhtin, 1995, p. 112 e p.117).

Seguimos nessa direção e notamos que, em conseqüência de uma linguagem verbal, o pensamento verbal é desenvolvido pela aquisição das relações, generalizações, conceitos e operações lógicas. Muito embora, ainda deva ser esclarecido que a articulação de nosso pensamento não é imposto pela articulação lingüística[15]. Um bom exemplo para isso nos dá Buyssens quando afirma que podemos mudar nossos pensamentos mantendo uma <u>mesma</u> frase verbal.

> *Quando crianças, ouvimos dizer que "o Sol se levanta" e acreditamos que isto corresponde exatamente à realidade: vemos o Sol subir no céu; a escola, entretanto, ensina-nos que se trata de um movimento aparente e, na realidade, é a Terra que se move; modificamos o pensamento sem modificar a frase; esta, então, não comanda aquele.[...] Quando vale a pena, o pensamento humano liberta-se facilmente dos quadros próprios à língua* (Buyssens, 1974, p. 90-91).

[14] Esta crítica, de não desenvolvimento do contexto nos escritos de Vygotsky, pode ser encontrada em outros autores, como em Pino (1991) e Wertsch (1988), embora esse segundo autor faça críticas mais amenas a essa posição, à página 232 diz: "*Para explicar a posição vygotskyana de sentido, de forma que permita relacionar os fenômenos psicológicos com os sociais institucionais, devem incorporar-se novas idéias. As idéias que me refiro provêem dos trabalhos de M.M. Bakhtin (...)*".

[15] Entendemos por <u>articulação lingüística</u> o uso próprio da linguagem nos movimentos de fala, como a vocalização (na fala externa ou na egocêntrica) ou incluindo a abstração destes movimentos no "falar consigo mesmo", que alguns autores denominam de "fala interior" ou "fala interna".

O fato de fazermos uma mesma afirmação, embora com justificativas diferentes (uma: "porque o Sol sobe no céu" ; outra: "porque a Terra se move") que nem sempre são explícitas juntamente com a afirmação feita, nos conduz a observações pertinentes a esse tipo de ação, como:

•a estrutura da fala não é um simples reflexo da estrutura do pensamento[16];

•o pensamento sofre inúmeras transformações antes da tentativa de o expressarmos através da fala;

•o que, efetivamente se diz, tem sempre um modo de ser elaborado mentalmente, o qual pode variar (por exemplo, pode-se partir de princípios diferentes) mesmo que se expresse numa só proposição;

•quando se dizem coisas a respeito de um objeto, já se considera, na fala, aquilo que as produziram (embora estas considerações nem sempre sejam observáveis para uma terceira pessoa) _ uma demanda de algum *interlocutor*[17] que fez estipular alguns princípios ou situações da qual se partiu _. A fala é, nesse sentido, uma "resposta", mas este processo acontece e, parece completo, para quem está a dizer;

•quando há certa convivência (maior contato psicológico, coincidência de pensamentos) entre os dialogantes, a fala tende a ser mais abreviada e, por *maiores razões, isto acontece em termos de fala interior*[18].

Ainda sobre a natureza social da enunciação, observamos que Bakhtin a enfatiza dentro da semiótica, ligando indissoluvelmente o signo à situação social como forma de exprimir a ideologia.

> *A comunicação verbal [...] implica conflitos, relações de dominação e de resistência, adaptação ou resistência à hierarquia, utilização da língua pela classe dominante para reforçar seu poder etc* (Bakhtin, 1988, p. 14).

---

[16] Melhores referências em Vygotsky (1995, p. 109). Também em Vygotsky (1991, v.I, p. 129 e 440-443 e v.II, p. 287-367) encontramos a respeito da interação do pensamento e da fala (linguagem oral), bem como a relação da palavra no modo de analisar a ontogênese do pensamento.

[17] Observando que interlocutor não necessariamente é uma pessoa, mas qualquer agente que propicie desenvolvimento cognitivo no sujeito (Lins, 1994).

... não são palavras o que pronunciamos ou escutamos, mas verdades ou mentiras, coisas boas ou más, importantes ou triviais, agradáveis ou desagradáveis etc. A palavra está sempre carregada de um conteúdo ou de um sentido ideológico ou vivencial (Bakhtin, 1988, p. 95).

Assim, nas relações sócio-epistêmicas[19] abordadas nesta pesquisa (por exemplo, presentes na produção de conhecimento em sala de aula ou fora dela, no estudar de enunciados matemáticos veiculados e nas enunciações por professores e alunos), os argumentos e proposições estarão considerando, como essencial à construção e organização do pensamento e à produção do conhecimento, uma unidade dialética entre o pensar e o manifestar-se[20]: a *fala*.

Através da fala, mesmo no falar consigo, o sujeito responde a uma certa demanda de seu(s) *interlocutor(es)*, e acontece a ação de "falar de", ou "falar a partir de".

... o papel dos interlocutores é o mesmo, sejam "internos" ou "externos" [...] em ambos os casos o sujeito fala para modos de produzir significado, pergunta a eles e para eles olha em busca de sinais de que está falando adequadamente (Lins, 1994, p.33).

O falar de uma pessoa geralmente envolve, em uma interação dialógica, seus pensamentos e seu interlocutor; uma simples enunciação nesta ação, exige intencionalmente certos significados e não outros. A atividade de falar, além de organizar a expressão verbal que permite a produção e exteriorização dos significados, em sentido inverso também é orientada e modelada por essa expressão verbal.

... a enunciação é o produto da interação de dois indivíduos socialmente organizados e, mesmo que não haja um interlocutor real, este pode ser substituído pelo representante médio do grupo social ao qual pertence o locutor. A palavra dirige-

[18] Uma abordagem ampla sobre fala interior, sua ontogênese em relação à fala "egocêntrica" (com discussões paralelas do ponto de vista piagetiano), podemos encontrar em Vygotsky (1995, p. 119-132).

[19] Por relações sócio-epistêmicas entendemos aquelas em que a produção de conhecimento é vista como: se relacionando ou na dependência direta de fatores sociais (e não somente de fatores mais "pessoais" como os psicológicos e biológicos).

[20] Consideramos a fala como **unidade dialética** tendo em vista suas características, como: (i) ao mesmo tempo que reflete o pensamento em um certo momento t_1, não reflete o pensamneto em um momento t_2; (ii) a unidade do pensamento e de seu manifesto dá-se em uma diversidade na fala; (iii) é a unidade básica da enunciação e do diálogo, constituindo um método de investigação do pensar, uma representação dialógica do pensamento.

se a um interlocutor: ela é função da pessoa desse interlocutor (Bakhtin, 1992, p.112-113).

Sempre que falamos (mesmo na fala interior) a demanda vem a partir de <u>interlocutor</u>(es) do nosso contexto social, para o(s) qual(is) falamos e por quem (ou o quê) desejamos ser compreendidos e em função do(s) qual(is) passamos a produzir <u>*significado*</u> _ o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto.

Ao termos pessoas por interlocutores, isso implica na necessidade de se fazer compreender, em procurarmos estabelecer um freio para a diversidade dos sujeitos que falam, pois embora falem a mesma língua, não falam exatamente igual. Ou seja, dá-se a procura, a negociação de convenções próprias, de *estipulações locais* que permitam pensar em "torno" delas, produzindo-se *significados* e *conhecimentos* iguais ou bem próximos.

No plano científico, por exemplo, há uma busca constante e preponderante dessa uniformidade, a partir da própria linguagem e da diversidade imposta pelos pensamentos e conhecimentos dos sujeitos. Isso pode ser constatado, na Matemática, pela especificidade de sua linguagem e formação de suas teorias. Pois, quando é que uma teoria ou resultado se agrega à Matemática? Vários fatores podem ter influência (como: ser considerado verdadeiro dentro da Matemática, ter o devido rigor matemático,[21] seu autor ter poder explanatório, ter poder político, ser algo de interesse ou não em manter determinados paradigmas e outros[22]), porém, há um fator básico _ a "exatidão", a especificidade quase que singular dos significados convencionais da Matemática _ que sempre antecede

[21] *Em Ferreira (1994, p. 572), encontramos em sentido figurado,* ***rigor****, como:* <u>precisão</u>, <u>exatidão</u>, <u>clareza</u>. Bicudo (*1992, p.61*) diz que: "*o que têm em mente os matemáticos, quando tratam do rigor em sua ciência é o lado sintático do rigor. Como no âmbito de qualquer linguagem, desse ponto de vista, ser rigoroso em Matemática significa proceder de acordo com as regras de sua gramática, a LÓGICA.*" Sobre a função do rigor matemático e do embate de alguns autores a respeito de rigor "*versus*" intuição, esse *mesmo autor (p. 64) afirma: "... a intuição é construída no tratamento cotidiano das questões e que a 'segurança' da intuição, baseada na familiaridade com as questões tratadas, se esboroa de encontro a situações novas, que ultrapassem os limites daquelas que ajudaram a construir. Aí, então, o rigor é fundamental para liberar tais situações de tudo o que não seja essencial e, desse modo preparar o verdadeiro terreno em que vicejará uma nova intuição. [...] Mesmo que não percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou na possibilidade de sua criação. É o equilíbrio das tendências de DIFERENCIAÇÃO (intuição) e UNIFICAÇÃO (rigor) [...] Essa é a função do rigor: não apenas sancionar a intuição, mas também possibilitar a sua construção.*"

[22] Uma abrangente discussão a respeito desse e de outros assuntos correlacionados, encontramos em Fourez, G., ***A Construção das Ciências***, São Paulo: Editora UNESP, 1995. Mais especificamente, sobre os desenvolvimentos destacados da Matemática, temos Gillies, D., ***Revolutions in Mathematics***, New York: Oxford Science Publications, 1995.

aos demais (em relação à linguagem). Este faz com que, ao se escrever um enunciado matemático, a transposição em relação ao pensar matemático que já é sistemático (no sentido lógico), seja mais sistematizada e formalizada[23] ainda, e, sempre no intuito de que o primordial é possibilitar a retomada (compreensão, interpretação análoga) do resultado ou teoria por qualquer matemático pertencente ao grupo de especialistas[24] no tema (independente de sua língua usual). Nesses moldes, o objetivismo abstrato de tratamento da Matemática beneficia arbitrariamente a uma certa unicidade na produção de *significados*, em "princípio", dinâmicos e plurivalentes (se produzidos em uma linguagem não científica, cotidiana), em significados do tipo literais (próprios à linguagem matemática), estáticos e monovalentes.

A par das características e imposições próprias à linguagem matemática, sobre as quais citamos algumas referências acima, o professor diante do ensino quer que o aluno aprenda a construir determinados significados, que faça enunciações de modos especificos[25] (primando inclusive, cada vez mais, pelo rigor).

No Cálculo, por exemplo, considerando a constituição de significados que é requerida (pela demanda do professor ou de uma "autoridade" atribuída ao livro

[23] Estamos nos referindo a ***formalizadas*** no sentido de Ferreira (1994, p. 304), em que, formalizar é : "*assumir uma aparência de formal*" e formal : "*evidente, claro [...] preciso, [...] que não é espontâneo, que se atém as fórmulasestabelecidas; convencional*".

[24] Pois, neste sentido, concordamos com o que diz Davis & Hersh (1995, p. 49): "*O trabalho produzido pelo matemático ideal é inteligível por apenas um* ***pequeno grupo de especialistas****, totalizando algumas dúzias ou, no máximo, umas centenas.*"

[25] As caqracteristicas essenciais dos matemáticos profissionais (professores e/ou pesquisadores) em seu trabalho com a Matemática, bem como as especificidades de suas concepções e tutelas, são centrais nos estudos e pesquisa de Silva (1993). A página 219, ela diz: "*O trabalho com Matemática é um ato de verificação interna no sentido em que a verificação da validade de uma determinada afirmativa, ou o encadeamento/conexão de elementos de ou para afirmativas, dispensam, em primeira instância referências outras, de natureza material.. Ultrapassados os elementos iniciais para o desenrolar da tarefa, a continuidade depende do aluno ter adquirido ou não o esquema de verificação na situação determinada pela especificidade do trabalho, passando 'aluno-orientador-grupo' a um nível de cumplicidade.*" Isso realça a "tutela" no fazer e na aceitação dos modos de se trabalhar a Matemática desde pequenos grupos, em sala de aula.

Quanto à natureza deste fazer, gostaríamos ainda de acrescentar que apesar de filósofos, como Lakatos, terem investido em defender contra o dogmatismo da Matemática (formalista ou logicista), ou seja, a favor de uma epistemologia da falibilidade, mesmo em se tratando de Matemática, ainda hoje se tem os legados arraigados de filosofias anteriores (como o platonismo) ao fazer matemático. Isso pode ser notado na prioridade concedida ao estabelecimento de fundamentos seguros, dando ênfase ao formalismo, ao logicismo e à intuição. Nessa direção, é propícia a afirmação feita por Davis & Hersh (1995, p. 337) de que idéias platônicas ajudam a conservar uma certa teimosia a respeito dos fatos matemáticos (que estendemos também aos objetos matemáticos): "*Eles são o que* ***são*** *e não o que* ***queremos*** *que sejam.*"

texto, as mais comuns encontradas em nossa pesquisa) em relação a *limite* (limite Weierstrassiano), observamos uma tendência de vinculação, inclusive na seqüência do conteúdo, de ter este objeto (*limite*) na construção de quase todos os significados e conhecimentos posteriores. Isto continua a contribuir para a característica de maior especificidade da linguagem matemática que apontamos acima e, conseqüentemente, uma menor generalidade de entendimento fora dela.

Essas questões da linguagem nos levam, portanto, a pensar sobre a função semântica (produção de significações) juntamente à função semiótica (uso dos signos, dos semas[26] _ para o matemático mais em processos gráficos da linguagem escrita, simbologia matemática, diagramas) _ ligadas aos objetos matemáticos.

Muito embora fuja de nossos objetivos, nessa pesquisa, fazermos estudos e abordagens do ponto de vista da lingüística, estamos cientes de que estas questões estão presentes nas leituras e certamente fazem parte das interpretações.

Em sala de aula destacamos a enunciação, o falar, a palavra (oral ou escrita, diagramas), como material essencial das relações entre alunos e professores, embora como já dissemos anteriormente, transpassada pelas questões da linguagem.

> *A forma lingüística é sempre percebida como um signo mutável. [...] o conteúdo ideológico, o relacionamento com a situação social determinada, afetam a significação. O valor novo do signo, relativamente a um "tema" sempre novo, é a única realidade para o locutor-ouvinte. Só a dialética pode resolver a contradição*

---

[26] Segundo E. Buyssens (1974, p. 21), desde os textos de Saussure os semiólogos estudam a vida dos signos no seio da vida social, em uma ciência chamada Semiologia. À p.34, afirma: "*A palavra **sema** designará qualquer processo convencional cuja realização concreta (chamada ato sêmico) permite a comunicação". [...] "Dentro de uma mesma semia, os **semas** destinam-se a ser realizados geralmente por processos similares: os matemáticos recorrem a processos gráficos, os trapistas a gestos".* E. ainda à página 52 diz que, o caráter abstrato de polivalência de um ***sema*** pode levar a constituição de significações diferentes segundo as circunstâncias em que é empregado.

Já o semiólogo Verón (1980, p. 27-63) ao falar sobre a trajetória lingüística, afirma que não se tem como expulsar as considerações psicológicas e sociológicas, até então ditas "extralingüísticas", referentes ao contexto, para o campo da pragmática; ou seja, não se pode mais considerar a trilogia sintaxe/ semântica/ pragmática, porque não existem fronteiras demarcáveis entre elas; transpondo assim, a teoria "de predominância sintáxica" ou a chamada "*teoria standard*" de Chomsky. Leva em conta a atividade de linguagem como um sistema complexo de *operações* sobre uma *matéria significante*, cujo suporte é um sujeito enunciador (produtor de discursos, que ao serem analisados, a análise semântica exige o relacionamento das frases entre si, relacionamento com o contexto sócio ideológico em que foram produzidas).

aparente entre a unicidade e a pluralidade da significação (Yaguello, na introdução da obra de Bakhtin, 1995, p. 15).

A produção de significados, durante uma atividade em sala de aula, por ser dinâmica e diversificada, é muitas vezes difícil de ser acompanhada, de saber identificar "onde" está o aluno, que ainda não fala a partir de uma Matemática (especificamente do Cálculo) como o professor. Cuidar dessa diversidade é uma maneira de poder estar realmente dialogando com o aluno, e de ser um interlocutor compreendido, ou de ter no aluno um interlocutor.

Mais amplamente, observamos que, a intenção consciente do querer-dizer do aluno pode ser pesquisada na verbalização e nas ações em meio às atividades. O que não significa que, por exemplo, tais atos sejam formas cristalinas de compreensão por parte de qualquer professor ou aluno atento. Outros fatores _ a fissura na própria linguagem (provocada por símbolos lingüísticos excluídos da comunicação pública), os gestuais, os fonéticos e os psicológicos _ provocam omissões e alterações significativas, aos quais estamos expostos e sempre nos deparamos ao tratar com aprendizagem.

Contudo, a centralização dos trabalhos desta pesquisa, sempre que possível, se restringirá em torno da constituição de conhecimento no que tange mais à <u>análise epistemológica</u>. Mesmo em questões de linguagem, estaremos subjugando a nossa concentração aos <u>significados</u> produzidos pelos sujeitos, tendo em vista o modelo epistemológico (MTCS). Porém, essa forma de agir, não nos veda a possibilidade de observações em outras áreas, que podem vir a ser fontes de investigações futuras dentro do ensino/aprendizagem no 3° grau.

Nossa atenção foi instigada a voltar-se por diversas vezes ao campo da psicologia. De um modo especial, também ao observamos a importância e os argumentos de Jerome Bruner a respeito dos processos envolvidos na construção de <u>significados</u>.

Este autor diz em seu livro, *Atos de significação*, que: "*as experiências e atos humanos são moldados por seus estados intencionais*" (Bruner, 1997b, p. 39) e que a forma desses estados intencionais se realiza apenas através da participação do homem em sistemas simbólicos da cultura. Para ele, a mente não é um mero "processador de informações", mas uma criadora de significados dentro de um meio cultural que a constitui e é por ela constituído.

Uma característica importante de ser notada nessa psicologia cultural é o que ele denomina de "psicologia popular" ou "senso comum" _ um sistema através do qual se organizam nossas experiências no mundo social _ experiências, estas, que contribuem para produzirmos o que chamamos de "um conhecimento do mundo", que se exterioriza principalmente em forma de crenças na realização de nossos desejos e ações.

Desse mesmo "senso comum", fazem parte alguns discursos de pesquisadores sobre a aprendizagem a partir do Cálculo, por exemplo, nas falas e escritos dos alunos observados por Cornu e Tall (nos trabalhos que anteriormente citamos) encontramos o que eles denominaram, respectivamente, de "concepções espontâneas" e "concepções próprias"; também nos relatos de Rezende, em que podemos observar a contribuição da "psicologia popular" nas respostas dos alunos a seus questionamentos, no decorrer de sua pesquisa de campo. Para melhor entendimento desse segundo exemplo, escolhemos uma das questões que Rezende propõe aos alunos, e duas das resposta dos alunos.

<u>Questão</u> : "*Procure dar uma definição para a noção de infinito, discutindo a sua existência ou não como objeto matemático, enumerando os "tipos" que você consegue identificar. Procure dar exemplos para cada um dos tipos que você encontrou [...]*

<u>Respostas</u> : 1. *Estamos sempre acostumados a resolver problemas de um modo geral que estão ligados a realidade e, de repente quando nos enfrentamos com outros do tipo que envolvem a noção de infinito, ficamos com dificuldade. Por exemplo,* $\lim_{n\to\infty} e^n = e^x = \infty$ *é um exemplo difícil de entender mas que com a prática se toma mais fácil. [...]*

2. *Infinito é muito vago, você não consegue defini-lo mas você pode dizer que existem infinitas estrelas no céu, infinitos grãos de areia na praia; pois você não consegue contá-los, mas você sabe que existem muitos*" (Rezende, 1994, p.108).

Em sua análise Rezende observa que nestas respostas há um "*predomínio da atitude finitista*" e que, apesar do aluno, cuja resposta é a de número 1., não "entender", "*é mais um exemplo no ensino da matemática onde a prática, em geral, substitui e justifica o significado do conceito*". Ao que, pensando no processo de produção de significados discutido por Bruner, não diríamos que a prática "*substitui*" o significado de um conceito formal que está, assim, sendo produzido para o professor (ou talvez para algum leitor), mas que é em meio à prática que ele (o aluno) produz seus significados e estes nem sempre são, mesmo que possam vir a ser, os que o professor deseja que ele produza. Podem ser significados produzidos a partir de estipulações locais do senso comum (específicos) e não de objetos e definições formais matemáticas.

> *Eu acredito que seremos capazes de interpretar os significados e a produção de significados de uma forma orientada por princípios apenas na medida em que formos capazes de especificar a estrutura e a coerência dos contextos mais amplos nos quais significados específicos são criados e transmitidos* (Bruner, 1997b, p.60).

Ou seja, ainda lembrando Bruner, nossa formação psicológica cultural busca constantemente regras (ferramentas as quais possamos facilmente manusear) juntamente aos modos (matemáticos) de produção de significados. Conforme o uso dessas regras dentro das nossas demandas, elas tornam-se estipulações locais nos *núcleos* de modos de produção de significados, como em Cálculo: os algoritmos de derivação e integração, as regras práticas de se calcular um limite e outros.

É com esta mesma idéia _ de que tomamos certas "coisas" (*estipulações locais*) como dadas _ que podemos admitir a "realidade" como uma construção conceitual. Um *mundo real* dentro de uma relativização mais próxima ao que trata Bruner (ao citar as "*construções de mundos*" por Goodman):

> *... o mundo em questão não é independente das versões: os próprios objetos e o tempo e o espaço que eles ocupam dependem da versão. Nenhuma organização em unidades é única ou obrigatória, e não há qualquer matéria-prima desprovida de marcas características por trás de diferentes organizações. [...]*
>
> *... construímos mundos com o auxílio de sistemas simbólicos através da atuação em um "mundo dado" que tomamos como certo* (Bruner, 1997a, p. 106).

Ao falar em como o ser humano aprende a produzir significado, Bruner nos coloca diante de um campo interpretativo e narrativo[27] que diz ser inerente a essa produção. Em concordância com esse autor, reafirmamos que, ao estudarmos estes campos observamos o quanto os sistemas simbólicos de nossa realidade dependem fortemente de uma linguagem _ sistema de signos (lingüísticos ou não) convencionais _.[28]

Por acreditarmos nessa dependência da aquisição da linguagem em meio ao <u>fazer</u>, no qual não só se aprende o *que* dizer, mas *como*, *onde*, *para quem* e *sob que circunstâncias*, é que este <u>fazer</u> torna-se um fluxo de importantes reflexões em nossa pesquisa. A linguagem (incluindo os gestos ou qualquer outro tipo de sema[29]) é o meio fértil de analisarmos as produções epistêmicas. Portanto, no nosso caso, com respeito às observações de atitudes pedagógicas, priorizamos aquelas que nos permitem observar mais a <u>fala do aluno</u> em meio às suas atividades, mediante os seus interlocutores e às suas respectivas demandas.

---

[27] Para Bruner (1997 b, p. 78), ser capaz de **narrar** de forma a colocar convincentemente seu argumento, "*requer não apenas linguagem, mas um domínio das formas canônicas, pois é necessário fazer nossas ações parecerem uma extensão do canônico transformando-as através de circunstâncias atenuantes*".

[28] Dentro da lingüística há por vezes a distinção entre **língua e linguagem**. Bakhtin (1995, p. 86) diz que, para Saussure, "*a linguagem é multiforme e heteróclita: participando de diversos domínios*", pertencendo ao domínio individual (físico e psicológico) e social. Enquanto que "*a língua é um todo em si mesma e um princípio de classificação. [...] A língua não é função do sujeito falante, ela é um produto que o indivíduo registra passivamente. [...] A língua é um sistema de formas.*"

Encontramos, de um modo mais geral, citado por Bicudo (1992, p.62): "*... podemos entender por LINGUAGEM qualquer processo de comunicação. Mais tecnicamente, LINGUAGEM é 'um conjunto complexo de processos _ resultado de uma certa atividade psíquica profundamente determinada pela vida social_ que torna possível a aquisição e o emprego concreto de uma LÍNGUA qualquer'.*

A LÍNGUA é um sistema gramatical: um conjunto organizado e positivo de relações, adotado por determinada sociedade para permitir o exercício da linguagem entre os homens".

[29] Segundo Buyssens (1974, p. 34 e 50) um **sema** é qualquer processo convencional que permita ao sujeito dialogar, que permita a comunicação. Pode ser de natureza da fala, dos gestos, dos sons, dos gráficos visuais, e outros.

Capitulo 5

UM ESTUDO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

5.1 INTRODUÇÃO

Recorremos à uma análise da História da Matemática principalmente pela riqueza de suas partes significantes, em relação ao Cálculo, em termos de concepções que subjazem os principais fundamentos e problemas detectados na prática de seu ensino/aprendizagem *e em torno dos quais* centramos esta pesquisa.

Em toda a história que envolve a constituição do que se chama hoje Cálculo, podemos notar uma preocupação dos historiadores com a descrição fiel dos fatos, no desejo de mostrar uma recomposição dos mesmos. Mas como há sempre a interpretação de quem escreve e que está limitado, entre outras coisas, pela formulação própria da linguagem, vale lembrar que, uma coisa é o fato (temporal) e outra é a interpretação do *fato* (pós-temporal); *juntando-se* a isso a seguinte constatação: o que chamamos de história foi estabelecido como verdade em *oposição ao mito, quando* se formavam as nações do séc XIX, com o objetivo de oferecer genealogias a essas novas representações políticas.

A história, enquanto discurso, é constituída por palavras, e o significado da palavra é constituído também na história. Um exemplo disso nos dá I. Pessotti (prof. titular de psicologia da USP-Ribeirão Preto): *catástrofe* hoje não significa mais do que desastre ou desgraça; algo muito diferente da "katá strophé" dos gregos, que significava retorno, reordenação, o retorno à serenidade após as emoções intensas do "phatos".

Assim, a linguagem e o contexto podem ser considerados partes importantes na compreensão do acontecido, principalmente em se tratando de uma investigação sob considerações epistemológicas.

O objetivo principal dessa investigação histórica é de nos conduzir a uma abordagem da História do Cálculo para buscar entender, nas idéias articuladas a partir do texto, as convergências e diversificações possíveis na produção de significados, objetos e conhecimentos. O fato da produção dos objetos ser reportada historicamente a diferentes grupos sociais torna importante evidenciar a função semiótica (na representação pelo uso de signos, dos semas) e semântica (na produção de significados literais) na leitura dos discursos escolhidos para análise.

Nesta parte histórica da Matemática, a ligação presente com outras áreas da ciência é de importância na análise histórico-epistemológica; nela devem ser levadas em consideração as idéias de outros grupos sociais, que envolveram-se com a Matemática embora não tendo na mesma seu objetivo mais direto, como os de físicos e astrônomos. Suas idéias de certo modo "persistiram" no tempo, influenciaram outras e chegaram até nós com significados e valores veiculados pela linguagem de hoje, incorporando-se ao próprio processo de produção de significados, que deve ser explicitamente tratado em sala de aula de Cálculo visando a análise de seu ensino e aprendizagem.

Para olhar o modos pelos quais os objetos e conceitos do Cálculo eram tratados, fizemos leituras dos textos não de modo imediato a aquiescer em busca do verdadeiro sentido do texto ou tentando purificar as partes matemáticas de todo o aparato entre as idéias técnicas e filosóficas que envolvem as diretrizes históricas, mas cientes de que temos reflexos distorcidos, aspectos parciais vislumbrados através do filtro da distância histórica.

Estabelecemos pressuposições para nossa análise histórico-epistemológica dentro de nossos referenciais teóricos, sem perder de vista a possibilidade de destacar a existência de modos distintos de produção de significado ao estudarmos a filogênese de objetos matemáticos a partir do Cálculo.

A escolha de certas idéias na história do Cálculo, para analisar neste trabalho, provem principalmente de significados que podem ser produzidos pelos alunos em nossa prática de sala de aula de Cálculo e é ratificada pelo aparecimento de determinadas constatações nos registros históricos e de pesquisas já empreendidas (como as que nos referimos no Capítulo 3).

Em especial olharemos aspectos referentes à História da Matemática no que concerne à diferencial e integral em seus fundamentos básicos polêmicos, que envolvem os infinitamente grandes ou infinitamente pequenos e a noção de limite.

5.2 O SEU INTERESSE NA PESQUISA

O desenvolvimento psíquico do indivíduo, incluindo suas funções mentais superiores (linguagem, atenção voluntária etc), resulta em grande parte da ação da sociedade sobre ele e do seu esforço conjunto de integrar a complexa rede de relações sociais, imbuída de culturas e ideologias predominantes. O Cálculo, dentro da Matemática e junto às demais ciências, durante muitos séculos tem ocupado papel relevante na construção de muitas destas redes.

Esta pesquisa histórico-epistemológica, por estar ligada a essas construções, dá um maior embasamento e solidez aos resultados de um trabalho que procede de um meio social (sala de aula de Cálculo) e, de cujos objetos e conceitos, estabelece relações com seus "ancestrais".

A perspectiva histórico-epsitemológica se adequa bem ao nosso trabalho de pesquisa como um todo, uma vez que vem integrar e subsidiar os objetivos propostos. O primeiro deles consiste em mostrar como as idéias se estabelecem segundo significados dos grupos sociais em que foram elaboradas, levando em consideração os aspectos convencionais (culturais-ideológicos) em que são inseridos os indivíduos criadores. Evidenciamos, segundo nossas leituras, as estipulações locais predominantes em relação às quais os indivíduos de público reconhecimento demonstram suas produções em meio às atividades matemáticas.

Semelhante à postura em sala de aula, quando destacamos a enunciação, o falar, a palavra (oral ou escrita), como material essencial das relações e nas mediações pelo outro, também na pesquisa histórico-epistemológica encontramos uma fonte de análise nos discursos, mesmo sendo, como já dissemos anteriormente, traspassada pela linguagem e o tempo. Os discursos serão sempre parte essencial na compreensão do acontecido.

Quando hoje, olhamos para o transcorrer do desenvolvimento histórico do Cálculo, pensando em termos dessa análise dos discursos, seguindo o que constituímos como trilhas dos métodos infinitesimais, aparece destacadamente o problema da antinomia entre o discreto e o contínuo: na continuidade dos entes geométricos, na divisibilidade *ad infinitum* ou na existência atomística dos indivisíveis. O segundo objetivo então se coloca ao observarmos os fatores que possam ter contribuído para essa mudança ou permanência da linguagem usada na produção de objetos matemáticos (por exemplo: infinitésimos por Newton e Leibniz) que, de certo modo, ainda constituímos. Uma vez que é objetivo nosso detectar algumas conseqüências em se olvidar tanto o aspecto formativo desempenhado pela linguagem quanto a observação dos CS no ensino e aprendizagem de Cálculo.

Portanto, a análise histórica neste trabalho foi fruto de leitura de diversos historiadores de Matemática que deixaram transparecer (no nosso entender) palavras que parecem estabelecer (na época em que as reportamos) contradições ou mesmo conflitos entre o estipulado real, portanto racionalizáveis, e o imaginário abstrato. Concepções matemáticas tais como: "zero", "negativo", "paralelas", "incomensuráveis", "infinito" (infinitamente grande ou infinitamente pequeno), "imaginário" etc, carregadas de convenções[1], provocaram os matemáticos até o séc. XIX, influenciaram na história do Cálculo e, ainda hoje, suscitam questões (em pleno séc.XX) quando se inclui, por exemplo, o infinito real (atual) em certos contextos matemáticos, a propósito de uma das questões mais polêmicas para o homem: o infinito.

[1] Convenções aqui designada pelo uso léxico de : ajuste ou determinações sobre um assunto, fato, norma etc: aquilo que se acha tacitamente admitido nas relações sociais.

Numa recente discussão, no periódico internacional University of California Publications in Philosophy, Peter Geach ao comentar sobre a questão do infinito, mostra como já se fazem diferenciações, em termos da linguagem, ao se distinguir infinito categorimático e sincategorimático, citando Leibniz e Robinson como compartilhadores nessas distinções. Diz que, a distinção entre infinito potencial e infinito atual (real) é uma distinção entre dois modos de dizer que coisas "além de" são infinitas, enquanto que "categorimático" e "sincategorimático" são palavras usadas para multidões infinitas quando elas são, respectivamente, um 'objeto lógico ou predicado', um 'pronome ou advérbio'. Geach exemplifica na seguinte frase de Spinoza: "*... are infinite Divine attributes*", onde o autor quer dizer que "cada atributo é um atributo infinito" e, nesse caso, é categorimático, enquanto que se fosse interpretado como "existindo infinitamente muitos atributos" seria sincategorimático.

Esse tipo de discussão, envolvendo a matemática, e o modo de se falar dela, exemplificam o aspecto formativo desempenhado pela linguagem, ao qual nos referimos anteriormente.

Um último ponto ao qual a pesquisa histórico-epistemológica pode contribuir é no respaldo quanto a influência da prática social, no sentido da atividade dos interlocutores (para os quais se fala) poder somar na escolha da produção de significados.

5.3 OS SIGNIFICADOS INFINITESIMAIS E A NOÇÃO DE LIMITE

5.3.1 Os incomensuráveis

Os gregos, em 450 a.C., tratando a princípio com números inteiros naturais e suas razões, ao começarem a fazer comparações de grandezas geométricas de mesma espécie em inúmeras figuras conhecidas, como: quadrado, pentágono regular e cubo, descobriram que existiam coisas, como segmentos de reta, *incomensuráveis* (duas grandezas que não eram possíveis de serem medidas por qualquer unidade comum), não importando quão pequena se tomasse a unidade de medida.

Ou seja, os filósofos gregos (eleáticos, pitagóricos etc) lidavam com a comparação de grandezas de mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas, ou dois volumes. Durante muito tempo parecem ter pensado que dados dois segmentos de retas AB e CD, seria sempre possivel encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em CD, ou seja, que AB fosse m vezes EF e CD n vezes EF.

E os dois segmentos AB e CD eram ditos **comensuráveis**.

Se imaginamos EF tão pequeno quanto queiramos, nos convencemos, pela intuição geométrica (muito presente), de que seria realmente possível sempre encontrar um tal segmento EF.

Pensando em termos do nosso modelo teórico, podemos observar que, nesse caso, os significados, objetos (como os segmentos comensuráveis) e conhecimentos, eram produzidos em um CS em relação a estipulações locais visuais-geométricas.

Nos diálogos de Platão (427 - 347 a.C.) a partir das discussões de Teaetetus (414-369 a.C.) com Sócrates e Teodoro, sobre a natureza das grandezas incomensuráveis, pode-se observar o assombro provocado por esta descoberta que contrariava, principalmente para os pitagóricos, sua fé radical nos números (chamados *arithmoi*); lembrando que na cultura grega distinguimos pelo menos dois grupos importantes (na História da Matemática) de filósofos, de um lado os eleáticos _ seguidores de Parmênides de Elea (~ 450 a.C.) que acreditavam no *Uno*, na unidade e permanência do ser, e de outro lado os pitagóricos _ seguidores de Pitágoras (~ ?580 - 500?) que postulavam que o número era a matéria básica de tudo (sendo esses números mais "semelhantes" aos que designamos hoje de inteiros positivos e suas razões)[2].

> "*When the early Pythagoreans said that all objects were composed of (whole) numbers or that numbers were the essence of the universe, they meantit literally, because numbers were to them like atoms are to as*" Kline (1990, p. 29).

Os números eram definidos a partir de coisas, de coleções de coisas.

> "*Aristotle stresses again and again that it is characteristic of the Pythagorean view that they do not make number separable [from the things]; this means that they do not go so far as to suppose the existence of 'pure' numbers of 'pure' units, although they were the very men who concerned themselves with numbers not for a pratical but for a theoretical purpose, who conceived of the arithmos as arithmos mathematikos, as cientific number*" Klein (1968, apud Lins, 1992, p.67).

Mas...quando e por quem esta fé radical nos naturais maiores que 1 (chamados *arithmoi*) foi quebrada pelo aparecimento dos **incomensuráveis** ? Boyer (1974, p. 53) diz que talvez por algum pitagórico como Hippasus de Metapontum (~ 400 a.C.)[3]. Existem comentários de que por sua descoberta sobre tais grandezas, que desafiava o "poder"

---

[2] Eleáticos - da escola eleática, em Elea, hoje seria no sul da Itália, que acreditavam no *Uno*, na unidade e permanência do *Ser*.

Proposições de Parmênides:

(1) O *Ser* é.

(2) Esse Ser é "idêntico" ao pensamento conceitual.

(3) O *Mesmo*, o *Idêntico* é o que é simultaneamente "*Ser*" e "pensamento". (O *Mesmo* ou o *Idêntico* é o *Uno*. Antes de Parmênides, o *Uno* é o *Todo*, onde o pensamento tem sua morada, mas não lhe é consubstancial).

Pitagóricos - Seguidores de Pitágoras (~ 580-500 a.C.) que postulavam que o **número** era a matéria básica de tudo.

OBS: Podemos dizer, hoje, que tais "números" - vindos com um processo de contagem - eram assim como as formas geométricas, propriedades de objetos reais; reconhecidos abstratamente, mas advindos das propriedades de corpos físicos. A razão de dois números não era para eles, segundo Kline (1990, p. 32), como um outro tipo de número (como são para nós as frações ou números racionais), mas era empregada no comércio, no cotidiano, e expressava partes da unidade monetária ou de uma medida.

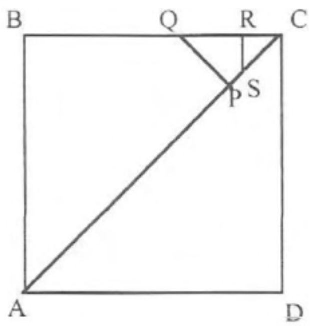
dos números então considerados, Hippasus foi expulso da comunidade em que vivia e afogado no mar.

Aparecem outras demonstrações que debatem esta questão numérica dos incomensuráveis e, a seguir, citamos algumas.

A incomensurabilidade do lado do quadrado em relação a sua diagonal (que hoje relacionamos com a irracionalidade de $\sqrt{2}$), tem uma prova em que a demonstração é produzida em um CS de núcleo predominantemente geométrico, isto é, em relação a estipulações locais visuais-geométricas, num processo que se diz *continuado indefinidamente* . Ou seja :

_ Considere o quadrado ABCD (fig. seguinte). Marquemos então, o ponto P sobre a diagonal do quadrado, tal que AP=AB, e levantemos por P uma perpendicular PQ até o lado BC. Temos um novo triângulo isósceles PQC cuja razão CQ para PC será a mesma de AC para AB. Tomando novamente um ponto R sobre a hipotenusa QC de modo que QR=QP e traçando RS perpendicularmente a CR a razão de CR para SC se mantém.

Assim continuando este processo (indefinidamente) nenhuma "unidade de comprimento" (aqui então vista como um certo segmento de reta), por menor que fosse, tornariam a hipotenusa e o lado comensuráveis.

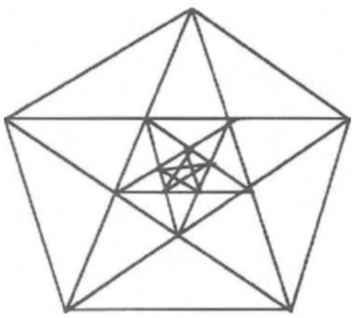


Uma outra prova da existência de números incomensuráveis (por não existir uma unidade ou fração com a qual se possa comparar dois determinados segmentos), usando também este processo de *continuação indefinida*, é a construção da estrela de cinco pontas (símbolo Pitagórico) traçada a partir das

[3]Kline (1990, p.32) também afirma ter sido Hippasus de Metapontum.

diagonais do pentágono. A ela costuma-se vincular o aparecimento dos incomensuráveis não só como assunto relacionado à geometria[4], mas agregado de forma "natural" ao aparecimento do irracional $\sqrt{5}$. Ou seja, ao reportarem-se a este assunto, historiadores[5] utilizam-se da simbologia moderna e representam $\sqrt{5}$ como solução de uma equação algébrica em conseqüência de uma produção em relação a estipulações locais visuais geométricas e algébricas-funcionais (com variáveis ligadas à figura do pentágono), o que determina a impressão de que esta vinculação entre a aritmética, álgebra e geometria (como hoje fazemos) era natural desde a época dos gregos (o que não corresponde em termos dos registros e fontes mais antigas).

Conforme figura a seguir, ao traçarmos as cinco diagonais de um pentágono regular, no centro da estrela formada, aparece um segundo pentágono regular menor de cujas diagonais forma-se um terceiro pentágono regular ainda menor, e assim por diante. De modo que podemos obter pentágonos menores que qualquer pentágono pensado. Disso segue (por uma demonstração geométrica) a afirmação de que a razão entre o lado e a diagonal não pode ser um racional.



Uma observação pertinente é o fato de que não há "mistura", interelacionamento, entre as 'magnitudes geométricas' e qualquer 'grandeza numérica' nestas provas deixadas nos registros, ou mesmo nos escritos posteriores

[4]Heath (1990 apud Lins, 1992, p. 74) nos diz que este assunto era olhado pelos gregos mais propriamente pela geometria do que pela aritmética. Os irracionais, no Livro X de Euclides, são linhas retas ou áreas.

[5]BOYER, 1974,p. 54, AABOE, 1984, p. 68-69.

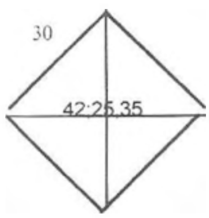
de Arquimedes (~287 - 212 a.C.) e Eudoxo (408 - ~355 a.C.)[6]. O que nos leva a crer que número e geometria eram então tratados, pelo menos "formalmente", em CS completamente distintos.

Reafirmando essas idéias, encontramos em Lins a observação de que:

> "... the important point here is that the Pythagoreans did not deny the study of "irracionals", but the only model that allowed them to continue their study was that of geometry, ie, they made sense of irracionality in the **context of geometric figures**; not only they did not, they **could not conceive the study of geometry as relating to that of numbers**" [os termos em negrito são ênfase nossa] Lins (1992, p. 68).

Por sua vez, Kline (1990, p. 53) diz que Aristóteles (384-322 a.C.) discípulo e colega de Platão, ao tratar os princípios da matemática, afirma que pontos e números são quantidades discretas e portanto distintas das magnitudes contínuas da geometria. Para ele um ponto não tem comprimento, e então uma linha não pode ser composta de pontos, porque ela não teria comprimento. Somente pelo movimento é que um ponto pode gerar uma linha, e originar uma magnitude.

Mas essa distinção entre números e contínuos geométricos, não foi sempre assim. Sobre o descobrimento de "$\sqrt{2}$", também existem registros "mistos" de números e geometria. Historiadores encontraram tablete babilônoco[7], de cerca de 1200 anos antes de Pitágoras (~580 - ~500 a.C.), com a figura de um quadrado (veja tradução aproximada do tablete na figura a seguir)



[6] Struik (1989, p.92) nos diz que " *O raciocínio algébrico em Euclides é expresso totalmente em uma forma geométrica.*". Ou seja, utilizava segmentos de reta e envolvia inconmensuráveis sempre geométricamente, deixando para a aritmética os números ('inteiros') e seus fracionamentos.

[7] YBC 7289 (Yale Babylonian Collection) NEUGEBAUER, 1945, apud AABOE, 1984, p.34-35.

e três valores numéricos (em escrita cuneiforme e base sexagesimal) gravados nele, e interpretados, na escrita atual, como sendo: 30 (o lado do quadrado); 42;25,35 (a diagonal do quadrado) e um terceiro valor 1;24,51,10 que pode ser visto como uma boa aproximação de $\sqrt{2}$ na base sexagesimal, pois

$$(1;24,51,10)^2 = 1;59,59,59,38,1,40$$

que é aproximadamente 2. Já que a diagonal do quadrado é igual a duas vezes o lado do quadrado, isto é, $(42;25,35)^2 = 2\ (30)^2$. O que de certa forma sugere que eles faziam uso do que depois chamou-se de teorema de Pitágoras (pelo menos em problemas específicos, e, notadamente, de <u>modo numérico</u>, sem a preocupação de estar misturando grandezas de espécie diferentes como tamanho de um segmento e área), mas nenhuma equação geral ou fórmula matemática é por eles demonstrada, e nem as regras matemáticas usadas nos cálculos têm qualquer indicação explícita, portanto, os significados eram produzidos a partir de estipulações visuais-geométricas e numéricas. Os números trabalhados (embora fossem boas aproximações de "irracionais") eram sempre em forma de racionais positivos.

Assim, "$\sqrt{2}$", "$\sqrt{5}$" , aparecem em meio aos textos de História antiga como se sempre assim tivessem sido escritos e existissem naquela época como algo "faltoso" em relação ao que constituímos hoje. Isto é, ao tentar observar sobre a História da Matemática estas questões que se relacionam com a noção de "$\sqrt{2}$", ou qualquer outro irracional, significados de racionalidade e irracionalidade são por nós atribuídos aos símbolos, e núcleos subjacentes à essa produção de significados, contendo também estipulações locais a respeito da noção de comensurabilidade, proporcionam a articulação e aproximação dos significados. Vemos, por exemplo, em Boyer (1974, p. 54), sobre o aparecimento de **grandezas incomensuráveis** de origens gregas :

"Não ficaram documentos que resolvam a questão, mas a sugestão é plausível. Nesse caso não seria $\sqrt{2}$ mas $\sqrt{5}$ que primeiro revelou a existência de grandezas incomensuráveis ...".

Que função semântica ele quis dar a $\sqrt{2}$ e a $\sqrt{5}$? De "número irracional" ou de "grandeza incomensurável simbolizada pelo irracional"?

Struik (1989, p. 60), escrevendo sobre a matemática babilônica, diz:

"Muita desta aritmética computacional era feita com tabelas que iam de simples tábuas de multiplicação a listas de recíprocos de raízes quadradas e cúbicas .... Existiam algumas aproximações excelentes: $\sqrt{2}$ era dado por $1\frac{5}{12}$ ($\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $1\frac{5}{12} = 1{,}4167$) ...".

Contudo, o símbolo "$\sqrt{2}$" e as raízes quadráticas não devem nos induzir para tomarmos nossos significados de irracional como os produzidos na época, pois a tradução que nos diz que $1\frac{5}{12}$ <u>é igual</u> a 1,4167 e o autor considera uma boa <u>aproximação</u>, já que $1\frac{5}{12} \cong 1{,}4167$, pois é igual a 1,4166... . Mas, até que ponto os babilônios consideravam como uma aproximação? Ou seja, será que tinham noção da aproximação infinita que poderiam ter? da natureza desse número como temos hoje? Difícil de avaliar. Ficam as questões: "$\sqrt{2}$" seria mais próximo à noção de racional ou de irracional? Será que ao trabalho daquela época, mesmo observado hoje, onde essas regras são encontradas em prescrições rituais relacionadas a construção de altares, não bastava saber que (por exemplo) a relação entre a diagonal e o lado do quadrado era o número 1,4167, ou qualquer outra boa aproximação? Ou quem sabe esta "boa aproximação" se fazia só no campo das razões de magnitudes geométricas homogêneas, onde a unidade era uma unidade tomada geometricamente para fins práticos, devido aos cálculos mais sofisticados dos problemas de astronomia envolvendo equações com números e variáveis?

São possibilidades e demonstrações não descartadas e igualmente prováveis, mas que demonstram uma diversificação (ora visuais-geométricos, ora numéricos) na produção de significados a respeito dessas novas grandezas (ou novos números) que surgiam.

Continuando a busca histórica sobre os incomensuráveis, encontramos na dedução matemática e na exigência de demonstrações introduzida pelos gregos, como um dos primeiros exemplos de "demonstração por impossibilidade" em matemática que se conhece _ a demonstração da não-racionalidade de $\sqrt{2}$ _. Essa demonstração, de autoria de Aristóteles (descrita na próxima página), tem como base o teorema de Pitágoras para triângulo retângulo e o fato de um número não poder ser ao mesmo tempo par ou impar, o que, em cerca de 325 a.C, levou Eudemo de Rodes a dizer, comentado posteriormente por Próclus: "*a Pitágoras devemos a descoberta dos irracionais*". No testemunho de Platão em Theaetetus, as demonstrações da "*irracionalidade*" (supostamente não tratadas em termos numéricos) de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ até $\sqrt{17}$, são atribuidas a Teodoro de Cirene (mestre de Platão), mas segundo Bourbaki não se sabe se as demonstrações foram feitas pela aritmética ou pela geometria[8].

Reiterando nossos comentários, os enunciados sobre números se reservava para os inteiros naturais (1 era considerado a mônada e não um número própriamente dito), incluindo-se também as razões deles. Aristóteles tratava um ponto Pitagórico como "*uma unidade tendo posição*"[9], como imbuído de certas características numéricas, ou seja, ele produzia para um ponto significados em relação a estipulações numéricas, ao que Zenão (~ 450 a. C.), apesar de pertencer

[8] Cf. BOURBAKI (1976, p. 203).

[9] Cf. STRUIK (1989 , p.78 - 79).

Pois para Aristóteles um ponto era indivisível e tinha posição. Admitia uma descrição de números (figurados) por pontos em certas formações: . 1 . . 2 ∴ 3 etc.

aos eleáticos se contrapunha duplamente, em relação ao *Uno* (de seu grupo) e à multiplicidade e mudança determinada pelas idéias pitagóricas,

> "*Se o Uno não tivesse grandeza, ele nem mesmo existiria. Mas se ele é, cada Uno [?] deve ter uma certa grandeza e uma certa espessura e deve estar a uma certa distância do Outro, e o mesmo pode ser dito deste; pois este será também uma grandeza, e alguma coisa estará diante dele. É a mesma coisa dizer isso uma vez e dizê-lo sempre. Pois nenhuma parte do Uno será a última e nada há que não possa ser comparado a outra coisa. Assim, se as coisas são uma pluralidade, elas devem ser ao mesmo tempo pequenas a ponto de não ter grandeza, e grandes a ponto de ser infinitas*" Diels (1960 apud Legrand, 1991, p. 104).

Formalmente, os números só tinham existência em um reino: discreto. Enquanto que o mundo das grandezas contínuas, que surgia, tinha então que ser tratado à parte, por métodos geométricos. Assim, o escândalo lógico, causado nos pensadores da época, pela concepção das grandezas incomensuráveis é entendível pelos poucos registros encontrados dando mostra de algum significado para os mesmos, que eram produzidos preponderantemente em relação (ao que corresponderia hoje) a estipulações locais no conjunto dos inteiros positivos e suas frações.

Os primeiros textos gregos aos quais se teve acesso, contendo demonstrações a respeito de "irracionais", são de Platão (IV séc. a.C., discípulo de Sócrates) e Aristóteles. Por exemplo, no diálogo (idealizado) *Ménon*, Sócrates coloca a um jovem escravo o problema de se construir um quadrado cuja área seja o dobro da de um quadrado dado ABCD (fig. seguinte). Transcrevemos partes deste diálogo[10], para melhor retratação do que afirmamos a respeito do modo de produção de significado para a matemática então trabalhada.

> "*SÓCRATES (dirigindo-se ao escravo): Diz-me, meu rapaz, sabes que um espaço quadrado é feito assim? O ESCRAVO: Sim, certamente! SÓCRATES: Neste espaço as linhas que o atravessam pelo meio não são também iguais? O ESCRAVO: Sim. SÓCRATES: Mas então um espaço deste gênero não deve poder ser maior ou*

mais pequeno? O ESCRAVO: Sim! absolutamente. SÓCRATES: Ora, suponhamos que este lado tem o comprimento de dois pés, aquele também tem dois pés, de quantos pés deverá ser o espaço inteiro? Procede ao exame desta maneira: suponhamos que, por aqui, o comprimento do lado seja de dois pés e, por ali, apenas de um pé; o espaço não será, então, uma vez dois pés? O ESCRAVO: Sim. SÓCRATES: Ora, visto que, por aqui, também, o lado é de dois pés, não será que isso faz dois vezes dois? O ESCRAVO: É o que faz. SÓCRATES: Quanto é duas vezes dois pés? Faz o cálculo e responde. O ESCRAVO: Quatro pés, Sócrates. SÓCRATES: Mas não poderia existir outro espaço que seria o dobro deste, por outro lado semelhante a ele, tendo exatamente, como este, todas as suas linhas iguais? O ESCRAVO: Sim. SÓCRATES: ora, de quantos pés será ele? O ESCRAVO: De oito pés. SÓCRATES: vejamos então! Tenta dizer-me qual será o comprimento de cada uma das linhas deste novo espaço. Cada linha deste é, efetivamente, de dois pés; como será, por sua vez, cada linha daquele, que é o dobro?"

O jovem propõe dobrar o lado (uma idéia lógica? ou baseada em grandezas geométricas?), ao que Sócrates contrapõe, dando tratamento preferencial em um CS em relação a um núcleo visual-geométrico, dizendo que a área do novo quadrado assim construído será quatro vezes maior e não o dobro (como podemos observar a partir do diálogo):

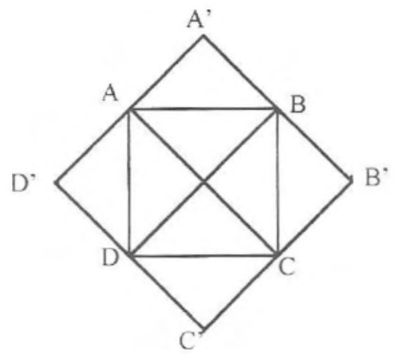
"... SÓCRATES: Pois bem! o espaço de oito pés não é o dobro do de quatro, enquanto que ele é metade do de dezesseis? O ESCRAVO: Sim. SÓCRATES: Será que não o encontraremos partindo de uma linha maior que esta que é deste comprimento, mas menor que aquela que é deste comprimento? Não é a tua opinião? O ESCRAVO: Também é a minha opinião. SÓCRATES: Perfeito! responde com efeito com o que é a tua opinião. Por outro lado, diz-me, esta linha não é de dois pés e aquela de quatro? O ESCRAVO: sim. SÓCRATES: É preciso, portanto, que a linha do espaço de oito pés seja maior que esta, que é de dois pés, mas mais pequena que aquela de quatro pés. O ESCRAVO: É preciso. SÓCRATES: Tenta, portanto, dizer-me que comprimento tem ela, segundo a tua opinião. O ESCRAVO: Ela tem três pés. SÓCRATES. Ora, se há três pés neste sentido e três pés neste, não chegaremos, para o espaço inteiro, a três vezes três pés? O ESCRAVO: Evidentemente. SÓCRATES: E três vezes três pés, quantos pés são? . O ESCRAVO: Nove pés. SÓCRATES: E quantos pés seriam necessários para que o espaço fosse o dobro? O ESCRAVO: Oito. SÓCRATES:

[10] Cf. SERRES (1994, p. 95).

Portanto, já não é a partir da linha de três pés que se constrói o espaço de oito. O ESCRAVO: De certo que não! SÓCRATES: Pois bem! a partir de que linha? Tenta responder-nos com exatidão. E, ***se não quizeres dizer o número, mostra-nos, contudo partindo de qual****. O ESCRAVO: Mas, por Zeus! quanto a mim não percebo nada disso!"*

Notemos que na frase grifada Sócrates deixa antever a dificuldade de expressão da grandeza da linha (por não se tratar de uma grandeza relativa a um número inteiro de vezes ou uma razão a partir da unidade tomada. Convencionalmente "proibido" ?) e que ele (o autor do diálogo) sabia como construir geometricamente, pois assim o fez a seguir.

Tomou então o quadrado A'B'C'D' (fig. seguinte) com lados iguais às diagonais de ABCD e demonstrou que era a solução. Usa o Teorema de Pitágoras para esse caso particular de triangularização isóceles dos quadrados, dividindo o triângulo ABCD em 4 triângulos isóceles iguais pelas diagonais, conforme figura a seguir; e cada um deles, por exemplo, o triângulo OAB é igual ao triângulo A'AB, com hipotenusa comum e mesmo tamanho de lados (cujas justificativas resultam de teoremas geométricos anteriores). Assim, os 8 triângulos iguais formam o quadrado A'B'C'D' e são os "espaços" aos quais se refere.



"... *SÓCRATES: Observa agora: qual é a grandeza deste espaço? O ESCRAVO: Não sei! SÓCRATES: dados estes quatro espaços, não será que cada uma das linhas separou uma metade no interior de cada um deles? É, não é? O ESCRAVO: Sim. SÓCRATES: Ora, o espaço circunscrito, quantas dessas metades contém? O*

ESCRAVO: Quatro. SÓCRATES: E quantas, este espaço aqui? O ESCRAVO: Duas. SÓCRATES: O que é quatro relativamente a dois? O ESCRAVO: É o dobro. SÓCRATES: Então, de quantos pés é este espaço aqui? O ESCRAVO: É de oito pés. SÓCRATES: A partir de que linha é ele construído? O ESCRAVO: Partindo desta aqui. SÓCRATES: Não é a partir desta, que vai de um canto a outro do quadrado? O ESCRAVO: Sim. SÓCRATES: Esta linha, os sábios chamam-na "diagonal". Por conseguinte, se o seu nome é "diagonal", então, escravo de Ménon, seria a partir da diagonal que se constrói o espaço duplo. O ESCRAVO: Sim! absolutamente, Sócrates."

Uma segunda demonstração desse mesmo problema, admitido por Aristóteles (ao qual nos referimos anteriormente), é uma demonstração por "absurdo" de que: *num triângulo isósceles, a razão da hipotenusa (p) para um cateto (q) não pode ser uma fração p/q, com p e q inteiros.* Segue um esboço da prova _ que, em linguagem moderna, pode levar o leitor a produzir significados a partir de estipulações locais algébricas.

Suponha que p e q sejam inteiros, e reduzidos pela divisão por 2 sem modificar a razão p/q original. A fração p/q teria a propriedade de que $(p/q)^2 = 2$, pelo teorema de Pitágoras. Assim $p^2 = 2q^2$, e como já temos demonstrado que o quadrado de um número ímpar é ímpar [pois $(2m + 1)^2 = 4(m^2 + m) + 1$], p tem que ser par. Seja $p = 2k$, então $4k^2 = 2q^2$, donde $q^2 = 2k^2$, e q é um par, um absurdo, a hipótese se torna impossível.

Este mesmo tipo de prova podemos encontrar até hoje em livros de Cálculo e Análise para o caso da demonstração de que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Nessa prova, que significados estavam mais presentes nas produções de Aristóteles?

Em sua época, como descrito, surge a "abominável" identificação de grandezas geométricas que não poderiam ser medidas com a mônada "1" dos números inteiros e seus fracionamentos. Então, um novo tipo de grandeza se fazia necessária e, paralelamente, o aparecimento de novos números a ela associado. Na constatação de que os "*arithmoi*" não eram suficientes e numa tentativa talvez de contornar essa situação, Aristóteles diz que a prova mostrava que se a hipotenusa e o lado fossem comensuráveis então ambos seriam pares ou ímpares, remetendo-se a estipulações visuais-geométricas.

Para nós, em termos desta prova, na linguagem mais moderna (como escrevemos em parágrafo anterior), aparece a necessidade de outros números que não sejam os racionais, quer seja, dos "irracionais" (pensamos naturalmente, já associando o fato de que ($\sqrt{2}$)^2 = 2) e podemos só pensar em termos algébricos (de um outro modo) sem praticamente recorrer ao geométrico a não ser pelo teorema de Pitágoras (como um algoritmo). Enquanto que, para Aristóteles, esse relacionamento numérico não era tão "adequado" na época devido às demandas dos seus interlocutores com preferência a demonstrações pela geometria. Quanto a esse ponto, devemos lembrar que os considerados matemáticos gregos se separavam dos "logísticos" ou calculadores profissionais que, como os babilônios, continuavam a usar das aproximações de frações e soma de inteiros com uma fração sem preocuparem-se com um embasamento teórico.

A estrutura e elaboração dos textos de Euclides reforça essa idéia da predileção visual-geométrica nas referências a incomensuráveis e no modo de escrever dos matemáticos gregos a respeito de outros conhecimentos numéricos. Nas palavras de Bourbaki (1976, p. 75):

> "*El predominio avassalador de la Geometria (para la que está evidentemente concebida la teoria de las magnitudes) paraliza todo desarrollo autónomo de la notación algebraica, los elementos que aparecen en los cáculos deben siempre ser 'representados' geométricamente ...*".

A maior importância por nós aqui dada aos incomensuráveis, além de serem expressos modernamente pelos números irracionais, deve-se ao fato de que foram estes que conduziram os matemáticos inicialmente a um processo *infinito*, pois muitas vezes, para se trabalhar com as razões de Eudoxo, sobre as quais falaremos a seguir, a transformação da igualdade a:b : : c:d em ad : : bc exigia o processo de se reduzir ao mesmo denominador (encontrar o mmc), que no caso de dois inteiros acaba num número finito de passos, mas se aplicado à geometria para encontrar a maior medida comum a dois segmentos de retas incomensuráveis, o processo prosseguia indefinidamente, uma vez que não existia o menor segmento de reta _ que serviria de mônada dos segmentos _ segundo conceitos e convenções da época e atuais. Como no caso anteriormente lembrado sobre o quadrado e sua diagonal.

A exigência de base na razão, para o pensamento matemático (racional), nesse início do quarto século, conduziam a deduções vindas da lógica, na tentativa de se ter premissas das quais a conclusão pudesse advir. Dessa forma procedeu Eudoxo, ao utilizar-se do posteriormente chamado *Axioma de Arquimedes* (parece que o nome de Arquimedes foi dado de forma casual, pois o próprio Arquimedes diz que o axioma já havia sido empregado por antecessores[11]): "*diz-se que duas grandezas têm uma **razão**, uma para outra, se, por multiplicação, uma for capaz de exceder a outra*". Que encontra-se na Definição 4 nos *Elementos* de Euclides, tanto como premissa para seu conceito de *razão*, como na prova do método da exaustão.

O conceito de *razão*, creditado a Eudoxo, além de permitir constituir a teoria das *proporções*, muito serviu aos propósitos de base a outras demonstrações, pois embora carregasse uma dificuldade adicional de se ter que trabalhar com grandezas de mesma espécie (volumes com volumes, segmentos com segmentos etc), por não usar números para expressar a razão entre elas, na sua forma estritamente axiomática, tornou supérfluo o fato de serem as grandezas comensuráveis ou incomensuráveis, eliminando a dificuldade de se definir a razão mesma, trocando por uma igualdade entre razões, que Euclides coloca na Definição 5 do Livro V dos *Elementos*:

> *Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são*

[11] Segundo Bourbaki (1976, p. 205), podemos encontrar maiores referências na obra editada por Heiberg, *Archimedis Opera Omnia*, Leipzig, v.3, p.265, 1913.

ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente[12].

Segundo Heath (1956, p. 126) várias alternativas foram propostas para essa Definição 5 de Euclides, mas, em nenhuma parte, Euclides escreveu que a proporção de números está incluída na proporção de magnitudes como um caso especial. Heath ainda diz que, Simson (que fez a primeira tradução em latim e inglês de "Os Elementos", 1756) inclui isso junto às proposições 5 e 6 do Livro X.

Uma nota que merece comentários é dada por Heath (à mesma p.126), ela diz que, segundo Max Simon, a definição de Euclides de igualdade entre razões é palavra por palavra a mesma definição de Weirstrass com números, e, coincidentemente, uma correspondência com a teoria moderna dos irracionais de Dedekind. Aqui, observamos o quanto a expressão metafórica _ a mesma _ aproxima e esconde que os modos de produção de significado das definições e proposições de Euclides em relação a Weirstrass e Dedekind são diferenciados, o primeiro partindo do *princípio visual geométrico* e os segundos do *princípio discreto-contínuo* (numérico). Assim, nas proposições que se seguiram a essa definição, e na própria definição (em Euclides), podemos notar a continuada ênfase no campo geométrico, com construções a partir de grandezas sempre representadas por "partes de linhas retas" (segmentos) e as comparações entre elas, sem nenhuma descrição em termos numérico abstrato.

Traduzido para nossa linguagem de hoje, encontramos:

$$a/b = c/d \text{ se, e só se, dados inteiros } m \text{ e } n$$

$$ma < nb \Leftrightarrow mc < nd, \quad \text{ou} \quad ma > nb \Leftrightarrow mc > nd, \quad \text{ou}$$

$$ma = nb \Leftrightarrow mc = nd.$$

Isso divide a coleção dos números racionais m/n em duas classes, conforme $ma < nb$ ou $ma > nb$. Levando a afirmações como: "*a definição de Euclides divide todo*

[12] HEATH, T.L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge: Dover, 1956, v.2, p.112-137.

número racional em duas classes coextensivas, de modo correspondente com o que faz Dedekind" Heath (1956, p. 122).

Eudoxo provou também o axioma seguinte (método continuado ao infinito), muito utilizado depois por Arquimedes (287-212 a.C.) e também útil a Aristóteles para negar a necessidade de se usar os infinitamente pequenos. O referido axioma contribuiu diretamente para muitos resultados posteriores, como para o procedimento dito "método da exaustão" (que evitava os infinitesimais, portanto combatia a teoria do "atomismo" da escola de Demócrito e fazia uso da lógica formal, da redução a absurdos), hoje relacionado mais diretamente ao método de integração.

> (Axioma de Arquimedes-Eudoxo ou "princípio de Eudoxo", correspondente á Proposição 1 do Livro X de "Os Elementos"):
>
> "*Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie*" Heath (1956, v. 3, p. 14).

Aqui convém refletirmos sobre a frase: "... e se esse processo de subtração é continuado ...", que modernamente é relacionada ao significado de limite no infinito e, todo o procedimento, pensado como sendo um critério para a convergência de uma seqüência infinita. Mas, isso se os modos de produção de significado tivessem suas estipulações locais aritmetizadas e partindo da noção de limite como hoje; escrevendo-se: dadas duas grandezas positivas A e a, com $A > a$, e se $v_n = A/2^n$, então $\lim_{n \to \infty} v_n = 0 < a$. Porém, para Eudoxo, o procedimento e o resultado dessa proposição (conforme podemos observar em obras como a de Heath, que se aproximam mais das fontes primárias) eram sempre postos em termos somente de grandeza geométrica e, não, pensados em termos aritmético-algébrico, já que a aritmética limitava-se ao inteiros e seus fracionamentos.

O axioma acima também permitiu o aparecimento do critério de incomensurabilidade estabelecido na Proposição 2 do Livro X de "*Os Elementos*":

> *Dadas duas magnitudades desiguais, se o resto obtido ao subtrair constantemente a menor da maior nunca a mede, as duas magnitudes são incomensuráveis.*

Os irracionais, no Livro X de Euclides, são linhas retas ou áreas.

> "*The relativity of the terms rational and irrational is well brought out in this definition. We may set out 'any straight line' and call it rational, and it is then with reference to this assumed rational straight line that others are called rational or irrational*" Heath (1956, Livro X, p. 11).

A relação de quadrados encontrada nas equações algébricas, que hoje podemos relacionar com as proporções como acima, também foi escrita em termos de significados em relação a estipulações visuais-geométricas, basta olhar a seguinte definição:

> "*Straight lines are commensurable in square when the squares on them are mesuared by the same area, and incommensurable in square when the squares on them cannot possibly have any area as a commun measure*" (op. cit., Definição 2, p.10).

5.3.2 O infinito e os infinitesimais

Um dos primeiros a discutir sobre os *indivisíveis* _ infinitésimo fixo de comprimento, área ou volume _ foi Xenócrates (sucessor de Platão)[13] ao discutir sobre os paradoxos de Zenão. Pois esses paradoxos são uma crítica ao atomismo geométrico dos pitagóricos (concebendo um corpo como uma justaposição de pontos, o tempo como uma sucessão de instantes e o movimento como uma adição de passos de um ponto a outro) e vêm a contrariar a vontade pitagórica de transladar a estrutura aritmética para a geometria. Não havia modo de adaptar o

[13] Cf. BOYER, 1974, p.72.

infinito numerável dos instantes sucessivos dos corpos em movimento com o infinito não enumerável da continuidade do espaço[14].

O atomismo geométrico estendido a fenômenos físicos, também foi defendido por *Demócrito (c. 460-370 a.C.) como já mencionado anteriormente neste trabalho. Cabe aqui ressaltar que as idéias de contínuo e de infinitesimal* identificadas nas abstratas linhas de pensamento indicadas desde Platão, muito provavelmente não se desenvolveram devido ao fato de que os matemáticos gregos clássicos não aliarem à geometria um conceito geral de número, e, consequentemente, não terem noção de variável algébrica contínua, que precisariam para embasar tais teorias.

Assim, por exemplo, perguntar: "O que é a área de um círculo?" não produzia significado para o geômetra grego, enquanto que para a questão "Qual é a razão das áreas de dois círculos ?" o significado era produzido e expresso geometricamente na afirmação: "A mesma razão que se obtém entre os quadrados construídos sobre os diâmetros dos círculos". Mais geralmente: "segmentos semelhantes de círculo estão entre si na mesma razão que os quadrados construídos sobre suas bases." Ou seja, razão entre elementos geométricos de mesma espécie.

Podemos observar que o indivisível, ou infinitésimo fixo de comprimento, área ou volume, desvinculados de uma produção de significados em relação a uma definição geral de número, continuou a provocar mudanças até o séc. XVII.

A partir da época do filósofo Aristóteles (c. 300 a.C.) até o séc. XIX, os trabalhos com *infinito*, podem ser vistos em termos de discussões de *infinito potencial* na aritmética e *infinito real* na geometria, isto é, respectivamente em relação a estipulações locais numéricas e visuais-geométricas, sendo as maiores dificuldades localizadas nesta última concepção, no que diz respeito à natureza do *contínuo* e de infinito como um todo.

É compreensível que os matemáticos gregos antigos não tenham resolvido completamente essas questões, uma vez que na filosofia científica da época o

[14] Cf. URBANEJA, 1992, p. 24.

estudo de relações embora ligado ao estudo de situações subsistentes na natureza, tinha também fortes influências sociais ligadas ao poder religioso (vale aqui lembrar que Aristóteles dizia que no Egito os lazeres religiosos de uma classe tinham conduzido ao estudo da geometria, e não as necessidades práticas do meio social[15]). O idealismo platônico, por exemplo, em seu modo elitista, procurava ignorar o estudo da realidade, deixando (como comentamos também anteriormente) as questões calculísticas para o que denominavam "logística", considerada de nível intelectual inferior.

Aristóteles, figura influente, afirmou que "os matemáticos não precisavam do **infinito**, nem o usavam" e categoricamente negou o uso do infinito real e admitiu somente o caso de grandezas contínuas (geométricas) infinitamente pequenas e de números *infinitamente grandes no sentido de infinito potencial*, em relação a estipulações locais numéricas mas sem considerar nessas estipulações qualquer princípio ou objeto que fosse um conjunto numérico infinito. Para ele, o discreto e o finito eram objetos da ciência, enquanto que o contínuo e o infinito, objetos virtuais, eram reservados à metafísica.

Para Eudoxo (anterior a Aristóteles) e Arquimedes, o conceito de *infinito* (por exemplo no método da exaustão anteriormente citado) ainda sem uma justificativa aceita dentro da matemática, sem um modo de produção de significado que lhe desse crédito, não podia fazer parte dos conhecimentos matemáticos, por isso as demonstrações eram levadas à conclusões por *absurdo* geometricamente. Conforme podemos ver na demonstração da proposição de Arquimedes sobre o círculo:

> *A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo, no qual um dos lados, a partir do vértice cujo ângulo é reto, é igual ao raio, e a base (o outro lado do ângulo reto) é igual à circunferência do círculo.* [16]

[15] Cf. BOYER, 1974, p. 4.

[16] Proposição 1 de Arquimedes, segundo Dijksterhuis (1987, p. 222). Encontramos também uma tradução em Baron (1985, unidade 1, p. 34).

Nela, Arquimedes utiliza-se de polígonos inscritos à circunferência, de área I_n e circunscritos, de área C_n, tomando-os com um número de lados n tal que denotando a área do círculo por K e a área do referido triângulo por D e trabalhando geometricamente, chega a um *absurdo* tanto em supor que $K < D$ quanto em supor que $K > D$, donde a única possibilidade é $K = D$. A idéia da aproximação das áreas para n grande não se traduz em uma justificativa suficiente para a demanda de Arquimedes no meio matemático da época (o que atualmente seria, se colocada em relação a estipulações locais de limite e de objetos denominados supremo e ínfimo da seqüências das áreas dos polígonos inscritos e dos circunscritos, respectivamente). Por isso recorre à justificativa através da demonstração por absurdo duplo (denominado, posteriormente, *método da exaustão*, talvez inspirado na utilidade de fatos como este, em que o círculo é exaurido exaustivamente por polígonos).

Muito diferente é pensarmos em relacionar com a matemática moderna, na qual para mostrar que, por exemplo, $\lim_{n \to \infty} v_n = 0$ (aqui pensando em termos de v_n como a diferença entre os polígonos inscritos e circunscritos), basta demonstrar que, dado $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar um inteiro **N** tal que para $n >$ **N** vale a relação $v_n < \varepsilon$, numa linguagem já convencionada dentro do rigor científico, a partir de estipulações locais de limite, que não deixa margem a dúvidas quanto à suficiência da justificativa matemática.

Dizer o quão próximas ou distantes estão as duas formulações quanto ao seu significado, só é possível agora, onde a relação que se estabelece entre a crença-afirmação e a justificação são então enunciadas através da matemática moderna. E' possível então notar, que embora Eudoxo-Arquimedes e Leibniz (dois milênios depois) pudessem ter a mesma crença-afirmação quanto a um processo infinito (limite no infinito) não produziram o mesmo conhecimento, já que suas justificativas eram bem diferentes.

Pode-se dizer que os conhecimentos de Arquimedes e Leibniz são imensuráveis relativamente, apesar da teoria de Arquimedes (têm-se dúvidas se já em Eudoxo) parecer um caso particular da teoria de Newton e Leibniz a respeito de processo infinito. Pois, o mundo de Arquimedes teve que ser muito transformado, idéias morreram e outras nasceram, para chegar ao de Leibniz; juntamente com esta transformação estão a produção de significados e as mudanças de campos semânticos, que não são nem tão evidentes nem de fácil operacionalidade. Isto é, reconhecer e refletir sobre os significados produzidos na relação entre uma crença-afirmação e uma justificação ou mesmo conseguir operar em um outro campo semântico que não seja aquele onde sua justificativa é convencionalmente aceita, de onde houve a demanda dos significados (interlocutores a quem voce deseja falar), não é fato naturalmente conseguido por imposição do novo e depende do sentido[17] como mola impulsionadora.

A passagem de um campo semântico a outro pode ser um longo caminho (até mesmo com um obstáculo epistemológico) a transpor embora depois de percorrido nos pareça estarem muito próximos, devido a suas crenças-afirmações serem praticamente as mesmas e apenas as justificações (quando olhadas à luz da linguagem em que foram ditas) serem diferentes; o que muitas vezes é confundido e veiculado nas idéias históricas "evolutivas", como se os "conhecimentos" pudessem seguir desde sempre num crescente desenvolvimento, mas em torno de um mesmo.

No séc. XVI, ainda na transição da Renascência para a Idade Moderna, com a recuperação de obras da antigüidade, o aparecimento de novos métodos de quadratura e cubatura, a introdução do estudo de novas curvas, a independência da trigonometria como uma disciplina e o emprego de simbolismos (variáveis, "cosas"), houve uma grande integração da matemática com a física e a astronomia.

Portanto, concomitantemente houve uma necessidade crescente de argumentos nessas referidas áreas a respeito de coisas *infinitamente grandes ou pequenas* que levaram os astrônomos Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630), e o engenheiro Simon Stevin de Bruges (1548-1620) a utilizar

[17] Sentido usado como desejo que provoca o engajamento na atividade.

essa noção em seus estudos, mas tentando evitar os rigores lógicos do método da exaustão.

Sobre o método da exaustão, considerado o modelo grego do Renascimento nas demonstrações de cálculo de área e de volume, podemos dizer que em termos do MTCS era um modo de produção de significado nas demonstrações de cunho geométrico. Sua desvantagem consistia em precisar conhecer o resultado que se queria através dele demonstrar. Mas, também hoje, quando queremos demonstrar o limite de uma função pela definição de limite por épsilon e delta, isto requer, na maioria dos casos, que tenhamos sempre em mente ao quê queremos chegar, um "a priori" do resultado, que serve de guia a alguns passos do procedimento. Essa semelhança de estratégias de forma alguma "identifica" ou aproxima mais, a nosso ver, esses dois procedimentos demonstrativos, apenas têm essa característica comum, enquanto que a produção de significados envolvida parte de estipulações locais bem distintas.

Um outro método demonstrativo foi o associado a Demócrito (que pertenceu a uma escola que competia com a escola de Eudoxo) e tinha por base uma noção de "átomo geométrico". O cálculo de um volume consistia na soma dos volumes dos "átomos" desse corpo. Segundo Struik (1989), vários matemáticos anteriores a Newton, como por exemplo Kepler e Galileo (professor de Cavalieri (1598-1647)) usaram esta concepção, dispensando geralmente as demonstrações da dupla redução ao absurdo.

Situando-nos em torno de um objeto denominado "***diferencial***", podemos observar diferentes produções de acordo com os métodos referidos.

Arquimedes, por exemplo, demonstra _ por *absurdo* _ um processo para a construção de tangente a uma espiral, que resumidamente consiste em: constituir um paralelogramo de velocidades, isto é, se um ponto se move com duas velocidades ao longo de duas retas distintas _ definindo a espiral em termos de movimento[18] _ a velocidade resultante situa-se ao longo da diagonal do paralelogramo formado entre estas retas a cada instante, e a tangente à espiral é construída nesta direção. A aproximação à noção de *diferencial*, sugerida atualmente por alguns historiadores, deve-se ao fato de que sua prova interliga a velocidade e a tangente. Idéia fértil, utilizada em trabalhos posteriores do Cálculo infinitesimal, porém, exceto pela certeza da ligação empírica à Física e da construção geométrica notável, podemos afirmar que era <u>um outro modo de produção de significados</u>, bem distinto do que estabelecemos ao falar no *diferencial*, (hoje) quando o fazemos a partir de abstrações puramente matemáticas e às vezes até em relação a estipulações do tipo infinitesimais.

Kepler entretanto considerou, dentro da teoria atomista, o círculo como a soma de infinitos triângulos _ justificado pelo seu princípio de continuidade, "*princípio de mudança contínua de uma entidade matemática de um estado a outro*"[19] _ e a circunferência como decomposta em um número muito grande de segmentos retilíneos muito pequenos. Do que, associado aos estudos de movimentos dos corpos, procede a pergunta: até que ponto isto se "assemelha" ao que dizia Arquimedes e ao que dizia respeito, no séc. XIX, aos *diferenciais*? Dentro dessa polêmica, encontramos a seguinte afirmação:

> *... no que diz respeito aos primeiros diferenciais, uma pequena parte de uma curva situada perto de um ponto pode ser considerada recta e uma parte de uma superfície pode ser considerada plana; durante um curto espaço de tempo pode-se considerar que uma partícula se move a uma velocidade constante e que qualquer processo físico ocorre a um ritmo constante* (Phillips,1922, apud Struik, 1989, p.87).

[18] A espiral era definida do seguinte modo: "se revolvermos uma reta com uma das extremidades fixa num movimento uniforme no plano até que ela volte a posição inicial, e ao mesmo tempo, um ponto mover-se ao longo da reta num movimento uniforme, começando da extremidade fixa, o ponto descreverá uma espiral no plano".

[19] Cf. KLINE, 1972, v.1,p. 299.

Temos então dois pontos a considerar, um de semelhança a partir de estipulações visuais-geométricas, e outro de diferença quando partimos de função e derivada (limite) ou de infinitésimos (se olharmos um pouco mais recente para a análise não-standard, vinculada à construção de uma teoria matemática analítica-algébrica).

Para Kepler, Fermat e outros a preocupação estava em demonstrar a solução de problemas físicos _ principalmente encontrados na astronomia e na cinemática _ envolvendo uma abordagem aos infinitamente pequenos a partir também da geometria, mas evitando o método de exaustão de Arquimedes e escorados no campo da Física.

Olhar os feitos de Arquimedes sobre os elementos geométricos ditos infinitamente pequenos, principalmente nas suas demonstrações de cálculos de área de figuras planas e volumes de corpos sólidos, reforçam esses pontos que levantamos, por isso destacamos a seguir um pouco mais a respeito de suas produções e demonstrações.

Ele foi o autor de o *Método*, um esquema para equilibrar entre si os "elementos" (quantidades indivisíveis e infinitamente pequenas) de figuras geométricas, onde os "elementos" num segmento de reta eram pontos, numa superfície plana eram segmentos de reta paralelos, e numa figura sólida eram elementos planos paralelos. Os seus escritos sobre este trabalho foram remetidos a Eratosthenes de Alexandria e só foram redescobertos em 1906[20]. Até então, muito se indagou a respeito de suas geniais descobertas e do processo mental e investigativo que o levou a descobri-las. Sobre isso, escreve Urbaneja (1992, p. 36):

> *... Arquímedes se enfrentó contra todos los prejuicios platónicos y en aras de la realidad no dudó en extraer de la Mecánica y de la Geometría del mundo sensible (en el que no hay puntos sin extención ni líneas sin grosor y en el que todo es material), los elementos que, contando, midiendo e incluso pesando, y no haciendo metafísica como los platónicos, conducen por abstracción al conocimiento lógico.(...) La combinación de Geometría y Estática que Arquímedes había hecho en Sobre el equilibrio de los planos y*

[20] Cf. BOYER, 1959, p.49.

en Sobre los cuerpos flotantes, para establecer rigurosamente ciertas propiedades relacionadas con el equilibrio de ciertos cuerpos geométricos, la realiza de nuevo Arquimedes en el Método para descobrir e investigar resultados, que obtenidos de forma mecánico-gemétrica, demonstrará de forma rigurosa en sus tratados científicos.

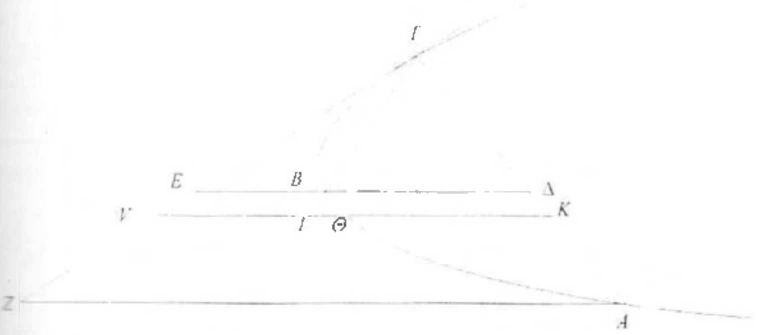
Tal *Método* de demonstração geométrica dedutiva, por ele mesmo anunciado como "mecânico"(devido a inspiração na Física) fazia uso dos *indivisíveis geométricos* ou dos elementos de dimensionalidade menor, como às vezes se referia, e levou-o à prova de muitos resultados significativos para o desenvolvimento da matemática na direção do que se chamaria Cálculo.

O primeiro teorema onde usou o *Método*, combinado com o já consagrado método da exaustão, foi o que afirma: "a área de um segmento de parábola é 4/3 da área do triângulo que tem a mesma base e altura igual". Tal demonstração encontra-se em seu livro *Quadratura da Parábola*, onde a prova consiste basicamente em exaurir a área parabólica somando áreas de triângulos formados dentro do setor parabólico. Também deu uma segunda prova desse resultado por meio de retângulos inscritos e circunscritos, que não poderíamos dizer (no séc.XX) que se "aproximou" da justificativa dada pelas somas de Riemann, sem antes observar que sua base de validade lógica não eram séries infinitas nem um conceito numérico de limite, mas sim o tradicional rigor do método da exaustão.

Através deste método, equilibrando retas como se faz com pesos em mecânica e usando a lei de alavanca, encontrou a área de um segmento parabólico. É interessante observar certos detalhes das provas; em seu desenvolvimento, pois, além da ênfase geométrica com justificativas mescladas entre resultados de leis físicas (como o equilíbrio de corpos), estão presentes resultados matemáticos, estruturados em seqüências lógicas, tentando linearizar o raciocínio em etapas *totalmente demonstráveis*.

Para melhor exemplificar tal fato, escolhemos a **Proposição *V*** (a seguir) que diz sobre área de um "seguimento parabólico" (*orthotome:* όςθογωνίου χωνου τομη), apresentando também os resultados mais requisitados preliminarmente (Proposições: *I*, *II*, *III*, *IV* e Postulado), tomando como fonte Dijksterhuis (1987).

Proposição *I* - *Seja ABT um segmento compreendidodo por uma linha reta e um orthotome. De A traçamos AZ paralela ao diâmetro e de T a linha TZ que "toca"* (aspas nossas) *a seção em T. Se no triângulo ZAT uma nova linha é traçada paralela a AZ, ela dividirá a orthtome em mesma proporção em que AT é dividida pela linha reta traçada.*



Esta proposição prova que se KV, que é uma reta paralela ao diâmetro por algum ponto K do segmento base AT, encontra a curva em Θ e TZ em V, então $\frac{K\Theta}{\Theta V} = \frac{AK}{KT}$[21].

Postulado - *Se magnitudes a uma certa distância estão em equilíbrio, outras (magnitudes) iguais a elas também estarão em equilíbrio à mesma distância.*

Proposição *II* - *Pesos que estão em equilíbrio a igual distância são iguais.*

Proposição *III* - *Magnitudes comensuráveis estão em equilíbrio à distâncias reciprocamente proporcionais aos pesos.*

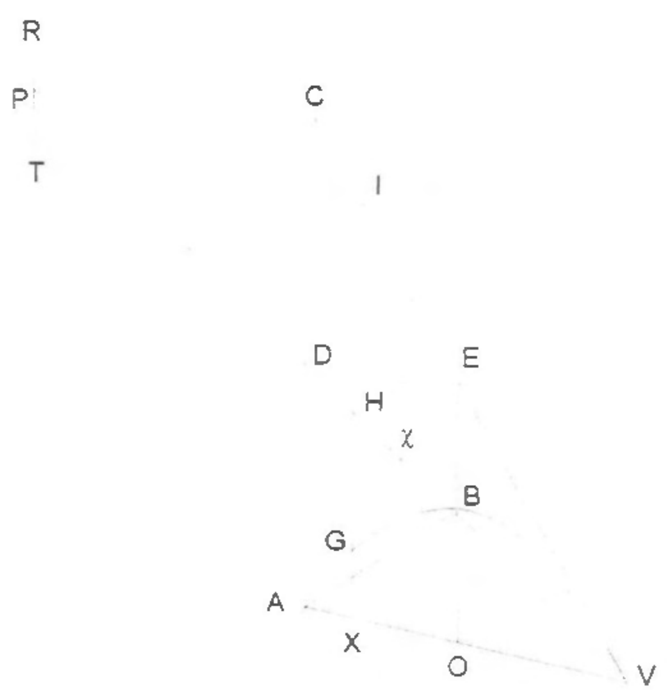
Proposição *IV* - *Mesmo se as magnitudes forem incomensuráveis, elas estarão em equilíbrio à distâncias reciprocamente proporcionais às magnitudes.*

[21] A prova desta Proposição *I*, da Proposição *II* , *III* e *IV*, bem como o Postulado seguintes, podem ser vistos em Dijksterhuis (1987, p. 82, 287, 289 e 305).

<u>**Proposição V**</u> (fig. seguinte)

Seja o segmento ABV dado, compreendido entre a linha reta AV e a parábola (orthotome) ABV; seja OBE traçada paralela ao diâmetro, com O sendo o ponto médio de AV, e seja BA e BV ligados.

Eu digo que o segmento ABV é 1/3 maior que o triângulo ABV.



<u>Prova</u>: Seja traçada uma linha reta por A, paralela a OB, encontrando a tangente traçada por V, à curva, em C, e a reta por BV em D; E é o ponto de interseção das retas que passam por VC e OB. De um ponto variável X de AV é traçada uma linha reta paralela a OB, que encontra a curva em G, VB em H, e VC *em I*.

Toma-se *DP igual a* VD. Conhecendo que OB = BE

Dai AD = DC e XH = HI.

Além disso temos que $\frac{XG}{GI} = \frac{AX}{XV}$ (Proposição *I*)

Donde $\frac{XG}{XI} = \frac{AX}{AV} = \frac{DH}{DV} = \frac{DH}{DP}$.

Desde que H é o centro de gravidade da linha XI , se tomamos TR igual a XG e seu centro de gravidade P , tal que TP = PR, TPR equilibrará XI, fazendo com que permaneça em seu lugar, porque PH está dividido em segmentos que são inversamente proporcionais à gravidade em TR e XI , isto é de tal modo que XI está para TR como PD está para DH, tal que D é o centro de gravidade do sistema em conjunto.

E desde que o triângulo ACV é constituído por todas as linhas paralelas, e o segmento parabólico ABV é constituído por todas as linhas paralelas desenhadas dentro da curva como XG, o tiângulo ACV, quando permanece neste lugar, equilibra sobre o ponto D o segmento de curva (seguimento parabólico) colocado sobre P como centro de gravidade, tal que D é seu centro comum de gravidade.

Seja c o centro de gravidade do D ACV; c está em DV de tal modo que DV = DP = 3Dc . Pois existe equilíbrio entre D ACV (que permanece em seu lugar) e o segmento parabólico ABV sobre P como centro de gravidade. Temos por postulado e proposições (*II, III, IV*) de equilíbrio que:

$$\frac{\Delta ACV}{segmento ABV} = \frac{DP}{D\chi} = \frac{3}{1}$$

portanto Δ ACV = 3 . segmento ABV, e, como Δ ACV = 2 Δ AEV = 4 Δ ABV, temos que

$$\text{segmento ABV} = \frac{4}{3}\ \Delta\ \text{ABV}.$$

Este método de equilíbrio indica uma antecipação do uso do conceito de *indivisíveis* que foi feito no séc. XIV, e quando 'desenvolvido'[22] mais abertamente no séc.XVII, foi levado diretamente aos procedimentos do Cálculo. Usando tal método, Arquimedes encontrou também o volume dos segmentos de três sólidos de

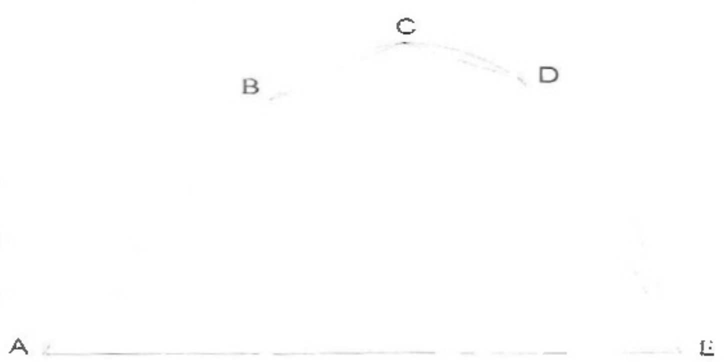
[22] O termo desenvolvido aqui não tem propriamente a conotação de progredido a partir de , mas sim de trabalhado a respeito.

revolução: o elipsóide, o parabolóide e o hiperbolóide. *Bem como o volume de uma cunha cortada de um cilindro circular reto por dois planos e o volume comum a dois cilindros circulares retos iguais que se cortam em ângulo reto.*

Arquimedes não considerava o seu método como uma prova , apenas como um meio investigativo, pois sempre acabava justificando suas proposições e resultados pelo que era então convencionado como método lógico rigoroso, o método da exaustão.

Dos tratados que usavam o método de exaustão, o mais popular foi a *Quadratura de parábola.* Arquimedes provou que: *a área S de um segmento parabólico ABCDE (fig.abaixo) é quatro terços da área de um triângulo T tendo mesma base e mesma altura* (Tendo a Proposição *V* anterior).

Os argumentos geométricos diziam respeito à comparação de áreas. A área do maior triângulo inscrito, ACE, sobre a base AE é quatro vezes a soma dos triângulos correspondentes inscritos sobre cada um dos lados AC e CE como base. Continuando o processo, novos triângulos são construidos sobre AB, BC, CD e DE; a área S do segmento parabólico ACE é dado por $T + T/4 + T/4^2 + ... + T/4^n + ...$(onde *T* representa a área do triângulo ACE), e esta soma vale 4/3 de T.



Devemos notar aqui que Arquimedes não falou em série infinita, suas justificativas estavam em parte baseadas em seu axioma: " Que o excesso pelo qual a maior de duas áreas diferentes excede a menor pode, *sendo somada a si mesma, vir a exceder* qualquer área finita dada". Onde, no modo de produzir significado está, quando muito, o infinito potencial que é posto no elemento geométrico (cada vez menor) e, deixa de lado o *indivisível (ou infinitésimo)* fixo.

No caso da soma da série ($T + T/4 + T/4^2 + ... + T/4^n + ...$) ele pode ter encontrado a soma de n termos e então adicionado o resto, o qual era possível ser feito tão pequeno quanto se desejasse, já que o número de termos (triângulos inscritos) é o maior possível.

Pelo que escreveu, não se pode dizer, concordando aqui com Boyer (1959) que tenha pensado em um resultado em relação à noção de limite, pois Arquimedes não expressou a idéia de que não existe resto no limite, ou que a série infinita é rigorosamente igual a 4/3 de T, mas sim, recorreu à prova (observada na Proposição V) por dupla recursão ao absurdo para concluir que a área do segmento parabólico não pode ser nem maior nem menor que 4/3 de T, em relação predominantemente a estipulações visuais-geométricas.

A parte referente à invenção da idéia, onde usa a combinação dos elementos geométricos e da mecânica, dá mostras de que era considerada como argumentação científica informal, tanto que a seguir passa a legitimar pelas demonstrações convencionais e rigorosas, que julga serem convincentes (a seus interlocutores do meio "científico" da época), mediante o método de exaustão.

Relembrando novamente a questão do *infinito*, por volta de 426 d.C., Santo Agostinho ao escrever *Civitas Dei*, no cap. XVIII do livro XII, aceita toda a seqüência de inteiros como um *infinito atual*,[23] numa passagem intitulada (na tradução de Healey) "Contra todos os que dizem que as coisas infinitas se encontram mais altas que a sabedoria de Deus"; ao que Cantor mais tarde disse ter sido o *transfinito* desejado e defendido por Santo Agostinho.[24]

[23] Segundo Urbaneja (1992, p.31) *infinito actual* é o termo usado por Aristóteles para representar o infinito *"em ato"*, um todo formado por uma infinidade atual de coisas, que porém não são dadas como uma infinidade acabada.

[24] Cf. STRUIK, 1989, p.141.

Predecessores seus, como São Tomás de Aquino (~ 1270) reafirmam (como tinha feito Aristóteles) que todo *contínuo* pode ser dividido indefinidamente e que um *contínuo* não podia ser composto de qualquer espécie de indivisíveis (porque, como é que pontos, por exemplo, se não têm dimensão, poderiam formar segmentos de retas finitos? e estes segmentos de reta finita tinham um número finito de pontos ou infinitos?). Novamente, o pensar sobre o infinito, suscita diversidades. Aparecem questões do tipo: será que quantidades infinitas podem ser iguais ou não?

Não foram só os gregos que na antigüidade se preocuparam com toda essa problemática. As civilizações da China e da Índia também tiveram seus destaques na Matemática ao longo da história. Nas contribuições à álgebra, por exemplo nos trabalhos do hindu Brahmagupta (c. 628 a.C.), as soluções gerais de equações quadráticas (a partir de estipulações locais numéricas) envolvem inclusive raízes negativas, e, em seus trabalhos temos, pela primeira vez, uma aritmetização sistematizada dos números negativos e do *zero*, que os gregos não consideravam como número, apenas como um símbolo do nada.

Brahmagupta chamou a atenção para o problema de se dividir por zero, embora tenha tratado de modo estranho (errôneo para nós) esta questão quando afirmou que $0 \div 0 = 0$, e se absteve (por que?) de tratar $a \div 0$, com $a \neq 0$, mas seu comentador Krsna (c.1150) registrou que $a/0 = b/0$.

O que hoje, partindo do *princípio de limite*, pode ter a seguinte leitura

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{b}{\varepsilon}\text{ , } \varepsilon > 0\text{, isto é,}$$

tanto a/ε quanto b/ε pode-se tornar infinitamente grande.

A mesma estranheza lógica provocaram (principalmente quando comparados aos gregos) na aceitação de resultados exatos e inexatos (aceitavam números irracionais), comensuráveis e incomensuráveis que lidavam indistintamente em seus estudos. Prosseguindo nos legados dessa civilização, encontramos Bhaskara (1114

-~1185), outro indiano importante na matemática do séc. XII. Foi ele que considerou *a importância da divisão por zero, a qual Aristóteles (entre outros), por estar na matemática grega, na qual não cabia falar do zero como número, não viu aí o que* encontramos na Vija-Granita de Bhaskara, uma quantidade infinita. Segundo Boyer (1974), teria ele escrito:

> *...Essa fração cujo denominador é cifra, chama-se uma quantidade infinita. Nessa quantidade, que consiste no que tem cifra como divisor, não há alteração mesmo que muito seja acrescentado ou retirado; como nenhuma alteração se dá no Deus infinito e imutável.*

Cuja transcrição, em simbologia matemática, sugere $\frac{a}{0} = \frac{b}{0} + k = \infty$. Ou, na linguagem matemática de hoje, partindo de estipulações locais de limite, poderia se expressa por $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{a}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\frac{a}{\varepsilon} + k) = \infty$, onde $\varepsilon > 0$. Significando que , tomando-se um ε positivo suficientemente próximo de zero, $\frac{a}{\varepsilon}$ pode tornar-se infinitamente grande.

A civilização romana e, posteriormente, alguns povos do início da Idade Média (c.séc.II d..C. ao séc. XV) acreditavam principalmente na utilidade do trabalho aritmético e tinham preocupação com o desenvolver de uma Matemática de uso prático, deixando de lado os ideais filosóficos científicos dos gregos. Os matemáticos propunham e resolviam problemas ligados a arte, mecânica, contabilidade, astronomia, agrimensura etc. Só mais tarde (após o fim do Império Bizantino com a queda de Constantinopla), no séc.XVI, com o advento das publicações e traduções de obras como de Euclides e Apolônio, envolvendo também os estudos de Arquimedes, ampliou-se a receptividade à cultura clássica não só grega, mas árabe, hebraica, síria e hindu.

Em produções desse período da Idade Média, no que dizem respeito às concepções realçadas neste texto, destacamos as de Fibonacci (Leonardo de Pisa) (1180-1250) _ ao tratar de problemas práticos que envolviam seqüências infinitas _ ou mesmo as de Nicole Oresme (c. 1323-1382) _ nos estudos de distância percorrida por um objeto com velocidade variável, nos quais além de classificar as variações (variáveis envolvidas) usa representação gráfica de quantidades variáveis. Ele inova com a área sob o "gráfico" como medida de distâncias (antecipando, na nossa concepção de hoje, a integração em relação à derivação) e, além disso, nas representações "gráficas" da prova de que a série harmônica é divergente podemos observar que aparecem termos *infinitamente pequenos* ou mesmo (no caso de áreas) quantidade infinita de linhas geométricas (imaginavam a área do triângulo e do retângulo formados de segmentos de retas verticais em quantidade *infinitamente grande*).

O *horror "infiniti"* disseminado pelos gregos foi aos poucos substituído por discussões sobre infinito potencial e real (como algo pleno, completo).

Embora desde Arquimedes já se tivesse uma aproximação de valores de π, François Viète (1540-1603) foi o primeiro a dar uma expressão numérica precisa, como produto *infinito*, usando fórmula trigonométrica recursiva $a_{2n} = a_n$ sec p/n (onde a_n é a área do polígono regular inscrito de n lados) e fazendo n crescer indefinidamente, isto é, como costumamos dizer, fazendo n tender ao *infinito*. O que nesta época, com o crescer das noções aritméticas, algébricas e trigonométricas já produzia significado.

O modo de constituição de significados também passa a ser diferenciado com a introdução de simbolismo algébrico, que propicia a obtenção de formulações e soluções gerais em função do tratamento dos dados de um problema como parâmetros; elemento essencial no enfoque algorítmico da linguagem característica do Cálculo infinitesimal até hoje.

Também no séc. XVII, a idéia de *infinito* associou-se à astronomia de Kepler (1571-1630) para o estudo das parábolas, com um dos focos no *infinito*. Essa frutifera idéia foi poucos anos depois ampliada por Desargues na geometria projetiva, baseada na teoria da perspectiva, onde raios "paralelos"(assim como retas paralelas) se encontram num ponto no *infinito* (sol).

Galileu (1564-1642) foi um astrônomo que tratou com a noção de *infinito* e demonstrou sua intenção de escrever um tratado sobre o assunto (embora nunca encontrado), o que parece ter motivado seu seguidor Simplício a produzir conhecimentos a respeito de infinito em relação a estipulações locais aritméticas, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os inteiros e os quadrados perfeitos, concluindo de que o número de quadrados perfeitos não era menor que o número de inteiros.

B. Cavalieri (1598-1647), aluno de Galileu, escreveu o livro *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635), baseado nos argumentos de Oresme (c. 1323-1382) que foram encampados por Kepler e Galileu.

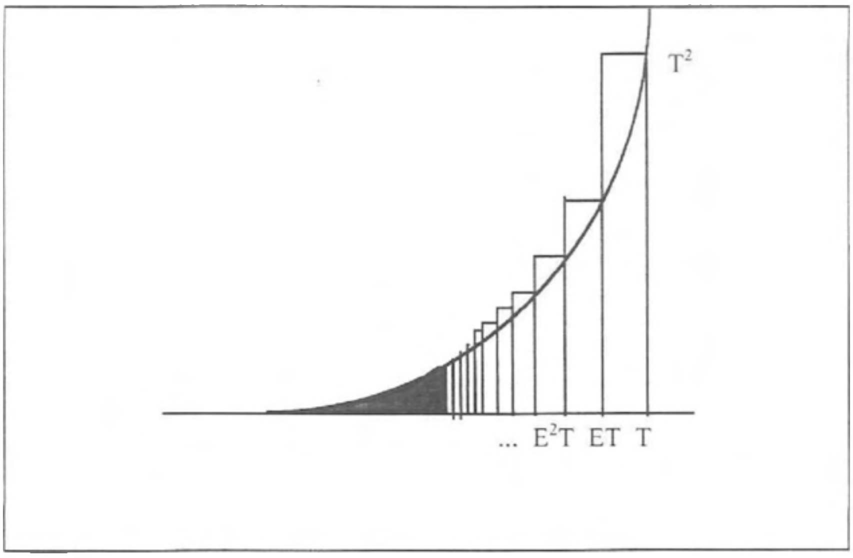
O princípio defendido foi de que uma área podia ser vista como formada de um número *infinito de* segmentos paralelos equidistantes (*indivisíveis*) e um sólido como composto de planos paralelos equidistantes, considerados como *volumes indivisíveis*. Portanto, os *indivisíveis* eram objetos produzidos em relação a estipulações locais visuais-geométricas.

Embora admitindo um número infinitamente grande (dos elementos indivisíveis), Cavalieri não especulou sobre isto em suas obras e o seu emprego era somente como uma noção auxiliar, o central era a correlação entre os indivisíveis. O que é caracterizado em seu famoso *Teorema de Cavalieri : Se dois sólidos tem mesma altura, e se seções feitas por planos paralelos à base e a igual distância delas estão sempre em uma dada razão, então os volumes do sólido estão também nesta razão.*

Em seus trabalhos, Cavalieri também estendeu um tipo de "integração" feita por Oresme de *kt* (usando representação "gráfica" para o deslocamento de um objeto, e deduzindo a distância por ele percorrida como sendo dada por um espaço) de modo a ser o primeiro a obter resultados 'equivalentes' ao que hoje são obtidos através de: $\int_0^T kt^n dt = \frac{kT^{n+1}}{n+1}$, para n $\leq$ 9. Contudo, o método usado era completamente diferente do que fazemos hoje, pois dizia respeito a relacionar razões constantes entre ordenadas de curvas e obter razões entre as áreas sob estas curvas, de maneira essencialmente visual-geométrica, usando indivisíveis.[25]

Outros matemáticos como Roberval, Torricelli, Pascal, Fermat e Wallis, apesar de serem contemporâneos em tratar este mesmo assunto, já modificaram seus métodos.

O matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665), por exemplo, contribuiu muito para a ligação da geometria com a álgebra, aprimorando os métodos da geometria analítica, e direcionando os estudos do Cálculo. Observemos seu "método da progressão geométrica"[26] para integrar x^2 (chamada de quadratura da parábola):



Erguia ordenadas à curva $y = x^2$ nos pontos da figura (anterior) T, ET, E^2T, E^3T etc., onde $E < 1$. Formava retângulos tendo por altura essas coordenadas ao quadrado e a largura em proporção continuada (hoje dita progressão geométrica decrescente de razão E), obtinha uma seqüência de retângulos aproximando a área

[25] Referências e mais detalhes podem ser vistos em KLINE (1972, v.1, p.348-350) e em BARON (1985, v.2, p. 12-17).

[26] Cf. URBANEJA (1992, p. 114-121.

sob a curva. Aqui cabe observar que Fermat, diferentemente de Cavaliéri, não mais somava linhas e sim retângulos. A soma das áreas desses retângulos era dada pela soma de uma progressão *infinita*

$$T^3(1 - E)(1 + E^3 + E^6 + E^9 + ...) = T^3(1 - E)\left(\frac{1}{1-E^3}\right) = \frac{T^3}{1+E+E^2}$$

considerando a soma infinita da PG, temos: $1 + E^3 + E^6 + ... = \left(\frac{1}{1-E^3}\right)$; fazendo E se aproximar cada vez mais de 1, os retângulos cada vez mais estreitos, a soma das áreas dos retângulos tende a área sob a curva, $T^3/3$. Semelhantemente, Fermat mostrou que, considerando a curva $y = x^n$, onde $n = p/q$ (valores racionais fracionários, inclusive negativos, excetuando $n = -1$), tem-se

$$\int_0^T x^n dx = \frac{T^{n+1}}{n+1},$$ para $n \neq -1$. (Isso escrito na linguagem moderna)

Assim, podemos notar que Fermat ligava a noção de integração de certas curvas ao cálculo de área a partir de estipulações locais visuais-geométricas e algébricas, falando de aproximações entre elementos geométricos (variação pequena na ordenada e na abcissa) e numéricos (E cada vez mais próximo de 1).

Foi também Fermat o inventor de um processo descoberto para pesquisar máximos e mínimos de curvas polinomiais. Por exemplo, seja a ordenada da curva dada por $2x^3 - 3x^2 + 5x + 7$. Então, para um ponto próximo, de abcissa $x + E$, a ordenada será $2(x+E)^3 - 3(x + E)^2 + 5(x + E) + 7$. Logo, num ponto de máximo ou de mínimo, diz ele, a variação da ordenada é <u>virtualmente</u> desprezível, desde que a variação E na abcissa seja pequena; daí coloca os dois valores das ordenadas vizinhas iguais entre si. O resultado, após a transposição dos termos, é $(6x^2 - 6x + 5)E + (6x - 3)E^2 + 4E^3 = 0$. Ao dividir por E e tomar E igual a 0 nos termos restantes (aqui temos novamente a 'visão' do uso do elemento *indefinidamente pequeno* (E), e portanto desprezível) obtém-se a equação $6x^2 - 6x + 5 = 0$.

Fermat não explicava porque fazia *E* igual a zero. Mas o fato de nomear as igualdades de equações como *pseudo-igualdades* (*adaequalitas*[27]), antes de ter feito $E = 0$, leva-nos realmente a crer que partia somente de estipulações locais algébricas e infinitesimais (nas variações geométricas virtualmente desprezíveis), seguindo disso a justificativa de passar da pseudo-igualdade para a igualdade, resguardada no fato de que para x e $x + E$, ali, muito próximos de um ponto de máximo ou de mínimo, os valores das ordenadas podiam ser tomados iguais.

O inglês John Wallis (1616-1703) além de explorar a idéia de descrição de curvas para determinação de tangentes, possibilitou a expansão em série como meio de calcular quadraturas, portanto diferenciou-se no uso mais analítico das equações, estabelecendo resultados em forma algébrica[28], porém sem abandonar o método dos indivisíveis.

Grande parte de seu trabalho foi publicado em *Arithmetica infinitorum* (1656), e teve importância nos estudos, logo a seguir, de I. Newton. Wallis introduziu o símbolo "∞" para representar muitas linhas constituindo uma superfície plana, mas sua concepção é estranha para nós, pois apesar de considerá-lo infinitamente maior que qualquer número, agia como se fosse um número sujeito às operações ordinárias da aritmética:

> "Con gran osadía representa lo infinitamente pequeño por $1/\infty$, manifestando que cada subdivisión con tal anchura indistintamente se puede interpretar como una línea o como un paralelogramo infinitesimal. Esto induce a la confusión de las dos concepciones de lo infinitesimal, líneas y rectángulos infinitamente pequeños, más aún cuando dice que un tal ente se le puede considerar como una pequeña anchura de modo que por una multiplicación infinita resultará una anchura dada, es decir $(a/\infty)x\infty = a$. Así lo hace en *'De seccionibus Conicis'* para hallar el área del triángulo, con lo cual vemos con qué gran frivolidad extrapola las propriedades de lo finito a lo infinito ..." (Urbaneja, 1992, p. 274).

[27] Cf. KLINE (1990, v. 1, p. 348).

[28] Cf. KLINE (1972, v. 1, p.353-356), URBANEJA (1992, p. 274-275), STRUIK (1989, p. 170).

Como diz Kline (1990, v.1, p. 356): "... in their efforts to attain rigor through geometry, many men failed to utilize or explore the implications of the new algebra and coordinate geometry, and exhausted themselves in abortive subtle reasonings". Cuja produção em relação a um núcleo constituído predominantemente de estipulações visuais-geométricas é o responsável pela ausência de determinadas produções em relação a outros núcleos, que permite falar (como Kline) de uma "falha", um "fracasso", quando se lê seus escritos a partir de outros tipos de estipulações (por exemplo, de estipulações numéricas, em que ∞ não é um número).

Isaac Newton (1642-1727), cuja fama matemática é devida aos seus trabalhos em Cálculo, tem como obra mais conhecida o *Princípia*, ou no seu título completo, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicado em 1687, contendo sua teoria do universo baseada na sua lei da gravitação. Os seus primeiros desenvolvimentos nesse assunto vieram através de séries infinitas, como narrado por Wallis em *Algebra*, 1685. Depois ele usou o método que é mais associado ao seu nome, o das fluxões, como presente em *Quadratura Curvarum*, 1704. Naturalmente, fez uso de quantidades infinitamente pequenas, produzindo significados de um modo que (como veremos) ainda hoje vemos a partir do Cálculo.

Em seu livro *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (escrito em 1671 e publicado após 1736), Newton diz que sua variável é gerada pelo movimento contínuo de pontos, linhas e planos ao invés de agregar estaticamente elementos infinitesimais (como havia feito em outros trabalhos). Essa quantidade variável ele denominou de fluente e sua razão de variação de fluxão, anotando $\dot{x}$ e $\dot{y}$ para fluxões dos fluentes x e y. A fluxão de $\dot{x}$ anotou $\ddot{x}$ e assim por diante. Com isso calculava problemas como: "*dada a relação entre dois fluentes, encontrar a relação entre suas fluxões, e inversamente*". Todavia, ele aplicou seu método das fluxões em diversos tipos de problemas como: para encontrar a diferenciação implícita de muitas funções, as tangentes de curvas, máximo e mínimo de funções, curvaturas, pontos de inflexão de curvas, áreas e comprimentos de curvas.

Vamos observar alguns detalhes em um cálculo desse tipo:

"dado o fluente $y = x^n$, encontrar a relação entre as fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$."

Newton primeiro escreve $y + \dot{y}\,o = (x + \dot{x}\,o)^n$ [29], em que o é um *intervalo infinitamente pequeno de tempo*. Depois, expande o lado direito da igualdade usando o teorema do binômio, então divide por o, para em seguida omitir os termos que contém o e obter $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$ (que em nossa notação mais moderna seria: $\frac{dy}{dt} = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}$). Ele não explica numericamente nem quantitativamente o fato de desaparecer com os termos que contém *o*, apenas trata-os como desprezíveis em termos de tempo, ou seja, sua produção de significados não é em relação a um núcleo constituído de estipulações locais numéricas, talvez pensasse em relação a um instante de tempo, que então podia ser desprezível dentro dos problemas físicos que trabalhava.

Newton aplicou o método das fluxões para encontrar a diferenciação implícita de muitas funções, as tangentes de curvas, máximo e mínimo de funções, curvaturas, pontos de inflexão de curvas, áreas e comprimentos de curvas.

O sentido principal do trabalho de Newton estava na mecânica com apoio da geometria (o campo matemático ainda mais fortemente presente, no qual ele pensava o rigor de suas provas), o que é reforçado por suas próprias palavras no prefácio do *Principia* (Newton, tradução de Motte, 1729, revisão de Cajori, 1934) :

> "To describe right lines and circles are problems, but not geometrical problems. The solution this problems is required from mechanics, and by geometry the use of them, whem so solved, is shown; [...] Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but that part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring."

No Livro I do *Principia*, ele apresenta leis de movimento de corpos e em diversas demonstrações de proposições, teoremas e lemas, utiliza-se do "método das razões primeira e última", a partir do qual pode-se, atualmente (depois de Weirstrass e de Cauchy), reconhecer semelhanças à noção de limite. Porém, o objeto matemático produzido (será que podemos chamar de "limite"?) não era em relação a estipulações de limite (como a definição weirstrassiana de limite), mas, sim, em

[29] Na notação que Newton usou, as potências não eram escritas em forma de expoentes sobrescritos, mas em linha, repetindo-se a variável, ou seja, x^2 era escrito como xx, $\dot{x}^2 o^2$ era $\dot{x}\,\dot{x}\,oo$, e assim por diante. Cf. KLINE (1990, p. 362).

relação a estipulações locais da Física, visuais-geométricas e numéricas, como podemos notar na explicação de Newton sobre seu método, que a seguir vamos citar, intercalando com mais algumas observações entre colchetes.

> "... I chose rather to reduce the demonstrations of the following Proposicions to the first and last sums and ratios of nascent and evanescent quantities, that is, to the limits of those sums and ratios, and so to premise, as short as I could, the demonstracions of those limits. For hereby the same thing is performed as by the method of indivisibles; and now those priciples being demonstrated, we may use them with greater safety. Therefore if hereafter I should happen to consider quantities as made up of particles, or should use little curved lines for right ones, I would not be understood to mean indivisibles, but evanescent divisible quantities; not the sums and ratios of determinate parts, but always the limits of sums and ratios; and that the force of such demosntrations always depends on the method laid down in the foregoing Lemmas.

[*Newton produz novos objetos* _ "quantidades nascentes e evanescentes" _ que podem ser pensados em relação a estipulações numéricas _ quantidades, razões _, mas também em relação a estipulações visuais-geométricas _ considerando quantidades compostas de partículas ou pequenas linhas curvas como retas, quantidades (geométricas) divisíveis evanescentes, porém diferente dos "indivisíveis de seus antecessores].

> Perhaps it may be objected, that there is no ultimate proportion of evanescent quantities; because the proportion, before the quantities have vanished, is not the ultimate, and when they are vanished, is none. But by the same argument it may be alleged that a body arriving at a certain place, and there stopping, has not ultimate velocity; because the velocity, before the body comes to the place, is not its ultimate velocity; when it has arrived there is none. But the answer is easy; for by the ultimate velocity is meant that with which the body is moved, neither before it arrives at its last place and the motion ceases, nor after, but at the very instant it arrives; that is, that velocity with which the body arrives at its last place, and with which the motion ceases. And in like maner, by the ratio ultimate of evanescent quantities is to be understood the ratio of the quantities not before they vanish, nor afterwards, but with which they vanish.[...] (op. cit., p. 38-39).

[Newton, prevendo reações a suas idéias, justifica-as em relação a estipulações locais no campo da Física ao dizer que "velocidade última significa aquela a qual o corpo está se movendo, nem antes da chegada nem após, mas no instante em que o corpo chega". Refere-se à velocidade (instantânea como hoje denominamos) e ao movimento de um corpo como "verdades estabelecidas" e delas parte, não só produzindo um outro significado a respeito de "razão última", mas uma justificação (comparativa) que estabelece um vínculo entre a crença-afirmação "razão última de quantidades evanescentes é a razão entre quantidades não antes delas desaparecerem, nem depois, mas com a qual elas desaparecem" e um núcleo em cujo conjunto de objetos estabelecidos inclui-se a "velocidade última"].

> There is a limit which the velocity at the end of the motion may attain, but not exceed. This is the ultimate velocity. And there is the like limit in all quantities and proportions that begin and cease to be. And since such limits are certain and definite, to determine the same is a problem strictly geometrical. But whatever is geometrical we may use in determining and demonstrating any other thing that is also geometrical.
>
> [...]
>
> For those ultimate ratios with which quantities vanish are not truly the ratios of ultimate quantities, but limits towards which the ratios of quantities decreasing without limit do always converge; and to which they approach nearer than by any given difference, but never go beyond, nor in effect attain to, till the quantities are diminished *in infinitum*" (op. cit., p. 39).

[Nessa parte do discurso, Newton segue em sua produção de significados a respeito de "velocidade última" e "razões últimas" agregando um elemento novo, uma estipulação local em relação à noção de limite. Esse limite é afirmado como certo e definido, porém inatingível até que as quantidades (que compõem as razões) sejam diminuídas infinitamente (diminished *in infinitum*). Sobre isso, aqui deixamos duas reflexões. A primeira é a respeito da afirmação de que "as razões últimas não são razões de quantidades últimas, mas limites para o quais as razões das quantidades decrescem sem limite", em que há a idéia de mostrar que não se toma a razão entre os limites de duas quantidades (variáveis), mas o limite de uma razão (na relação entre duas variáveis). Todavia, como ele produz significados também em relação a estipulações visuais-geométricas (principalmente nas demonstrações[30]),

[30] As demonstrações dos Lemas, Proposições e Teoremas que encontramos no Livro I e II, em Newton (tradução de Motte, 1729, revisão de Cajori, 1934) nos dá uma mostra do quanto e como se produzia a

somos tentados a dizer que essas razões últimas estão mais próximas que qualquer diferença tomada (por menor que seja), usando apenas elementos geométricos (como segmentos e pedaços de curvas, contínuos) que são então divididos infinitamente. Porém, como bem observa Oliveira (1993, p. 19):

> "*Sua visão concernente aos fundamentos do Cálculo era de certo modo ambígua. Ele se referia às vezes a infinitesimais, às vezes a momentos, às vezes ao limite e às vezes, talvez preferencialmente, às noções físicas. Sua visão final sobre o assunto, ele tentou mostrar em seu comentário em De Quadratura:'Eu procurei demonstrar que no método de fluxões não é necessário introduzir na Geometria figuras infinitamente pequenas*".

A segunda reflexão é sobre essa possível divisão infinita de uma quantidade (elemento sempre tomado em relação à geometria ou ao tempo), que reduz a uma quantidade divisível evanescente, que pode ser desprezível (se comparada a uma quantidade) e que, pensadas em conjunto, podem servir de estipulações locais na produção de significados ligados a uma idéia de elemento infinitesimal (como denominamos hoje e, a partir dela, por exemplo, é pensado um modo de se calcular área abaixo de uma curva[31]), mesmo que os tenha rejeitado (não falado sobre eles, ou falado contra devido à demanda de seus interlocutores). Por exemplo, na obra "*El Cálculo Infinitesimal: Leibniz/Newton*" (da Biblioteca Cultura Los Fundamentales, de autoria desconhecida, 1977, p. 67) encontramos o comentário sobre a obra de Newton, *Optiks* (edição inglesa 1704, latin 1706): "*es un cabal tratado de Cálculo infinitesimal com reglas para determinar derivadas e integrales*", enquanto que, sobre sua obra "*Mathematical Pinciples of Natural Philosophy* (edição inglesa 1729) encontramos o comentário de Kline (1990, p.365):" *He rejects infinitesimals or ultimate indivisible quantities in favor of 'evanescent divisible quantities', quantities which can be diminished without end*"].

Quanto ao cálculo de áreas _ quadraturas _, tendo Newton trocado a noção de "indivisíveis" (geométricos) por elementos infinitesimais que podia operar

partir da Geometria.. Segundo comentário de Kline (1990, p.359), "...*even Newton thought the geometry was necessary for a rigorous proof*".

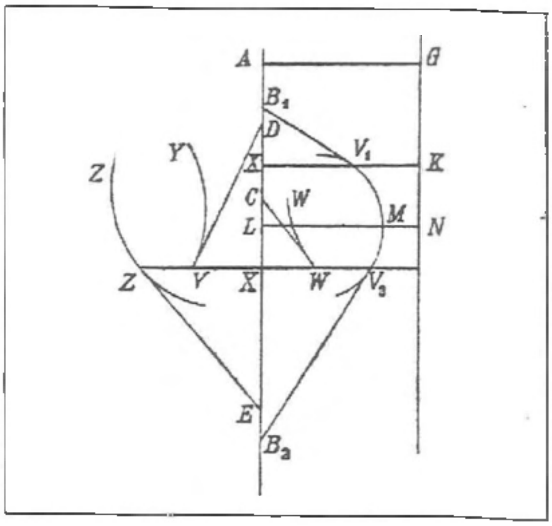
[31] As demonstrações dos Lemas I, II, III e IV (entre outros) chamou nossa atenção a essa ligação. Cf. NEWTON (tradução de Motte, 1729, revisão de Cajori, 1934, p. 29 - 31).

juntamente com o teorema binomial, ele elabora-os (para determinadas curvas) em relação a uma operação de "antidiferenciação" (integração), estabelecendo o caráter inverso da quadratura e da tangente (que Barrow havia iniciado) e valendo-lhe, posteriormente, a autoria do Teorema Fundamental do Cálculo junto com Leibniz. Essa operação inversa também é produzida em relação a estipulações locais envolvendo desenvolvimentos de séries (que deriva e integra termo a termo).

Na construção do Cálculo temos, ao lado de Newton, o filósofo G. Wilhelm Leibniz (1646-1716), considerado um erudito universal e, em especial, um matemático pelos estudos e produções desenvolvidas. É importante a observação de que, os paralelismos e convergências de idéias nos trabalhos matemáticos de Newton, Wallis e Leibniz devem-se em parte ao intercâmbio entre eles, inclusive anos de troca de correspondências.

A obra de Leibniz permitiu um maior desenvolvimento da algebrização do Cálculo, com sua produção de significados a partir de técnicas e notações algébricas. Nela aparece, entre outras coisas, uma noção e simbolização de diferencial (ainda hoje usados), um algoritmo para cálculo de várias funções, uma noção de derivada a partir de estipulações geométricas, um algoritmo para resolver problemas de máximo e mínimo, e, integrações de diversas equações diferenciais.

Vamos observar algumas facetas de suas produções ligadas ao Cálculo olhando para os escritos do denominado "*novo método para máximos e mínimos*". Nos baseamos na tradução de J. Peyroux (edição de 1983, p.4) da obra de Leibniz, "*Calcul Infinitésimal*" (publicada em 1684) e na obra "*El Cálculo Infinitesimal: Leibniz/Newton*" (da Biblioteca Cultura Los Fundamentales, de autoria desconhecida, 1977, p. 41)



Dado o eixo AX e várias curvas VV, WW, ZZ, chamemos x ao segmento AX do aixo, y, v, w, z, respectivamente, as ordenadas normais ao eixo VX, WX, YX, ZX. Sejam VB, WC, YD, ZE, as tangentes que cortam, respectivamente, o eixo nos pontos B,C,D,E. Seja dx um segmento arbitrário e dv (dw, dy, dz), ou seja as diferenças das mesmas v (w, y, z), um segmento que é à dx como v (w, y, z) é à BX (CX,DX, EX). Isso admitindo que as regras de cálculo são:

Se *a* é uma quantidade constante dada, será d*a* = 0; e d*a*x = *a*dx. Se y = v (isto é, se uma ordenada qualquer da curva YY é igual a uma ordenada qualquer correspondente da curva VV), será dy = dv.

Adição e Subtração: se tem-se z-y+w+x = v, será d(z-y+w+x) = dv = dz-dy+dw+dx.

Multiplicação: se y = xv, será d(xv) = x dv+ v dx.

Divisão: Se z = $\frac{v}{y}$, se terá d ($\frac{v}{y}$) = dz = $\frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2}$.

Potência: $dx^a = ax^{a-1}\,dx$. Exemplo: $dx^3 = 3x^2\,dx$; se w = $\frac{1}{x^3}$, será dw = $\frac{-3dx}{x^4}$.

Raiz: d $(\sqrt[b]{x^a}) = \frac{a}{b}\,dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$.

Após discorrer sobre: os sinais das regras, a convexidade e concavidade das curvas ligadas aos sinais dos diferenciais (dz, dy, dw), os pontos de máximo e mínimo nos quais as ordenadas v (w,y,z) mantém-se estacionárias e dv = 0 (dw, dy, dz), ponto de inflexão onde a concavidade e os sinais trocam entre si, Leibniz nomeia seu algorítmo de *cálculo diferencial* e coloca-o como um método em que não necessita "fazer desaparecer" (retirar ou desprezar) quantidades muito pequenas.

> "*De ceci connu comme* ***Algorithme****, que je dise ainsi, de ce calcul que j'appelle* ***différentiel****, toutes les autres égualités différentielles peuvent être trouvées par un calcul commun, et les plus grandes et les plus petites, et de même les tangentes sont tenues, de telle sorte qu'il n'est pas nécessaire d'enlever les fractionnares ou irracionnelles, ou autres chaînes, ce que pourtant il fut à faire selon les Méthodes jusqu'ici montrées*" [grifos do tradutor] (Leibniz, tradução de Peyroux, 1983, p. 6).

Notamos nesse texto _ "*novo método para máximos e mínimos* _ que, embora as diferenças (dx, dy, dz, dw) sejam escritas em relação a segmentos, elementos geométricos (ligados a um desenho), paralelamente há uma elaboração de uma notação na qual Leibniz procura identificar com suas noções (por exemplo, diferenças, "diferencial" e o símbolo d*x* para identificar essa diferença ou diferencial d*x* de uma quantidade ou magnitude *x*, [32] *e*, $\int$ para identificar *suma* , soma[33]) Essa notação, ligada a estipulações locais algébricas na produção de significados para os algoritmos e operações, promove uma aparência uniforme à sua escrita e torna-a mais independente de elementos geométricos. Segundo Urbaneja (1992, p. 280): "Su virtuosismo en la creación del simbolismo le permitiría traducir en fórmulas los resultados [infinitesimais] y en algoritmos los métodos, tanto los de sus antecesores como los descubiertos por él mismo ..."

Leibniz freqüentemente fala de quantidades infinitas e infinitamente pequenas, porém, em alguns de seus enunciados, ele demonstra sua preocupação em considerá-los como algo especialmente abstratos (fictícios):

> "*O infinitesimal, como el infinito, está siempre inacabado* [...] *Ficciones útiles en cualquier caso, que permitedescribir lo real*" (Alcoba1996, p.159).
>
> "*El infinito es como el cero, algo que carece de correlato real, en definitiva, 'um modo de hablar'. Un estatus semejante tendrán los infinitesimais. Los infinitesimales no son nunca um número y ni siquiera una cantidade, sino um rango de números que dejamos sin especificar porque no hace falta ...*" (op. cit., p. 160).
>
> "*Entrementes, concebemos o infinitamente pequeno não como um simples e absoluto zero, mas como um zero relativo (como você próprio observou), isto é, como*

[32] Leibniz identifica a **quantidade** ou **magnitude** correlacionadas ao número de partes que compõe uma coisa.

"*La 'magnitude' es lo que en la cosa se expresa por el número de partes determinadas. [...] '****Cantidad****' o Magnitude es lo que puede conocerse en las cosas por simple compresencia (o percepción simultánea)*" [grifos do autor] (Leibniz, apud Alcoba, 1996, p. 151-152). Além disso, "**número** é aquele que tem a mesma quantidade que algo com a mesma qualidade que a unidade":

"*... el número en general, sea entero, quebrado, racional, irracional, ordinal o transcedente, puede definirse con un concepto general, como aquello que es homogéneo a la unidad, o que se relaciona com la unidad como una recta com unarecta*" (op. cit., p.152).

[33] Cf. BARON (1985, p. 54-57).

uma quantidade evanescente que ainda mantém o caráter daquilo que está desaparecendo.

[...]

...não acreditava mesmo que existam magnitudes verdadeiramente infinitas ou verdadeiramente infinitesimais" (Leibniz, apud Oliveira, 1993, p. 25).

As estipulações locais a partir das quais Leibniz tratava seu princípio de continuidade[34] não eram em relação a estipulações locais de limite, como são hoje ao produzirmos significados para a definição de continuidade, mas em relação a princípios físicos e filosóficos de conservação do movimento. Isso explica a inversão de ordem que encontramos em seus escritos, pois Leibniz falou de "diferencial" a partir de sua noção de continuidade,[35] usando das diferenças infinitamente pequenas que pode obter na divisão ideal e, também, do uso da séries infinitas.

"*Pues el continuo no podria estar compuesto por la multitud, que no puede tener su realidad más que en* ***unidades verdaderas que vienen de outra parte y son algo distinto a los puntos matemáticos****, los cuales no son sino extremidades de la extensión y de las modificaciones de las que consta.*

[...]

...el punto matemático y el instante son el límite que encontramos por análisis, la menor parte a la cual podemos llegar diciendo todavia que estamos ante el espacio o el tiempo. ***el punto metafísico engendra la serie pero no pertenece a ella*** *sino a un nivel superior.*

[...]

La consideración del número como algo ideal, descomponible por análisis en unidades existentes sólo a posteriori, el utilizar la noción de homogeneidad para definirlos, muestra claramente que ***a la ciencia del número es aplicable la ley de continuidad****. Eso significa que en las* ***series numéricas*** *no habrá saltos, que no hay ruptura, cambio de leyes de lo finito a lo infinito*" [grifos nossos] (Alcoba, 1996, p.136, 137 e 159).

[34] Segundo Alcoba (1996, p.92) a "lei de continuidade" ou "princípio de continuidade" de Leibniz "*contiene una de las seguientes proposiciones : 1. No hay tránsito por saltos; 2. La naturaleza no actúa por saltos; 3. No hay mutaciones por saltos; 4. No hay cambios instantáneos; 5. Las reproduciones no se hacen por saltos; 6. La naturaleza impide la discontinuación.*

A convergência entre os temas e seu desenvolvimento em meio ao pensamento diferencial e integral, fazem Newton e Leibniz compartilharem em vários pontos na construção do Cálculo. Os principais pontos são: a partir de seus trabalhos o Cálculo passou a ser independente, não mais uma parte da Geometria apenas; ambos produziram seus conhecimentos a partir de estipulações locais envolvendo noções algébricas (até então as estipulações locais eram predominantemente geométricas); os dois elaboraram e fizeram uso de um "processo de antidiferenciação" nos problemas de área, volume e outros; trabalharam em problemas de cálculos de razões, tangentes, máximos e mínimos e somas infinitas, que eram reduzidos geralmente à diferenciação.

Todavia, em meio a essa comunhão de pontos, existem interessantes distinções a serem destacadas, pois elas constituem marcas particulares em seus respectivos trabalhos. Pensando nessa comparação, a principal diferença está no que Newton e Leibniz disseram a respeito de elementos infinitamente pequenos, que é uma estipulação local básica para quase todas as suas demais produções. Enquanto Leibniz lidava com os diferenciais (incrementos infinitamente pequenos, os quais em última instância estavam as "mônadas"[36]) diretamente em seus algoritmos (como elementos algébricos), Newton produzia seus significados para os infinitamente pequenos a partir de estipulações locais da Física, como na determinação de velocidade (ou da fluxão), variação de mudança.

[35] Encontramos também em Oliveira (1993, p. 24) afirmações a respeito dessa inversão nas considerações de Leibniz.

[36] Para Leibniz o *contínuo* não pode ser composto de multitudes de pontos. Os pontos são incapazes de formar um contínuo, pelo menos enquanto não se completa a sua dispersão ou extensão, ou seja, que os converta em *unidades verdadeiras*, que são distintas dos pontos matemáticos, os quais podem ser vistos como extremidades das extensões. Assim, para encontrar essas *unidades verdadeiras*, *átomos metafísicos* ou *mônadas*, ele recorreu ao que disse ser um *ponto real e animado*. Segundo ele "uma mônada é uma substância simples, mas uma noção completa, à qual não se precisa adicionar nada. As mônadas, para formarem um *contínuo*, necessitam serem convertidas em uma série, ordenadas e vinculadas, já que são como mundos separados. Cf. ALCOBA (1996, p. 136-137).

Quanto aos infinitesimais, além de se referir que eram "*menores que qualquer quantidade dada*", ele dizia que falar deles é o mesmo que falar de infinito, é sempre inacabado, "*se les puede asignar cualquier cantidad o magnitud, es decir, no hay razones para as signarle una en concreto. Basta com hacer el error menor que cualquiera que pueda darse* (op. cit., p.159).

Outra distinção está em que, para Newton os problemas de área e volume eram basicamente resolvidos em relação a um processo de diferenciação, dificilmente pensava em termos de somação. Já Leibniz, agia ao contrário, primeiro pensava em somações, para depois calculá-las pelo processo de antidiferenciação.

De um modo geral, nos parece natural que Newton fosse empírico e mais concreto que Leibniz, pois a demanda de seu meio contextual era o de um físico, enquanto que a do segundo era de um filósofo lógico e, portanto, dado a reflexões e generalizações.[37] Talvez por isso Newton não ligasse muito para a notação que, para Leibniz (conforme observamos anteriormente) era central.

Resumindo, o desenvolvimento da geometria analítica e do sistema de representação de quantidades variáveis, juntamente com a produção dos significados infinitesimais e a aplicação mais extensiva dos conceitos numéricos, em pouco tempo levaram Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz aos estudos de correlação entre derivação e integração culminando no *Teorema Fundamental do Cálculo* e nos algoritmos de nosso Cálculo.

Em pleno séc. XIX, como cita Boyer (1974), após este trabalho de Newton e Leibniz ter sido muito discutido e utilizado _ valendo-lhes o título de "pais do Cálculo diferencial e integral"_. matemáticos famosos como Gauss (1777-1855) e Cauchy (1789-1857) insistiam em discussões sobre a existência de um infinito real continuo; sendo que pelos escritos de Cauchy, tanto se pode dizer que produzia significados em relação a estipulações locais infinitesimais como em relação a estipulações locais de limite. Notemos em seu enunciado sobre o "*infinitamente pequeno*":

> "Quando os valores numéricos sucessivos de uma variável diminuem indefinidamente de modo a tornarem-se menores que qualquer número dado, dizemos que a variável se toma 'infinitamente pequena' ou uma quantidade infinitamente pequena. O limite de tal variável é zero" (Cauchy, apud Baron, 1985, v.4, p. 47).

Em sua obra, Cauchy também apresentou os fundamentos do Cálculo na forma de uma teoria de limites (em relação a estipulações locais de limite), a qual foi

[37] Cf. KLINE (1990, p. 379-380).

convertida por K. Weierstrass (1815-1897) no método épsilon e delta de Análise que hoje é um dos modos de produção de significado. Porém esse novo modo de produção de significado só foi possível com o advento da aritmetização da Análise (imputando maior rigor matemático), quando se ligou estipulações locais da teoria de conjuntos às estipulações locais a partir do Cálculo que então se produzia. Assim procedeu, por exemplo Cauchy em suas produções a partir do Cálculo.

Como expoente mais "avançado" nessa questão do infinito (na direção de ser semelhante ao que produzimos), temos as idéias de outro matemático Bernhard Bolzano (1781-1848). Para certifica-nos disso, basta observarmos como J.W.R. Dedekind (1831-1916), inspirado nos paradoxos de Bolzano, sob a influência de seu *professor Weierstrass, escreveu uma definição (ainda hoje adotada) para um* sistema infinito: "*Diz-se que um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo, caso contrário S se diz um sistema finito*". Quando então os significados foram produzidos a partir de estipulações locais algébricas (teoria de conjunto) e um infinito real.

Com Bolzano, considerado "o Pai da Aritmetização",[38] começou-se a produzir diferenças entre *infinitos reais*, por exemplo, entre o infinito do conjunto dos inteiros e o infinito do conjunto dos reais.

Paralelamente G. Cantor (1845-1918), considerado um dos criadores da teoria dos conjuntos, tomou-a como ponto de partida para produzir objetos e significados novos em termos do infinito; entre eles, a definição de conjuntos *equipotentes* _ quando os conjuntos podem ser colocados em correspondência biunívoca _ e de *número cardinal* (um objeto): se dois conjuntos são equipotentes, diz-se que eles têm o mesmo *número cardinal*. Os números cardinais de conjuntos finitos podem ser identificados com o naturais e os dos conjuntos *infinitos* são

[38] Cf. EVES (1995, p. 530).

denominados de *números transfinitos*. Com isso, passou-se a ter distinções entre conjuntos infinitos, uma escala para as infinidades. [39]

Todavia, o conceito de grandezas *infinitamente pequenas* (infinitesimais) ainda permaneceu em discussão, e foi objeto de estudo no séc.XX (ca.1960) dos trabalhos de Abraham Robinson na intitulada Análise Não-Standard [40]. A partir dela, temos produções de significados e conhecimentos preponderantemente em relação a núcleos de noções infinitesimais que, muitas vezes considera os hiperreais como uma estipulação local.

5.4 CONCLUSÕES

Acreditamos que o principal resultado dessa investigação histórico epistemológica foi o de revelar diversos modos de produção de significado e objetos, a partir da História da Matemática.

Uma conseqüência direta disso é o reforço à importância da pesquisa histórica epistemológica em se tratando de investigações ligadas ao desenvolvimento do pensamento diferencial e integral, embora paralelamente também tenha se evidenciado que esse tipo de pesquisa subentende uma atenção especial á ligação intrínseca entre seus resultados e a maneira de se ler a História. No nosso caso, tendo em conta o MTCS, escolhemos não ler os textos à procura dos verdadeiros sentidos e significados produzidos outrora ou tentando filtrar e separar a parte matemática, mas, sim, considerando que temos aspectos parciais, resíduos de enunciações que são vistos através de um filtro temporal histórico e a partir dos quais uma produção de significados ocorre na própria atividade de busca pela leitura.

[39] Cf. (op. cit., p. 662).

[40] Para melhor visão de sua ligação com a matemática ver Oliveira, T.A.(1993), *Análise Não Standard:uma apologia ao seu ensino*. Dissertação de Mestrado. UNESP-Rio Claro,SP.

Para alcançar nossos objetivo principal, não dependíamos de caminhar em um desenvolvimento cronológico e sucessivo na História da Matemática. Porém, optar por seguir uma ordenação ao destacar alguns pontos, os quais julgamos importantes devido à identificação e investigação das produções de significado que temos em sala de aula de Cálculo, facilitou o trabalho de contextualização de fatores de maior influência nas produções, tal como: os culturais e de poder, as ligações entre os respectivos personagens históricos e os interlocutores.

Uma outra conseqüência dessa investigação histórica epistemológica é a confirmação do quanto é adequada uma investigação crítica desse tipo se queremos compreender não só o próprio desenvolvimento histórico do, mas os realces determinados pela caracterização em pensamento diferencial e integral. Nesse sentido, as comparações entre os tipos de estipulações locais (visuais-geométricas, algébricas-funcionais, de limite e outras) tomadas pelos alunos e professores em meio às atividades em sala de aula e aquelas evidenciadas a partir dos textos históricos ("estipulações locais históricas") são resultantes das reflexões sobre os discursos. Dentre todas as produções citadas _ desde as gregas antigas, babilônicas e outras, até à fundamentação do Cálculo por Cauhy, Weirstrass e predecessores (após a aritmetização da Análise) _ conseguimos destacar alguns tipos de estipulações locais históricas que continuam a caracterizar os modos de produção a partir do Cálculo. Por exemplo, ao olharmos os textos antigos *vimos que* significados, objetos e conhecimentos eram produzidos em relação a estipulações locais visuais-geométricas, porém estipulações *locais diferentes das de hoje, ou* seja, dentro de um mesmo tipo, mas distintas; exemplificando: uma estipulação visual-geométrica como uma reta _ apenas um contínuo geométrico que pode ser sucessivamente dividido _ ou um princípio geométrico _ em que só podem ser comparadas grandezas de mesma espécie (comprimento com comprimento, área *com área e assim por diante) _ não será elemento de um núcleo a partir do qual* produzimos significados (hoje), a não ser em casos especiais, a partir de textos *históricos quando então o modo de produção de significado pode fazer com que* pareçam próximos. A impressão de proximidade é devida a certas relações e estipulações locais postas em evidência (pelos nossos modos de produção de significados) ao olharmos os textos e vermos os "ancestrais" enunciados às vezes até com o mesmo nome; o que muitas vezes nos causa esta impressão "existencial" de contínua anterioridade.

Objetos na atividade algébrica

Os objetos produzidos a partir das "estipulações locais históricas" e considerados objetos ancestrais de outros produzidos posteriormente, por exemplo, "diferenciais" _ como quantidades ínfimas (ou evanescentes) em meio aos "fluentes e fluxões" de Newton _ como um objeto ancestral de "diferenciais" ditos por Cauchy como uma função da derivada e de um incremento ($dy = f'(x)\, dx$), são objetos distintos, produzidos em relação a estipulações locais diferentes, diante de demandas diferentes. O fato de (posteriormente) ser possível articulá-los em um outro modo de produção de significados, faz com que se tenha a impressão de que têm algo intrínseco, de que "compartilham algo comum", como acontece ao se adotar uma visão progressista (evolucionista) da História em uma postura mais "essencialista" do ponto de vista epistemológico e, então, olhar para os dois "diferenciais" mencionados como sendo o mesmo objeto só que mais aperfeiçoado, mais trabalhado.

A investigação que procedemos evidencia essa crítica a respeito da produção de objetos no revelar dos diversos modos de produção de significado. Assim, por exemplo, ao olharmos para a parte antiga da História da Matemática, nos deparamos com as construções dos incomensuráveis, dos irracionais, do infinito potencial, cujas estipulações locais eram predominantemente visuais-geométricas e as estipulações locais algébricas ou algorítmicas em minoria. Portanto, não possibilitava produzir definições como a de "limite" (de Cauchy e predecessores) sem uma noção mais geral de números reais (implementada a partir da teoria dos conjuntos trabalhada por Dedekind e Cantor), sem a noção de função e de toda a linguagem inerente (iniciada na Idade Moderna e intensificada no séc. XVIII). Mas, hoje, ao invocarmos essas "imagens", esses elementos como nossas estipulações locais, precisamos não esquecer de que eles só são possíveis porque olhamos enunciados passados com nossos olhos do presente.

Logo, como orientação, essa parte da pesquisa nos mostra que uma das necessidades para que haja sucesso no processo de aprendizagem é tentar entender melhor as **diversificações** matematicamente substanciais que aparecem a respeito de questões ligadas a, por exemplo: números reais, infinito, infinitésimos, contínuo, princípio de limite, diferencial e outras.

Capítulo 6

PESQUISA DE CAMPO

6.1 INTRODUÇÃO

De acordo com o que indicamos no Capítulo 1 (item 1.3.1), a escolha dessa modalidade de pesquisa tem por base o nosso interesse em examinar as enunciações dos alunos e professores, a partir do Cálculo, como uma fonte para alcançar nosso objetivo principal de investigar sobre o pensamento diferencial e integral no que diz respeito às diferenciações características dos modos de produção de significados, objetos e conhecimentos.

Nas tendências atuais de pesquisa em Educação Matemática tem-se, como uma das linhas predominantes, os problemas de ensino e aprendizagem que, relacionados á educação de um modo geral, foram abordados por Lüdke & André (1986, p.9):

> *Esses problemas, pela sua natureza específica, requerem técnicas de estudo também especialmente adequadas. Em lugar dos questionários aplicados a grandes amostras, ou dos coeficientes de correlação, típicos das análises experimentais, são utilizadas mais freqüentemente neste novo tipo de estudo a observação participante, que cola o pesquisador à realidade estudada; a entrevista, que permite um maior aprofundamento das informações obtidas; e a análise documental, que complementa os dados obtidos através da observação e da entrevista e que aponta novos aspectos da realidade pesquisada.*

Considerando nossa experiência prévia nessa área de ensino e aprendizagem de Cálculo, juntamente com as diversas variáveis que se apresentam em termos de uma análise epistemológica das características fundamentais ao pensamento diferencial e integral, nossa opção foi por uma metodologia de pesquisa qualitativa, que nos permitisse observar de modo a interferir o mínimo possível no dia-a-dia dos professores e alunos, e, principalmente, em suas maneiras de falar e apresentar as idéias e soluções de problemas em Cálculo. Por isso optamos pelo processo metodológico de observação participante[1], que permite a combinação de vários métodos dirigidos pelo pesquisador a um fim específico.

Portanto, além dessa observação sistemática com anotações do ocorrido em um caderno de campo, utilizamos entrevistas do tipo entrevista centrada[2], e a elaboração de problemas que foram resolvidos pelos estudantes individualmente ou em grupos de três ou quatro (segundo a intervenção pedagógica de seus respectivos professores).

As três turmas (T1, T2 e T3) escolhidas e observadas durante um ano, para fins de coleta de dados, foram de Cálculo inicial por entendermos este contexto propício à pesquisa de campo relativa à investigação de produção de pensamento diferencial e integral. Nelas, após aceitação dos respectivos professores e alunos quanto à observação e finalidade da pesquisadora em suas salas de aula, tivemos um período inicial _ cerca de dois meses _ de adaptação entre os estudantes e a pesquisadora, principalmente em termos de suas posturas, de passarem a não se incomodar com aquela figura (da pesquisadora) pouco interferente e muito próxima, observando e gravando.

---

[1] Entre as metodologias qualitativas (observação participante, pesquisa-ação, pesquisa-participante, história de vida e outras) citadas por Haguette (1990) a mais adequada em termos de suas características e definição foi a observação participante. À página 62, esta autora cita a seguinte definição de A. Cicourel:

> "... *definimos a observação participante como um processo no qual a presença do observador numa situação social é mantida para fins de investigação científica. O observador está em relação face a face com os observados, e, em participando com eles em seu ambiente natural de vida, coleta dados.*"

Ou ainda um pouco mais adiante:

> "*Por observação participante nós entendemos aquele método no qual o observador participa na vida diária das pessoas sob estudo, seja abertamente, no papel de pesquisador, seja de forma encoberta, através de um papel dissimulado, observando as coisas que acontecem, ouvindo o que é falado e questionando as pessoas no espaço de algum tempo*" (Becker & Geer, apud Haguette, 1990, p.63).

[2] Thiollent, apud Haguette (1990, p.77) diz que a **entrevista centrada** é aquela "*na qual, dentro da hipótese de certos temas, o entrevistador deixa o entrevistado descrever livremente a sua experiência pessoal a respeito do assunto investigado.*"

Ao expor sobre aspectos da própria situação de observação e entrevista Haguette (1990, p. 79) cita Argyris:

> *As entrevistas representam situações psicológicas novas para o entrevistado .Como tal, ele não percebe bem os objetivos nem sabe bem como se comportar; (...)os pesquisadores, na maioria vinculados a universidades, são muitas vezes percebidos como indivíduos sofisticados e de alta educação, o que pode criar uma reação de defesa por parte dos entrevistados.*

É de nossa competência, como pesquisadores, a avaliação do grau de correspondência entre as afirmações dos entrevistados e as nossas próprias observações no caderno de campo, com a realidade e o acontecido. Por isso foi imprescindível uma interação do pesquisador com o mundo do pesquisado. Segundo os autores Lüdke & André (1986, p.11),

> *a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra através do trabalho intensivo de campo*

6.2 SOBRE OS DADOS COLETADOS

Temos <u>quatro tipos de dados</u>:

1. <u>entrevistas individuais</u> gravadas (só "audio") ou filmadas (audiovisuais) com professores e com uma estudante de Cálculo I que já havia cursado esta disciplina pela Engenharia e pela Matemática;
2. <u>gravações de grupos de alunos em atividades</u> em sala de aula de Cálculo, sendo algumas filmadas (audiovisuais) e outras gravadas (só "audio").
3. <u>observações escritas</u> (cadernos de campo) pela pesquisadora em salas de aula de Cálculo;
4. <u>soluções escritas de problemas</u>, feitos individualmente ou em grupos pelos alunos em sala de aula de Cálculo.

Estes dados estão separados em três blocos de acordo com os respectivos tipos referidos acima, uma vez que têm natureza diferenciada; sendo que as observações escritas a respeito das aulas ("em loco") não são analisadas separadamente, mas agregadas aos demais tipos de dados sempre que julgamos pertinente e esclarecedora alguma comparação, adição ou crítica que estas possam proporcionar.

6.3 FORMAS DE APRESENTAÇÃO DAS FALAS E DAS SOLUÇÕES ESCRITAS

Olhando os dados do tipo 2., 3. e 4., transcritos das gravações e dos registros das observações em sala de aula, notamos certas distinções nas formas como eles se apresentam e resolvemos propor uma classificação destes dados em categorias antes de analisá-los segundo o MTCS. As razões que nos fazem assim proceder são: (a) as categorias descrevem essas formas de apresentação de maneira simples e fácil de serem observadas; (b) as categorias realçam a importância do MTCS nas análises das produções de significado durante as atividades em Cálculo, inclusive entre dados de uma mesma categoria.

As categorias utilizadas em suas soluções ou falas foram:

1) (**alg-func**) uso (exclusivamente) algébrico ou funcional, como as operações com números, variáveis, e funções;
2) (**lim**) uso de limite, como as expressões indicativas (por exemplo: $\lim_{x \to a} f(x) = L$) ou resoluções de limite de função, seqüência, ou qualquer outro, mesmo que não seja pela definição weirstrassiana;
3) (**deriv**) uso de derivada, como por regras de derivação, pela definição de derivada envolvendo limite do quociente de Newton, pela identificação com taxa de variação instantânea ou com declividade de reta tangente;
4) (**integr**) uso de integração, como por integrais definidas, indefinidas, integrais impróprias, e outras, ou pela definição envolvendo limite de soma de Riemann;

5) (**geom**) uso de gráficos, desenhos geométricos, ou soluções geométricas;

6) (**infinit**): uso de infinitésimos, por extensão dos reais (mesmo sem falar em hiper-reais), ou semelhantemente a Newton.(quantidades infinitamente pequenas, intervalo "infinitamente pequeno", quantidades "evanescentes")

Na referida classificação através das categorias acima, devemos notar que uma mesma solução ou fala pode ser enquadrada em mais de uma das categorias quando não ficar evidente a predominância acentuada de alguma delas, ou quando a predominância for de mais de uma.

6.4 DAS ANÁLISES SEGUNDO O MTCS

A concentração na importância do modelo ocorre justamente nas observações e análises, durante e após o recolhimento dos dados, à medida em que nossa atenção a partir do MTCS é dirigida à compreensão do pensamento diferencial e integral.

Propomos destacar e analisar certas partes dos dados coletados que julgamos evidenciar os modos de produção de significados para objetos a partir do Cálculo. Para isso, tomamos como referencial alguns tipos de *núcleos* e suas respectivas *estipulações locais*. As características básicas das *estipulações locais* desses núcleos são: (i) não são elementos a priori do processo de produção de significados; (ii) sua elaboração é via linguagem e simbologia visual (escrita e desenhos) de uso na própria Matemática e mesmo em linguagem comum (quotidiana) porém relacionadas a objetos e enunciados, textos, ou falas a partir do Cálculo; (iii) sua contextualização tem como meio as atividades.

Quanto à essa última característica, queremos dizer que não estamos considerando as expressões e símbolos nas estipulações locais específicas, que citaremos a seguir, "recortados" de todo o discurso ou separados do contexto das atividades. Elas foram observadas como sendo as de maior incidência em nossa vivência de sala de aula de Cálculo e em pesquisas (como as citadas no Capítulo 3) que focam a sala de aula e as enunciações de alunos de Cálculo. Contudo, nada impede que essas *estipulações locais* possam vir a compor *núcleos* de outros CS.

O que são estas *estipulações locais* ? São elementos do tipo: esquemas, objetos, axiomas, ou princípios, que na produção de significados constituem núcleos. Entre os modos de produção de significado (que caracterizam o pensamento diferencial e integral) ocorridos mais assiduamente durante as atividades observadas, aos quais pudemos evidenciar e denominar por suas estipulações locais específicas, estão:

- *CS em relação à noção de limite*
- *CS em relação à noção de infinitésimos*
- *CS em relação ao visual-geométrico*
- *CS em relação a algoritmos*

As estipulações locais estão sendo por nós tomadas como emergentes nos diversos modos de se pensar ou enunciar algo sobre os objetos do Cálculo.

Conforme dissemos e exemplificamos no Capítulo 4, ao falarmos do MTCS, é possível termos produções conjuntas de elementos (esquemas, princípios ou objetos), como equações e inequações desenvolvidas em meio à definição de limite (com suas variáveis, funções, quantificadores lógicos, operações, igualdades e desigualdades), ou seja, a produção de várias estipulações locais relacionadas conjuntamente.

Quando, nas discussões sobre a produção de significados e conhecimentos, não notarmos a especificidade ou a predominância de uma estipulação local em um núcleo, não tomaremos denominações especiais para ele. Em geral, um núcleo, por ter uma natureza essencialmente dinâmica, envolve mais que as estipulações locais com relação as quais se produziu significado para a matemática em questão. Por isso, muitas vezes nos referiremos às próprias estipulações locais características do pensamento diferencial e integral, ou de outros, como o do "*pensamento algébrico*",[3] sem mencionar a respeito de um núcleo que possam estar constituindo.

É importante dizer que entre as noções matemáticas fundamentais, que um professor de Matemática quer que o estudante produza, geralmente antecedendo e então se desenvolvendo com o *pensamento diferencial e integral*, estão as de variável e as de função, nem sempre suficientemente já trabalhadas pelo estudante desde o primeiro grau, de forma que possam integrar positivamente as novas noções que caracterizam o Cálculo.[4] Em nossos registros e análises, apesar de estarmos considerando essa dificuldade entre estudantes no primeiro ano de Cálculo, veremos incorporadas essas noções às *estipulações locais* em alguns dos modos de produção de significados, embora muitas vezes as identifiquemos como insuficientes (observando pelo ponto de vista de nossas intenções) e, em outras, até possam constituir obstáculos ao próprio pensamento matemático avançado. Lembramos que por isso e por sua importância, essas noções são constantemente re-trabalhadas no início do Cálculo e implementadas durante todo o primeiro ano desta disciplina.

6.4.1 Quanto aos núcleos e estipulações locais observadas

• Caracterizando um núcleo de limite temos as estipulações locais a respeito de limite :

_ a definição Weirstrassiana de limite de uma função de uma variável real, ou seja: dizemos que " $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ tal que se

$$0<|x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

OU

_ enunciados como:

[3] Cf. LINS & GIMENEZ (1997, p. 151).
[4] Segundo pudemos também constatar nas pesquisas de Williams (1991) e de White & Mitchelmore (1996), relatadas no Capítulo 3.

1. envolvendo expressões do tipo: "o limite é..."; ou "a existência do limite...";[5] (claro que na dependência do contexto, do que se está dizendo).

Ou

2. envolvendo símbolos como: $\lim_{x \to a} f(x)$ (onde *f(x)* é qualquer expressão funcional, e *a* pode ser até ∞); ou $\lim_{x \to c} \sum$ (de alguma expressão matemática); ou $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ tal que se $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ (ou com outras letras porém mantendo a implicação lógica matemática).

É preciso atenção ao que os estudantes de Cálculo, principalmente antes do segundo ano desta disciplina (comumente denominada Cálculo II), produzem como significados em relação a "limite"; pode ser que nem seja a partir de um *núcleo de limite*, pelo menos enquanto o ensino e aprendizagem relativos a este objeto são predominantemente intuitivos.[6]

•Caracterizando um <u>núcleo de infinitésimos</u> temos as <u>estipulações locais a respeito de infinitésimos</u>:

_ a noção ou a definição de um infinitésimo (número hiper-real), número infinitamente pequeno, mas maior do que zero;[7] ou mesmo a noção de infinitésimo mais intuitiva como concebida desde Newton (como: incrementos infinitamente pequenos, quantidades infinitamente pequenas, intervalo de tempo "infinitamente pequeno") e de Leibniz (como: número menor que

[5] Diferentemente estão expressões como "tende a..." ou "se aproxima de..." que, conforme veremos nas análises dos dados, geralmente estão em um outro modo de produzir significado envolvendo a noção de limite, podendo inclusive serem estipulações em um CS visual-geométrico.

[6] Referências sobre vários usos da palavra ***intuição***, adequados ao discurso que ora consideramos , podem ser encontrados em Davis & Hersh (1995, p.360-361).

[7] É mister que façamos uma ressalva em relação a essa noção ou definição de **infinitésimo** a partir da Análise não-Standard de Abraham Robinson (que reabilitou em uma linguagem formal a idéia de Leibniz de infinitésimos) _ a respeito dessa noção, pouquíssimo se fala em nível de uma disciplina de Análise (mesmo em cursos de graduação em Matemática) e menos ainda em disciplinas de Cálculo _. Portanto, embora a tenhamos colocado aqui; junto à noção de infinitésimos de Newton, é desta última que mais se fala entre os alunos e a maior parte dos professores.

qualquer outro designado, diferencial de uma variável é a "diferença infinitamente pequena", polígono de lados infinitamente pequenos)[8].

OU

_ os enunciados como:

1. envolvendo expressões do tipo: "é menor que qualquer número... mas não é zero (em um contexto em meio a valores positivos pequenos, por exemplo)"; "são muito, muito pequenos, infinitésimos"; "infinitesimais"; "infinitesimalmente pequeno";

Ou

2. envolvendo símbolos como: dx, d*f(x)*, d*A*, d*V* (onde "d(...)" é uma quantidade "infinitesimal", "muito, muito...muito pequena" de um objeto considerado).[9]

• Caracterizando o <u>núcleo visual-geométrico</u> temos as <u>estipulações locais visuais-geométricas</u> :

_ princípios geométricos como esquemas, resultados geométricos e fórmulas geométricas (por exemplo: da área de círculo _ $A_{círculo} = \pi r^2$ _ ou fórmulas obtidas de relações métricas de um triângulo retângulo de lados *b* e *c*, em que *b* é o lado adjacente ao ângulo α _ $tg\ \alpha = \frac{c}{b}$ _), gráficos e desenhos de figuras planas ou espaciais.

OU

_ os enunciados como:

1. envolvendo expressões do tipo: "pelo gráfico de..."; "a declividade da reta tangente à curva..."; "o coeficiente angular da reta tangente a(o)...";

---

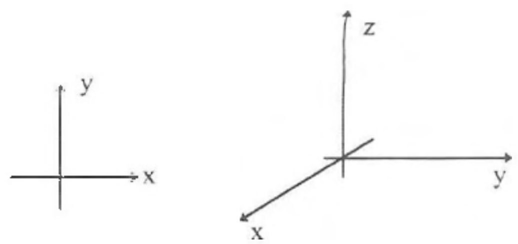
[8] Cf. em ALCOBA (1996, p. 160), LEIBINIZ (1983, p. 7), e BARON (1985, v.3, p. 28-34).

[9] Note-se aqui a diferença deste dx (infinitesimal) para o dx como diferencial de uma função, ou seja, escrito como $dx = \Delta x$ ou $dy = f'(x).dx$, onde Δx representa um <u>acréscimo real</u> na variável *x*.

"geometricamente a área (ou o volume) é..."; "graficamente podemos ter..."; "pelo esboço (gráfico) de..."; "podemos fazer um desenho de...";

Ou

2. envolvendo símbolos como:



(com qualquer desenho); ou outros tipos de gráficos

Ou mesmo desenhos de objetos planos ou espaciais (como figuras geométricas ou volumes de sólidos) sem eixos como referenciais.

• Caracterizando o núcleo do CS dos algoritmos temos as estipulações locais do tipo algoritmos:

_ esquemas, regras, fórmulas, seqüências memorizadas "de cor".

OU

_ enunciados como:

1. envolvendo expressões do tipo: "a regra é..."; "a fórmula é..."; "sei que se faz assim...não sei porque";

Ou

2. envolvendo símbolos de modo sistemático, sem necessitar reflexões, apenas memória.

Quanto a esse último núcleo, de estipulações locais do tipo algoritmos, temos a considerar que, primeiro, pode parecer a princípio que tem interseção com os demais campos mencionados, pois podemos ter algoritmo geométrico, algoritmo algébrico e assim por diante, mas devemos ter atenção ao que se fala efetivamente a partir deles, pois se é o algoritmo pelo algoritmo, ou seja, não há relacionamento a nenhum outro elemento possível em um campo (geométrico, algébrico ou outro diferente de um CS de algoritmos), então não se pode dizer que é um algoritmo de "tal tipo"; segundo, sua incidência torna-se freqüente à medida em que se trabalha o pensamento diferencial (e acreditamos que qualquer outro modo de pensar) e passamos a "automatizar" os procedimentos e processos (um comportamento psicologicamente positivo devido à repetição) que usamos com sucesso, tomando como estipulações locais elementos que, em ocasiões anteriores, foram objetos produzidos em outros CS em meio à pensamentos reflexivos; terceiro, por ser um modo de produzir significado através de "esquemas" (no qual a atenção fica voltada para os "passos a seguir"), torna-se também um modo de fugir da reflexão matemática (comportamento observado em alguns estudantes).

Em nossas análises, além do destaque desses CS com seus núcleos e estipulações locais respectivos, estaremos interessados em observar também pontos estratégicos na produção de significado, como:

_ Se houve mais de um tipo de CS nos quais um mesmo sujeito, diante de uma mesma atividade, produziu seus significados;

_ Se sujeitos, trabalhando em uma mesma atividade, tomaram CS diferenciados entre eles;

_ Se o sujeito mudou seu CS embora o pudesse ter mantido (do nosso ponto de vista).

6.5 OS DADOS

Neste item escolhemos alguns dos dados, de modo diversificado, para mostrar uma análise de produção de significados em relação ao MTCS.

6.5.1 Gravações e observações de atividades em sala de aula

ATIVIDADE 1

Problema 1 - gravado (P1-G)
Calcular o $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$

Essa atividade de resolução do problema **P1-G** foi proposta pelos respectivos professores aos seus alunos nas três turmas de Cálculo observadas, sendo que: na turma de Física, foi possível gravação em fita cassete, enquanto que, nas outras duas turmas _ de Matemática e Geologia _ a atividade foi descrita no caderno de campo pela pesquisadora durante a execução da mesma.

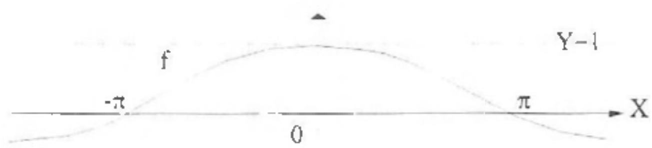
Na turma 1 (T1): A transcrição completa da fita sobre esta atividade encontra-se no Anexo 2 deste trabalho. A seguir transcrevemos as partes que julgamos mais pertinentes a essa pesquisa.

Os alunos de **T1** (55 alunos do curso de Física) trabalharam durante quase todas as aulas de Cálculo I em grupos. No dia desta atividade, como de costume, estávamos em um desses grupos para observar e gravar as falas enquanto discutiam e resolviam as questões da ficha de atividades.

Falas e observações:

Grupo de quatro alunos: **Jou**, **Nat**, **Raf**, e **Ped**; sendo que a pesquisadora (enquanto observadora), será designada, simplesmente, pela letra **O.**

Jou _ Fiz na calculadora e deu... Limite desse valor aí..., quanto mais zeros eu colocar mais perto vai chegar do valor no gráfico aqui [e aponta para a imagem no zero do gráfico que fez (sem preocupar-se com os zeros da função *f(x)* = $\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$, ou com as escalas)].



Raf _ Mas nunca vai ser 1.

Nat _ Mas aí você está justificando por infinitésimos. Encaminhamento 3 [dado pelo prof. na folha de atividades] [este aluno já havia tentado calcular $\frac{\text{sen } 0}{0}$ e visto a mensagem de ERRO na calculadora]

Raf _ Prá ser pelo gráfico tem que justificar porque vai ser 1.

Jou _ Eu tentei provar, eu juro que tentei com valores próximos de zero. Como vou provar?! Vou dizer que fiz na calculadora?

[Após algumas tentativas pelo gráfico e pela calculadora]

Jou _ Que dá 1 eu sei que dá 1. Mas, por que?

[O aluno A_3 não estava contente com a justificativa da aproximação pelo gráfico ou pela calculadora. Os outros três alunos do grupo tentam convencê-lo e a si mesmos.]

Raf _ Bom por exemplo eu vou jogar o valor Δx = 0,0001, e calcular $\frac{\text{sen } 0{,}0001}{0{,}0001}$, é igual a 0, 9999998

[E continua a fazer cálculos com valores menores que 0,0001].

Raf _ Aí. Deu quase 1, cara!

Jou _ E, se a gente jogar um valor menor vai dar mais aproximado ainda.

Raf _ Vai dar mais noves ainda.

O - E, onde você está aqui? [Aponta para o gráfico que tem desenhado de $y = \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$]

Raf _ Me aproximando... quase em cima do zero, não dá nem para marcar ai o ponto. Conclusão: _ Dá 1. Dá 1 cara!

(...)

[**Jou** diz de outro modo]

Jou _ Porque o seno de um ângulo pequeno é o próprio ângulo.

Raf _ É... Tem essa também.

Raf _ Vamos seguir o encaminhamento? A sugestão de **Jou** ?

[O prof. chega neste momento ao grupo, observa, e diz: "Se você fizer tudo bem pequenininho (aponta a figura do encaminhamento 3 que os alunos olhavam) você vai chegar a isso..." (aponta figura desenhada na mônada onde o seno do arco é o próprio arco)].

Raf _ Vamos dar esta explicação então.

Jou _ [Lê o que escreveu] Quando *x* é muito próximo de zero _ infinitésimos _, *sen x* é igual a *x* , e *um dividido pelo outro é igual a 1.*

Na turma 2 (T2) [Observações anotadas no caderno de campo]:

Os alunos de T2 (40 alunos de Matemática) trabalham individualmente nas atividades propostas pelo professor.

O professor inicia calculando, junto com a turma, o valor de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para alguns valores de *x*, cada vez menores. Diz o professor: "*Intutivamente vemos que* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$", em que o ajdunto adverbial de modo _ "*intuitivamente*" _ parece ter um significado literal de "sem rigor matemático suficiente a esse nível". [10]

[10] *A* **intuição** *em relação à Matemática, geralmente é usada para dizer que a mente humana pode desenvolver* pensamentos que são baseados em imagens e noções próprias, isto é, não necessariamente dentro de um rigor matemático (ou seja, de um procedimento segundo as regras de um sistema gramatical da matemática _ a Lógica), embora possa ser um pensamento com *bases lógicas. SegundoTall (1991, p.14): "Intuição é o produto de imagens conceituais do indivíduo"*, e, ainda à essa mesma página, fundamentado em concepções de Poincaré e de Fischbein, Tall reafirma que, intuições iniciais têm bases matemáticas *pré-formais* que vão sendo refinadas com o decorrer das experiências.

Ele faz a demonstração que os livros de Cálculo I geralmente trazem, usando geometria e o teorema do "sanduíche".

A seguir os alunos resolvem outros limites parecidos onde podem usar este problema como dado, ou que também têm que usar o teorema do "sanduíche".

Na turma 3 (T3) [Observações anotadas no caderno de campo]:

Os alunos de **T3** (33 alunos de Geologia) trabalham livremente, agrupados ou individualmente, nas atividades propostas pelo professor.

O professor pede que os alunos façam o gráfico de f(*x*) = $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ usando calculadora gráfica. Ao serem questionados sobre o problema do valor de f quando *x* é zero, olham o gráfico na calculadora e respondem que é 1; poucos (cerca de 6 alunos) tentam calcular valores de f para valores de *x* próximos de zero. Concordam em escrever que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, sem questionarem a indeterminação imediata do referido limite[11].

Classificação em relação às categorias:

Pode-se dizer, pelos registros da **T1**, *que os estudantes* **Jou** *e* **Raf** *pensaram* inicialmente em resolver usando informações numéricas (calculando valores de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ na calculadora) e, a seguir, através do gráfico de y = $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Isso classifica, em um primeiro passo, a solução nas categorias **alg-func e geom**.

Porém, no segundo passo, por iniciativa de **Jou**, os estudantes passam a pensar e discutir mais em termos numéricos, tentando valores "*bem próximos de zero*" e

[11] Prática semelhante, com aplicação inclusive desta mesma função entre outras, encontramos em Baldino et al. (1996, p. 294-301).

em termos de infinitésimos ("...*muito próximos de zero , infinitésimos*"); colocando a <u>solução final</u>, *aceita pelo grupo, na categoria* **infinit**.

Na ***T2****, o professor juntamente com os alunos (estes vão calculando os valores e ditando ao professor, que os afere e anota) usam primeiro uma solução* caracterizada por uma aproximação numérica, dinâmica, de valores cada vez mais próximos de zero (como o professor diz:: "*cada vez menores*"), solução pela categoria **alg-func**, *intuitiva* (segundo o professor).

A seguir como solução definitiva, faz uma demonstração que se classifica em **geom** e **lim**.

Na **T3**, os alunos buscam solução através do que vêem no gráfico, diretamente. Conforme observamos em suas falas, do tipo: "A função está passando onde em x zero e perto de zero? Em um." Ou seja, estão na categoria **geom**.

<u>Análise em relação ao MTCS</u>:

Na **T1**, vamos pontuar em cima dos enunciados transcritos das falas dos estudantes.

Apesar de na primeira fala de **Jou**, aparecer a frase "...quanto mais zeros eu colocar mais perto vai chegar do valor...", indicando uma certa aproximação, podemos observar que ele está se referindo só à questão gráfica, juntamente com **Raf**, tentando produzir significado a partir de *estipulações geométricas*. Só falam em mais aproximado ainda do valor 1 (um), referindo-se e apontando pontos no gráfico ou valores obtidos na calculadora relacionados ao gráfico; há uma nítida predominância do CS do visual-geométrico.

Raf, fala o tempo todo tentando perseguir a idéia de estar "muito, muito próximo de zero", tentando conciliar as duas coisas (o numérico e o geométrico), mas achando difícil falar do numérico numa situação na qual o visual lhe é suficiente. É o primeiro a aderir à idéia sugerida nos encaminhamentos do professor sobre infinitésimos.

O aluno **Nat** parece sempre tentar descobrir qual o valor de $\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}$ através de construção gráfica e de valores tabelados, inclusive se existe um valor para $\frac{\operatorname{sen} 0}{0}$. Fala muito pouco, e diz logo de início que estariam justificando por "infinitésimos", mas não podemos afirmar que estava produzindo significados em relação a um núcleo de infinitésimos, não exterioriza quase nada. Muito menos o aluno **Ped** , que só segue as instruções dos outros, concordando a cada afirmativa deles.

Finalmente, parecem se convencer do resultado e da justificativa por infinitésimos. Sendo que **Jou** manifesta seu entendimento falando aos demais: "*Quando x é muito próximo de zero _ infinitésimos _, sen x é igual a x e um divido pelo outro é igual a 1*". Como não há nenhuma propriedade mencionada (além da palavra "*infinitésimos*") que seja relativa à estipulações locais de infinitésimos e **Raf** fala de elementos numéricos querendo dar conta do que lhe é invisível e ao mesmo tempo óbvio graficamente, não podemos dizer que a produção de significados e de conhecimento passa a ser feita no *CS dos infinitésimos.*

Resumindo, podemos dizer que o aluno **Jou** inicia no *CS* do *estipulado geométrico* e que em conjunto com os demais no final da atividade passa ao *CS dos infinitésimos*. Já o aluno **Raf** parece estar sempre produzindo no *CS dos infinitésimos*.

Na **T2**, desde o início havia uma intenção do professor (que se evidenciou durante sua conduta de incentivo aos alunos) de mostrar que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ "se aproximava cada vez mais de 1, à medida que x se aproximava de 0", pensando como ele disse, "intuitivamente", e produzindo significados no CS do pensamento algébrico à medida que operava numericamente para mostrar esta aproximação juntamente com os *estudantes que também assim agiam* manuseando suas calculadoras.

Durante a demonstração formal do resultado proposto, o professor falou a partir de estipulações locais *de limite* (inclusive ao usar o teorema do "sanduíche" ou do "confronto" como é comumente denominado, ou seja, um resultado sobre funções que possuem *um mesmo limite em um mesmo ponto)* e de *estipulações visuais-geométricas* no cálculo de áreas, que permitem estabelecer as funções e as comparações (traduzidas em forma de equações) a serem usadas no teorema do "sanduíche". Além do mais, falou a partir de outras estipulações algébricas e regras. Por isso, podemos dizer que produziu significados nos seguintes CS: de limite, visual-geométrico, do pensamento algébrico e dos algoritmos.

Contudo, não podemos dizer o mesmo dos estudantes que durante essa ação de exposição do professor permaneceram como espectadores, às vezes falando baixinho um com outro, não possibilitando observarmos o que ocorria em relação às falas deles.

Na **T3**, o modo de produção de significados dos *alunos* teve um núcleo constituído de *estipulações locais geométricas*, pois só faziam suas enunciações a partir das construções gráficas, tomando "janelas" em torno de $x = 0$ para observar o gráfico nas calculadoras. Inclusive ao responderem à questão do valor de f para $x = 0$: "*f(0) é um*" (sem titubear, sem qualquer enunciação a respeito da "impossibilidade" de se calcular o valor em $x = 0$). Como *alguns poucos estudantes experimentavam* valores numéricos pequenos para x, questionamos a dois deles, que responderam: "é para <u>ver</u> valores da função". Infelizmente, não tivemos como averiguar mais o que pensavam e o que os faziam não colocar em suas tabelas um valor para a expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ em $x = 0$, às vezes deixado com um ponto de interrogação.

Portanto os alunos parecem ter permanecido no CS do *visual-geométrico*.

Todavia, não posso dizer o mesmo do professor (pelas observações particulares que me fez durante o transcorrer das atividades, nas quais incluiu os termos "se aproxima cada vez mais de..." e "limite é...").

ATIVIDADE 2

Foram filmadas e gravadas (em fita de vídeo) as soluções de quatro problemas (**P2-G**, **P3-G**, **P4-G** e **P5-G**), propostos pela pesquisadora (observadora) como atividade em sala de aula, a dois grupos de alunos (**GA** e **GB**) de uma mesma turma (**T1**), que os resolveram na ordem em que os apresentamos a seguir.

Problema 2 - Gravado (P2-G)
Comentem entre si e escrevam o que vem de mais imediato em seus pensamentos se peço para pensarem no que aprenderam de importante a respeito de derivada de uma função.   OBS: Se for mais de uma referência, e se acharem que há ordem de importância, favor mencioná-la. Também ao contrário, se acharem que não há.

Falas e soluções:

Transcrevemos a seguir algumas partes para entendimento de nossa análise. (Transcrição mais completa encontra-se no Anexo 3)

Grupo A (GA)

O _ Pesquisadora

Dan , **Gib** , **Nor** - Estudantes do **GA**.

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou não deixam muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema **P2-G** em voz alta, a seguir começam a conversar entre si].

Dan - O que que vem de imediato?

Gib - Derivada é o coeficiente angular da reta tangente. Isso vem de imediato.

Se você tiver um gráfico espaço por tempo e você vai calcular a derivada você vai ter velocidade, e se for de velocidade por tempo e você calcular a derivada você vai ter aceleração.

Dan - O mais imediato eu acho que é a derivada como coeficiente da reta tangente que o professor fixou mais com a gente e ..."insiste" em mencionar. Escreve aí ... [fala para **Gib**].

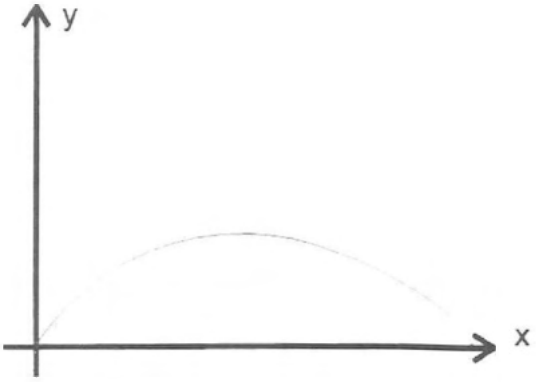
[O aluno **Gib** escreve a frase: "A derivada é o coeficiente angular da reta tangente", como podemos observar também na folha que entregaram e no video].

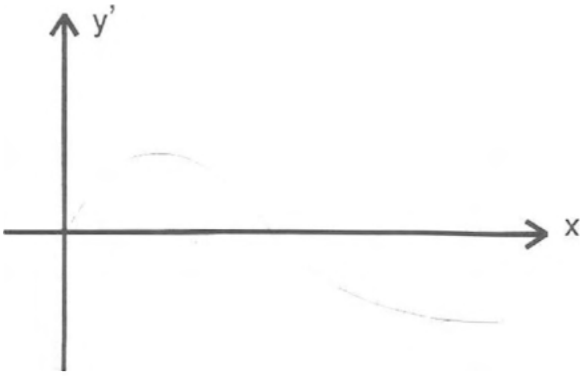
Nor - Depois vem a interpretação de gráfico.

Gib - Então. A gente pode fazer um gráfico aqui e tentar interpretar.

[**Nor** desenha um gráfico de espaço por tempo, **Dan** e **Gib** também, só que **Dan** coloca as letras x e y nos eixos em vez de s e t como **Gib**].

[Ao traçar seu esboço gráfico (figura a seguir), **Dan** já toma um segundo par de eixos logo abaixo do primeiro, transferindo as abcissas, valores de x do gráfico anterior, e vai tomando como valores das ordenadas as "inclinações" que diz ser: mais positiva, nula ou negativa conforme os pontos tomados].





[Só falam em reta tangente e na interpretação fisica como velocidade instantânea].

Gib - No meu gráfico tomei um ponto P e queria saber a velocidade instantânea no ponto P.
A velocidade instantânea neste ponto é dada pela derivada.
Tomando uma paralela a partir do ponto P, ao eixo x, e traçando uma perpendicular a essa última reta, encontrando a reta que tangencia em P, eu vou ter um Δy, um número, e um Δx um número também. E a derivada vai ser $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, no caso seria a velocidade instantânea no ponto P.

Dan . Que é a própria derivada.

Gib - Que é o coeficiente angular da reta tangente em P.

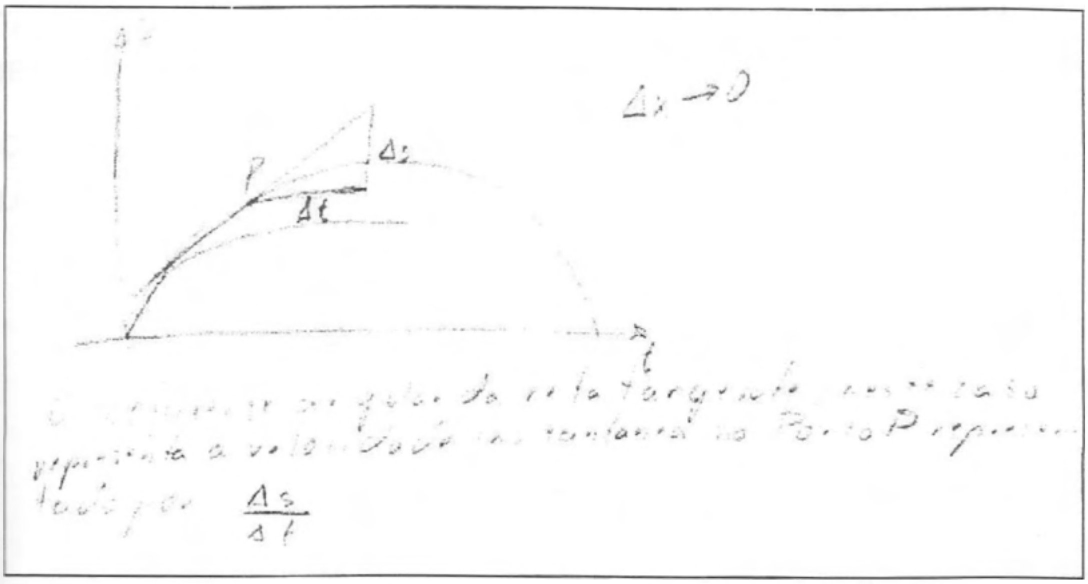
Dan - É.

Gib - Se fosse um gráfico de velocidade por tempo, teríamos aceleração.

Dan - Na parte física, só.

Gib - É. Se eu fosse fazer uma interpretação matemática, aí é o coeficiente angular da reta tangente. Prá Física é a velocidade instantânea no ponto P.

GA - Solução de P2-G



Grupo B (**GB**)

O - Pesquisadora

Ton , **Lia** , **Lis** - Estudantes do **GB**.

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema **P2-G** em voz alta, e em seguida começam a conversar entre si].

Lia - Em primeiro lugar...<u>derivada de uma função é o coeficiente angular da tangente no ponto</u>.

Ton - Da reta tangente ao ponto.

[**Ton** torna a ler a pergunta do problema. "O que vem de mais imediato a seus *pensamentos sobre derivada?"*].

Lis - <u>Coeficiente angular</u>.

Lia - *Isso quando se trata de um gráfico, né?!*

[**Ton** e **Lia** desenham um gráfico e uma reta tangente num dos pontos].

Lia - *Tem uma função. Tem um gráfico.*

[Desenham].

Lia - Essa reta tangente expressaria a derivada nesse ponto. Se...

Ton - Mais que isso. Você pode pegar uma posição x e seu correspondente f(x) . Uma x+h e f(x+h) . Por Newton.

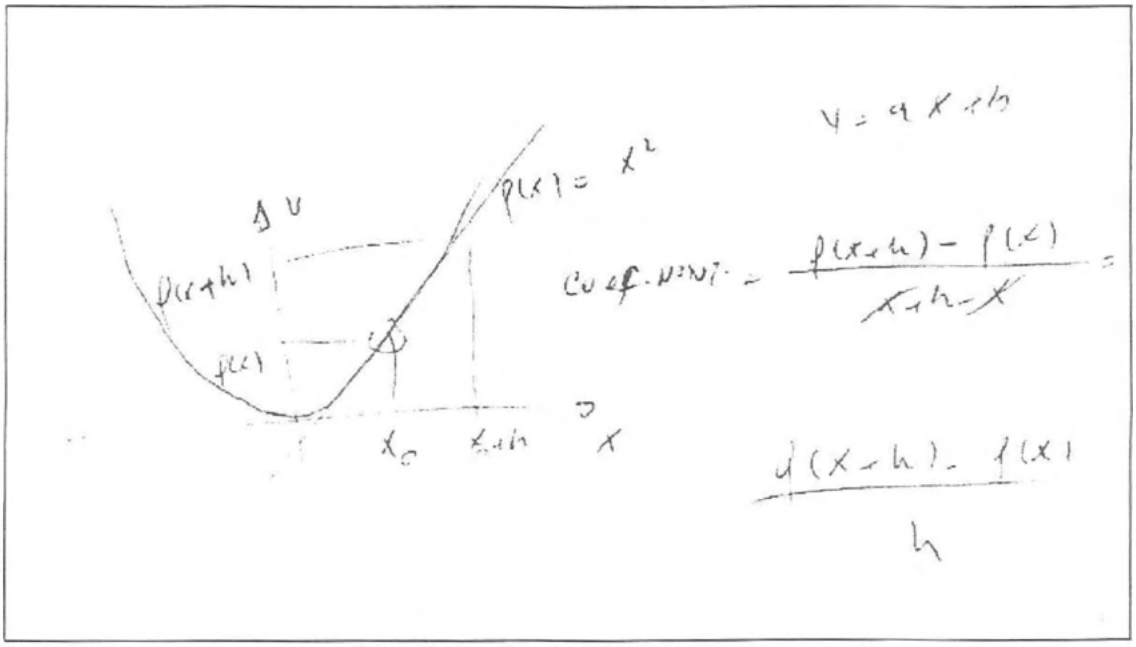
Lis - <u>Limite do quociente de Newton</u>.

Ton - Isso. Limite do quociente de Newton.

[Escreve:]

Coef. Newt. $= \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (*)

Lia - Quociente de Newton.



GB - Solução de **P2 G**

Ton - Isso aqui [aponta (*)] é o coeficiente angular de uma reta secante. Na verdade você tem uma reta secante pegando dois pontos.

Lia - Isso. Dois pontos do gráfico.

Ton - Aí quando você fizer h tender a zero, h diminuindo, você vai ter a derivada que é o coeficiente angular da reta tangente no ponto.

Lis - É isso aqui. [Exibe seu desenho]

Lia - dh no caso. Você tá entendendo o "h"... Ele vai se tornar uma coisa infinitesimalmente pequena.

E para derivada de uma função, por exemplo $y = x^2$, você diferencia $dy = 2x.dx$ ... então derivada vai ser $\dfrac{dy}{dx} = 2x$.

Lis - A derivada de x^2 é $2x$, a diferencial de x^2 é $2x.dx$.

[Escreve:] $Dx^2 = 2x$ $\quad$ f '(x)

$dx^2 = 2x\,dx$

Ton - [Indica o dx no quadradinho] esse é o diferencial.

O - Qual é a diferença?

Ton - Trata-se de coisas muito pequenas, infinitésimos, por isso que tem esse dx aqui.
Lia - Um incremento. Um incremento de x .
[Passam a outro problema].

Classificação em relação às categorias:

Os estudantes do **GA** se fixam no uso da derivada como "coeficiente angular da reta tangente", quando então explicam através de gráficos inclusive como encontrar a declividade de uma reta que tomam como a tangente em um ponto *P* no gráfico da função traçada (veja a seguir a figura da solução escrita), e, falam do uso da derivada como "taxa de variação instantânea", ao se referirem à Física. Isso classifica suas falas e soluções nas categorias **deriv** e **geom**.

Os estudantes do **GB** também começam falando da derivada como "coeficiente angular da reta tangente no ponto" , mas relacionam à derivada como limite do quociente de Newton, explicando que antes de fazer "h tender a zero" e encontrar o coeficiente da reta tangente, tem-se o coeficiente da reta secante. No final referem-se à derivada de x^2 na forma diferencial, quando então, **Ton** diz que o diferencial é um "*infinitésimo*", mas não rebate nem acrescenta nada ao ouvir, logo a seguir, **Lia** dizer que é um "*incremento*". Portanto podemos dizer que suas soluções se classificam predominantemente em **deriv**, embora em algumas passagens (cálculos algébricos) estejam em **alg-func**.

Análise em relação ao MTCS:

No **GA**, os estudantes **Dan** e **Gib** produzem significados geométricos em relação à derivada ao afirmarem que "derivada é o coeficiente angular da reta tangente", *continuando em um CS visual-geométrico ao elaborarem gráficos e até mesmo quando falam a respeito da Física e colocam os eixos representando as variáveis espaço*, tempo, e velocidade, os quais aparecem como significados e objetos centrais.

Podemos observar que apenas nomeiam como "coeficiente angular da reta tangente à curva" ou "velocidade instantânea (taxa de variação instantânea)", mas o modo de produção de significados e o *objeto derivada* estão em um CS visual-geométrico, pois, desenham comentando gráficos de funções com retas tangentes e mostram como encontrar a declividade de uma reta em um ponto determinado (usam uma tangente relacionando-se a um gráfico "tempo *X* espaço"). Contudo, podemos observar a pouca atenção com a simbolização, até pelo equívoco de $\Delta x \rightarrow 0$ em vez de $\Delta t \rightarrow 0$ (já que tratavam com as variáveis espaço e tempo, como podemos também notar na solução escrita deste grupo) e que isso, deve ter ocorrido, justamente pela predominância do pensar visual-geométrico.

No **GB**, o estudante **Dan**, assim como **Lia**, inicia produzindo significados em relação a um núcleo visual-geométrico (esboçando gráficos e falando em reta tangente e coeficiente angular), mas logo relaciona-se à estipulações numéricas-funcionais, operando a partir do coeficiente de Newton (veja solução de **P2-G** pelo **GB**).

Nas frases finais de **Lia** e **Lis** notamos as regras de diferencial e derivada de x^2 como elementos de destaque e, pelo fato de falarem muito pouco (mesmo quando questionados pela pesquisadora) da diferença entre a derivada e o diferencial de x^2, inclusive se *dx* é uma "*coisa ifinitesimalmente pequena*" ou um "*acréscimo*" (de que tipo?), só podemos afirmar que produziam significados em relação a estipulações locais algorítmicas.

Problema 3 - gravado (P3-G)

Sendo f uma função, como por exemplo $f(x) = x^2$, qual o modo que vocês mais usam para pensar e explicar para alguém o cálculo da derivada desta função num ponto de abcissa x_0 sabendo que ela é o "<u>coeficiente angular da reta tangente</u>" ao gráfico da função neste ponto?

<u>Falas e soluções</u>:

Transcrevemos a seguir algumas partes para entendimento de nossa análise. (Transcrição mais completa encontra-se no Anexo 3)

Grupo A (GA)

O _ Pesquisadora

Dan , **Gib** , **Nor** _ Estudantes do **GA**.

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou não deixam muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema **P3-G** em voz alta, a seguir começam a conversar entre si].

Gib - Acho que primeiro é interessante fazer um gráfico da função, né?!

[Os estudantes fazem gráficos e tomam um ponto x_0].

Dan - A gente coloca onde quiser o ponto x_0 ?

O - E o que é a derivada em x_0 ?

Dan - Então vou colocar x_0 aqui [e aponta no gráfico, traçando a seguir a reta tangente]. Se colocar aqui vou ter uma inclinação assim da reta tangente.

[E escreve: f '(x) = 2x, tomando o gráfico de f ' como uma reta].

O - Qual seria a expressão da derivada? Como é que calculariam?

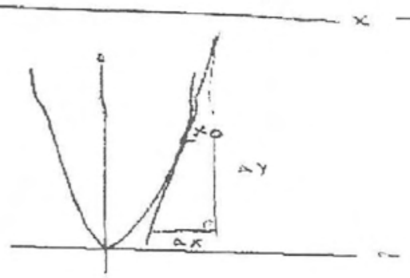
[Os alunos continuam a fazer gráficos e a pensar a partir deles].

Dan - Graficamente eu vou ter uma reta. Agora...se eu derivar isso daí, x^2, dá 2x.

(...)

GA - 1ª parte da solução do **P3-G** :

A derivada $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que é o coeficiente angular da reta tangente no ponto P, que neste caso é a velocidade instantânea no ponto P



X_0 = coef. angular da tangente no ponto (n)

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

O - Por que a derivada é 2x ? Eu quero que vocês tentem explicar.

Dan - Então. Porque a gente vai...Vai pegando retas tangentes ao longo desse gráfico e vai vendo a inclinação dessa reta, e assim a gente pode desenhar o próximo gráfico. da derivada já... (...)

O - Por que que é 2x? Como você pode explicar?

Dan - Aí é complicado!

Nor - Tem derivada por Newton. [Fala para os demais].

Dan - Por limite? Virgiii...!

[**Gib** tenta encontrar algo nos apontamentos de aula, nas fichas de encaminhamentos dadas pelo professor].

Dan - Ah! Eu não consigo fazer assim. Eu acho que tem que fazer através do gráfico.
(...)

Nor - Através do gráfico você não tem como demonstrar que é 2x.
(...)

[Todos procuram nas fichas de encaminhamentos das atividades já dadas em sala de aula].

Gib - Na FT 06, aí gente. É eu acho que é por aí. Temos que aplicar o quociente de Newton prá chegar nisso aí.

Dan - Limite, né?!

Gib - Pelo quociente de Newton nós temos que aplicar **f '(x)** = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ fazendo Δx "bem pequenininho".

[Resolvem e encontram a derivada, discutindo as substituições e algebrismos].

GA - 2ª parte da solução P3-G

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x =$$

$$= 2x \qquad f'(4) = 8 \qquad \boxed{f'(x^2) = 2x}$$

Grupo B (**GB**)

O _ Pesquisadora

Ton , **Lia** , **Lis** _ Estudantes do **GB**.

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema **P3-G** em voz alta, e em seguida começam a conversar entre si].

Lia - Desenvolver isso aqui [e aponta para o quociente de Newton que **Ton** havia escrito no 1º problema (**P2 -G** anterior)].

Ton - No caso vai ficar [E escreve discutindo com os outros dois:]

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x = D(x^2) = f'(x) = 2x$$

Lia - E 2x ... Seria a equação da...

Ton - No nosso caso...

Lia - 2 é o coeficiente angular ...2x.

Lis - 2x. E, respondendo à pergunta, então..."o modo que a gente ia usar é pelo quociente de Newton."

Ton - É, praticamente, acho mais fácil de ver e explicar para alguém.

O - Mas teria outro?

Ton - Na verdade eu já ouvi algumas explicações... Isso é por Newton, mas você também poderia imaginar...na verdade aqui v. está fazendo h se aproximando [mostra dois dedos se aproximando do ponto x_0], v. poderia imaginar ao contrário como se fosse uma "bolota", crescendo, ou alguma coisa crescendo isso aqui [mostra a curva em torno do ponto, figura anterior], se expandindo...

O - E aí?

Ton - Eu não saberia como equacionar isso.

O - Seria o que ele [referindo a **Lia**] falou de infinitésimos?

Ton - Acredito que sim, seria por infinitésimos. Eu consigo visualizar os infinitésimos melhor na integração, mas nas derivadas...

(...)

O - O que vocês entendem por infinitésimos?

Ton - Como assim?

O - Quando você fala: "é um infinitésimo", que vem na sua cabeça?

Lia - Uma coisa infinitamente pequena, que dá para somar e ter um valor exato [refere-se a uma área que desenha, com soma de retângulos infinitesimais. Não falam mais nada a respeito de **P3-G**].

Classificação em relação às categorias:

Os estudantes **Dan** e **Gib** do **GA** iniciam a discussão sobre **P3-G** falando de gráficos e esboçando-os. Como a função sugerida é $f(x) = x^2$, eles desenham uma parábola e, a seguir, uma reta tangente em um ponto de abcissa x_0. **Dan** reluta em acatar a afirmação dos outros dois colegas para resolverem a derivada pelo limite do quociente de Newton, ele quer usar esboços gráficos como no problema anterior (**P2-G**). Depois **Dan** acaba cedendo, e juntos calculam a derivada de x^2 pela definição (limite do quociente de Newton).

Ou seja, podemos classificar suas soluções e falas na categoria **geom** e deriv.

Os estudantes do **GB** tomam logo o limite do quociente de Newton para calcularem a derivada pedida. Depois dizem que existe uma solução também por infinitésimos, mas que não sabem como "equacioná-la".

Logo, a solução que apresentam pode ser classificada como **deriv** , **alg-func** e **lim**.

Análise em relação ao MTCS:

No **GA**, principalmente para o estudante **Dan** é nítida sua preferência de produção de significados em um CS visual-geométrico ao trabalharem o **P3-G**. Ao falar em derivada de x^2: "Agora...se eu derivar isso daí, $\underline{x^2\text{ , dá }2x}$", há uma produção de significados em relação a um núcleo de algoritmos, de regras para o Cálculo, em um CS de algoritmos. Contudo, **Dan** logo volta a se relacionar a um núcleo visual-geométrico ao enunciar: "Vai pegando <u>retas tangentes ao longo desse gráfico</u> e vai <u>vendo</u> a inclinação dessa reta, e assim a gente pode <u>desenhar o próximo gráfico</u>, da derivada", referindo-se à encontrar a derivada de x^2.

Após sugestão de **Nor**, de consultarem fichas de trabalho a respeito da definição de derivada pelo quociente de Newton, passam a produzir significados algébricos-funcionais, do tipo algoritmos ou outros mais (nem sempre notados) pela escrita. Em certas ações, como por exemplo a passagem em que escreve

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \cancel{\Delta x}^{0} = 2x$, ele parece já automatizado em um CS de algoritmos (o esquema é do tipo: "fazer $\Delta x = 0$ e operar") não se relacionando à um núcleo de limites.

No **GB**, ocorre o mesmo que para o **GA** na parte final da resolução de **P3-G**, quando relacionam-se ao algoritmo: f '(x) = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, inclusive a respeito da passagem final ao limite.

Problema 4 - gravado (P4-G)

Um depósito de farinha está furado no fundo, por onde estão escapando, durante cada minuto, 1/200 avos da quantidade de farinha existente no depósito. Inicialmente a quantidade de farinha era de 800 kg.

Um depósito de farinha está furado no fundo, por onde estão escapando, durante cada minuto, 1/200 avos da quantidade de farinha existente no depósito. Inicialmente a quantidade de farinha era de 800 kg.

(a) Quantos quilos de farinha escaparão em 5 minutos?

(b)faça um gráfico da quantidade de farinha no depósito em função do tempo.

(c) Vocês acham que é possível prever que o depósito se esvaziará, ou não? Tente escrever uma justificação.

__Fala e soluções__:

Transcrevemos a seguir algumas partes para entendimento de nossa análise. (Transcrição mais completa encontra-se no Anexo 3)

__Grupo A (GA)__

O _ Pesquisadora

Dan , **Gib** , **Nor** _ Estudantes do **GA**.

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou não deixam muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema **P4-G** em voz alta, a seguir começam a conversar entre si].

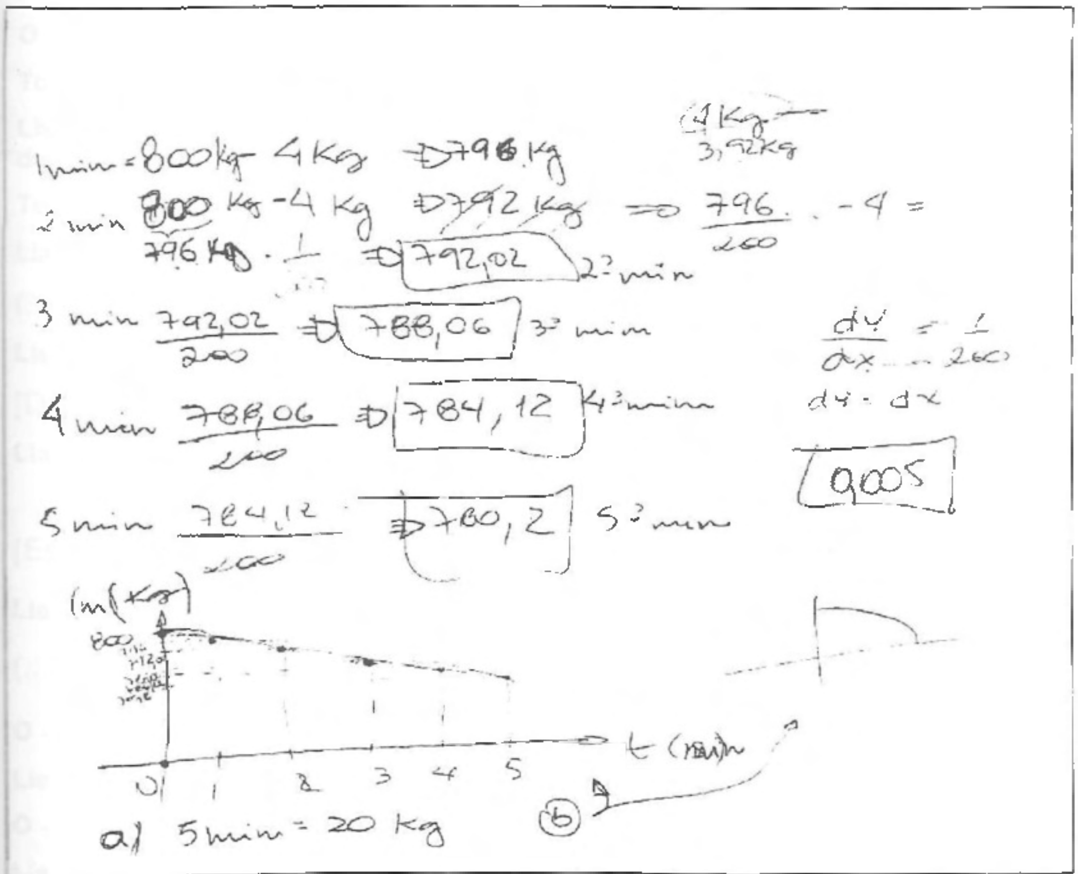
Nor - Isso é problema de taxa.

Dan - Taxa de variação. Na verdade uma exponencialzinha.

Gib - Mas, não dá para resolver de modo mais simples isso aqui?

Dan - Não sei, vamos tentar.

[Fazem as contas minuto a minuto até o quinto, e a seguir um gráfico contínuo de t (tempo) por m (kilos) de farinha, marcando valores de t=0 a t=5. Dan chega a se referir a um outro modo de fazer, por taxa novamente, mas não se lembra como. Dão por encerrado.]



GA - Solução do P4-G

Grupo B (**GB**)

O _ Pesquisadora

Ton , **Lia** , **Lis** _ Estudantes do **GB**.

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema **P4-G** em voz alta, e em seguida começam a conversar entre si].

Lia - É uma taxa de 800 kg por minuto. É uma taxa de vazão da...farinha.

Ton - Num tempo.

Lia - Quer o volume exato, dQ/dt [escreve] naquele momento. Seria isso. [Fazem alguns cálculos numéricos]

Lia - 4 kg é a taxa de vazão da farinha do depósito por minuto.

O - A cada minuto vaza 4?

Ton - Seria isso.

Lis - Acho que tá estranho porque vaza 1/200 avos da quantidade de farinha que está no depósito e após o primeiro minuto não vai ter mais 800 kg.

Ton - É verdade... Então 4 kg é no primeiro momento.

Lia - Depois vai vazar menos.

(...)[pensam]

Lis - Um segundo depois já não vai ser mais...

[Discutem]

Lia - Então que função poderia expressar isso?

Peso por uma quantidade... alguma coisa em função de t. Exponencial?

[Escrevem:]

Lia - $\frac{dQ}{dt} = \frac{-1}{200}Q(t)$, uma taxa.

(...)

O - Mas Q é uma quantidade?

Lis - Q é uma variável.

O - Que variável é essa?

Lia - Quantidade de farinha no depósito.

O - Então que quer dizer dQ/dt ?

Lia - A taxa de variação é 1/200 de Q_0.

O - De Q_0, inicial?

Lia - Não, de Q.

(...)

Ton - Acho que inicialmente vaza devagar.

Lia - Não, inicialmente...

Lis - Vaza 4 kg por minuto, **Lia**. Só que 1 segundo depois, diminue.

Lis - Vaza menos, cada vez menos.

[**Lis** explica para **Ton**, com ajuda de **Lia**]

Lia - Qual é a função?

[Escreve:] $\frac{dQ}{dt} = \frac{-1}{200} Q(t)$ [Continua a escrever:]

$Q = \int_0^5 -\frac{Q(t)}{200} dt$, $Q = \frac{-1}{200} \int_0^5 Q(t).dt$

Se f é 5t então [escreve:] $Q = \frac{-1}{200} \int_0^5 5t.dt$, $Q = \frac{-5}{200} . \frac{t^2}{2}$

O - Quem é função do tempo?

Lia - A massa, a quantidade Q.

O - Vocês têm condição de encontrar Q?

Lis - Era para ter.

Lia - Se desse a massa em função de t ...

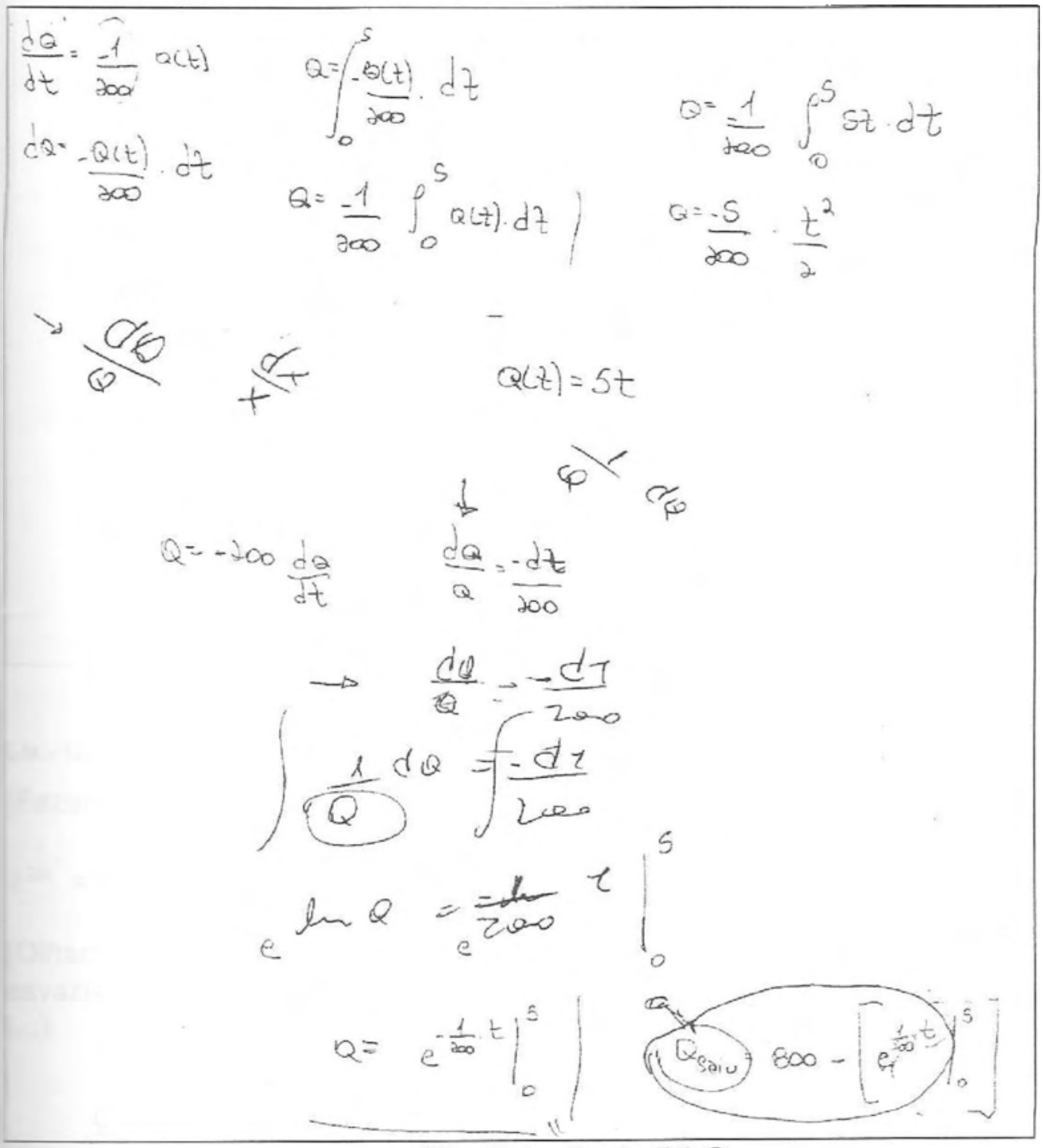
O - E a taxa? O que é uma taxa?

Lis - Uma derivada.

O - Então vocês têm a derivada de Q. Podem achar Q?

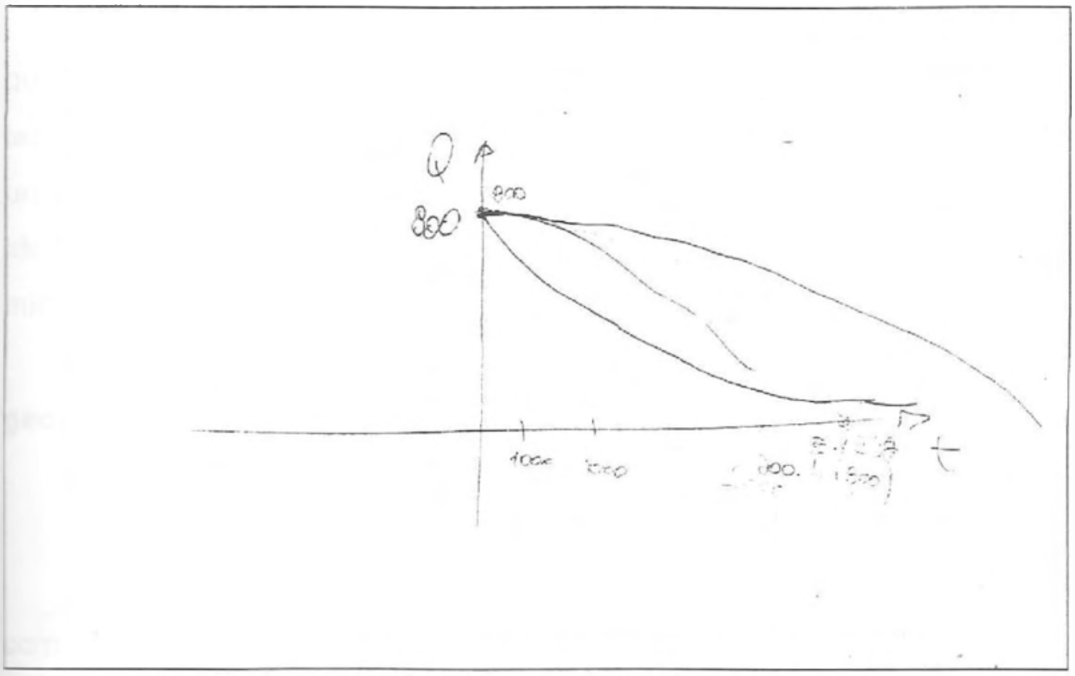
Ton - Integra.

[Discutem o que escreveram e os cálculos com alguma interferência da observadora.]



GB - Solução do **P4-G**

Ton- O gráfico seria de uma exponencial.
[Discutem e acabam por traçar]
(...)



<u>GB - Solução gráfica do **P4-G**</u>

Lia - Queremos achar, por exemplo, onde Q = 0.

[Fazem cálculos para alguns valores utilizando calculadoras, escrevem:]

$e^{\frac{1}{200}t} = 800$, $\frac{1}{200}.t = \ln(800)$, $t = 200.\ln(800)$.

[Olham os gráficos e as contas (com seus erros) e concluem que o depósito se esvazia em um certo tempo t.]
(...)

<u>Classificação em relação às categorias</u>:

Os estudantes **Dan** e **Nor** do **GA** de início parecem pensar em uma solução envolvendo taxa de variação, mas não desenvolvem esta idéia, passando à sugestão de **Gib**, quer seja, resolver de outro modo _ fazer cálculos minuto-por-minuto até atingir o quinto minuto para obter a resposta pedida no **P4-G** _. Assim prosseguem, fazendo as contas sem maiores discussões a respeito do problema. O esboço gráfico é feito tomando pontos de modo discreto, minuto a minuto, mas depois os pontos são ligados em um traçado contínuo (segundo também esboço menor indicado ao lado do gráfico que traçam, veja figura: **GA** _ Solução de **P4-G**).

Assim, pelas poucas falas e olhando o que escrevem, podemos classificar a solução em **alg-func** e em **geom**.

Os estudantes do **GB** falam direto em uma taxa que relaciona a quantidade de farinha (*Q*) com o tempo (*t*). **Lia** escreve corretamente a taxa em termos de derivada e, depois de conversar com os demais, escreve na forma de uma equação diferencial, que integra para encontrar *Q*. No final da solução idealizam (incorretamente) uma nova quantidade, Q_{saiu}, relacionada à quantidade inicial existente.

Pelo observado, classificamos a solução nas categorias **deriv**, **integr** e **geom**.

<u>**Análise em relação ao MTCS**</u>:

No **GA**, apesar de encontrarmos um início de falas relacionando o **P4-G** com taxas, essa intenção não é seguida. Temos uma solução em relação a estipulações locais numéricas e calculadas de modo discreto, que não expressam pensamentos (esperados) do tipo diferencial e integral. Na parte final, referente ao gráfico, produziram significados em relação a um núcleo visual-geométrico.

Quanto ao **GB**, iniciam falando de taxa em relação ao tempo porém com significado discreto-numérico, **Lia diz**: "4 kg é a taxa de vazão da farinha do depósito por minuto". Discutem, passam a pensar a vazão da farinha em segundos, falando e pensando em se relacionar em função do tempo. Q (quantidade de farinha) parece ser, então, pensada como uma variação contínua em relação ao tempo. Lia escreve: $\frac{dQ}{dt} = \frac{-1}{200}Q(t)$, simbolizando a taxa de variação falada em função do tempo, como ela diz. Seguem produzindo significados relacionados a estipulações algébricas e funcionais.

Problema 5 - gravado (P5-G)

Pensem e discutam sobre $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, digam quais das frases abaixo se adequa melhor e porquê?

(a) à medida que *n* tender a infinito, 1/*n* tende a zero;
(b) quando *n* for infinito, 1/*n* será zero;
(c) 1/*n* pode se aproximar cada vez mais de zero se tomarmos *n* cada vez maior;
(d) o inverso de um valor infinitamente grande é um valor infinitamente pequeno, logo o inverso de infinito é zero.

Falas e soluções:

Este problema não foi discutido no **GA**, os estudantes não tiveram tempo para fazê-lo devido a demora nos demais problemas, por isso a transcrição e análises a seguir referem-se só ao **GB**. (Transcrição mais completa encontra-se no Anexo 3)

Grupo B (**GB**)

O _ Pesquisadora

Ton , **Lia** , **Lis** _ Estudantes do **GB**.

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema **P5-G** em voz alta, e em seguida começam a conversar entre si].

Ton - 1/*n* quando *n* tende a zero...
Lis - Eu entenderia se fosse *n* tendendo a infinito.
O - Então pense assim.
Ton - Reformou então?... *n* tá tendendo ao infinito?
Lia - Isso.
Ton - Tá, então *n* tá tendendo ao infinito.
[Falam e comentam entre si sobre o enunciado]
Lis - Você nunca vai ter infinito.
O - Como?
Lis - Você nunca vai poder falar: "esse número é infinito, então o inverso dele é zero".

[**Lis** e **Lia** apontam algumas das frases do enunciado do problema com as quais parecem concordar e outras que parecem rejeitar]

O - Vocês poderiam dar uma razão porque escolheram algumas e jogaram outras fora?

Lia - Sim. Aqui ele fala de valor... [Aponta (d), e passa o dedo para a resposta (b)] No (b), no (b).

Lis - Como na letra (b) ele fala "quando *n* for infinito 1/*n* será zero"..., *n* nunca será infinito.

Ton - Ele vai tender a infinito. Não dá para usar o conceito de infinito como algo estático, parado. Tem que ser uma coisa...que está tendendo.

Lia e Ton - Eu acho a (c) mais clara.

[Dão por respondido.]

Classificação em relação às categorias:

Podemos dizer que o problema refere- se ao cálculo de um limite, e que os estudantes do **GB** ao lê-lo pensam a respeito do limite de 1/n quando n tende ao infinito. Os estudantes **Lia** e **Lis** falam sobre a tendência de n ao infinito de modo dinâmico, como algo que cresce potencialmente e indefinidamente[1], por isso descartam a resposta (b) e (d) ficando com a (c).

A classificação é portanto na categoria **lim**.

Análise em relação ao MTCS:

Lembramos que o fato de olharmos para o problema e o destacarmos como "referindo-se a limite", já é devido aos significados e objetos que produzimos para o enunciado em relação a um núcleo com estipulações e objetos semelhantes para os quais já se produziu significados em outros momentos.

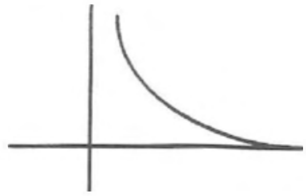
As preocupações dos alunos parecem ser relacionadas ao que é fazer "*n tender a infinito*", ou à noção de infinito como algo inatingível, nas palavras deles: "...*n* nunca será infinito. Ele vai tender a infinito. Não dá para usar o conceito de infinito como algo estático."

Os significados produzidos dessa forma "*potencialista*"[1] para as expressões "tende a" ou "se aproxima de" podem ser relativas a estipulações algébricas-numéricas (com base nos reais ou racionais) ao pensarem no "*valor*" 1/n, *número* 1/n, que vai "diminuindo-diminuindo", quando tomamos n aumentando muito. Isso é reforçado pela ênfase às expressões: "Você nunca vai ter infinito". "Você nunca vai poder falar: 'esse número é infinito, então o inverso dele é zero' ".

---

[1] Cf. Sierpinska (1987, p. 387) ao fazer a classificação dos modelos de limite, que denomina esta posição relativa ao infinito de "***potencialista***".

Ademais, como em seu rascunho, Lia havia rabiscado um desenho do tipo:



enquanto os outros falavam a respeito de $n \to \infty$, podemos inferir que estaria pensando a partir de estipulações locais visuais-geométricas.

Portanto, em nenhuma enunciação, durante esta atividade de reflexão sobre **P5-E**, notamos que os estudantes estivessem falando em relação a estipulações locais de limite ou à definição weirstrassiana (por épsilon e delta).[2] Ou seja, a produção de significados para a idéia (intuitiva) de limite que explicitam, não esteve relacionada a um núcleo com estipulações locais de limite.

6.5.2 Soluções escritas de problemas

São problemas que foram feitos por estudantes das turmas observadas, como atividades normais de sala de aula ou em meio a avaliações.

ATIVIDADE 1

> Um depósito de farinha está furado no fundo, por onde estão escapando, a cada minuto, $\frac{1}{200}$ avos da quantidade de farinha existente no depósito.
>
> Inicialmente a quantidade de farinha era de 800kg.
>
> (1) Quantos kg de farinha escaparão em 5 minutos ?
>
> (2) Faça um gráfico da quantidade de farinha no depósito em função do tempo.

Problema 1 - escrito (P1-E)

[2] Por exemplo: "Seja f definida em um intervalo (c, ∞). A afirmação $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que, a todo $\varepsilon > 0$, corresponde um número positivo N, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x > N$" (Swokowski, 1983, p.164).

Participaram desta atividade de resolução do problema **P1-E**: 50 alunos de Cálculo I de uma das turmas observadas.

A sugestão de proposição deste problema foi feita pela pesquisadora ao professor da referida turma, que o incluiu entre as atividades de uma aula. As soluções foram escritas individualmente.

Classificação em relação às categorias:

Cerca de 56% dos alunos resolveram **P1-E** através da regra de três direta, como se a taxa fosse constante e independente da quantidade de farinha no depósito. Como podemos observar na solução (**s1 P1-E**, de um desses alunos):

⊛ QUANTIDADE DE FARINHA $\longrightarrow$ X

⊛ ESCAPAM POR MINUTO $\longrightarrow$ 1 min. (tempo)

$\frac{1}{200}.X$ ($\frac{1}{200}$ avor da QUANTIDADE DE FARINHA DO DEPÓSITO)

⊛ QUANTIDADE INICIAL DE FARINHA DO DEPÓSITO $\boxed{X = 800 \text{ Kg}}$

$$1 \text{ minuto} \;\text{———}\; \frac{1}{200}\, X \text{ kg} \quad \rightarrow \text{INICIAL } (X = 800 \text{ kg})$$

$$5 \text{ minutos} \;\text{———}\; X$$

$$1 \text{ minuto} \;\text{———}\; \frac{1}{200} . 800 \text{ Kg}$$

$$5 \text{ min.} \;\text{———}\; X$$

$$X = \left(\frac{1}{200} . 800\right) . 5$$

$$X = \left(\frac{80\cancel{0}}{20\cancel{0}}\right) . 5$$

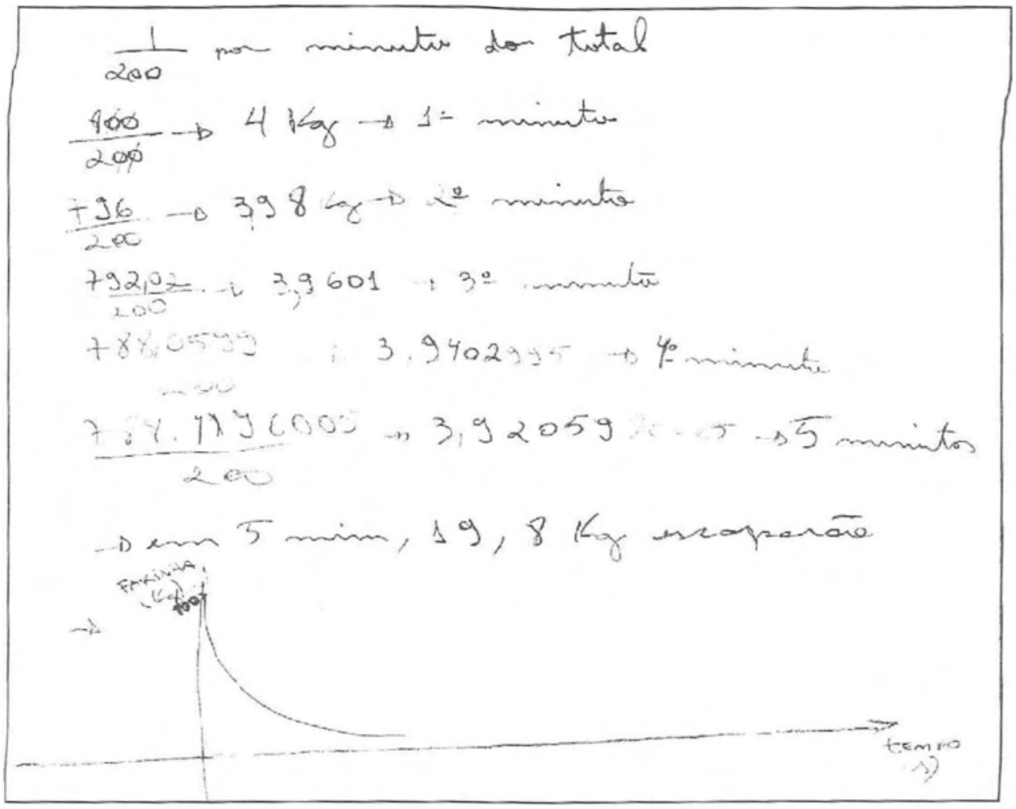
$$X = 4 . 5$$

$$\boxed{X = 20 \text{ Kg}}$$

R: Em 5 minutos escaparão 20 kg de farinha

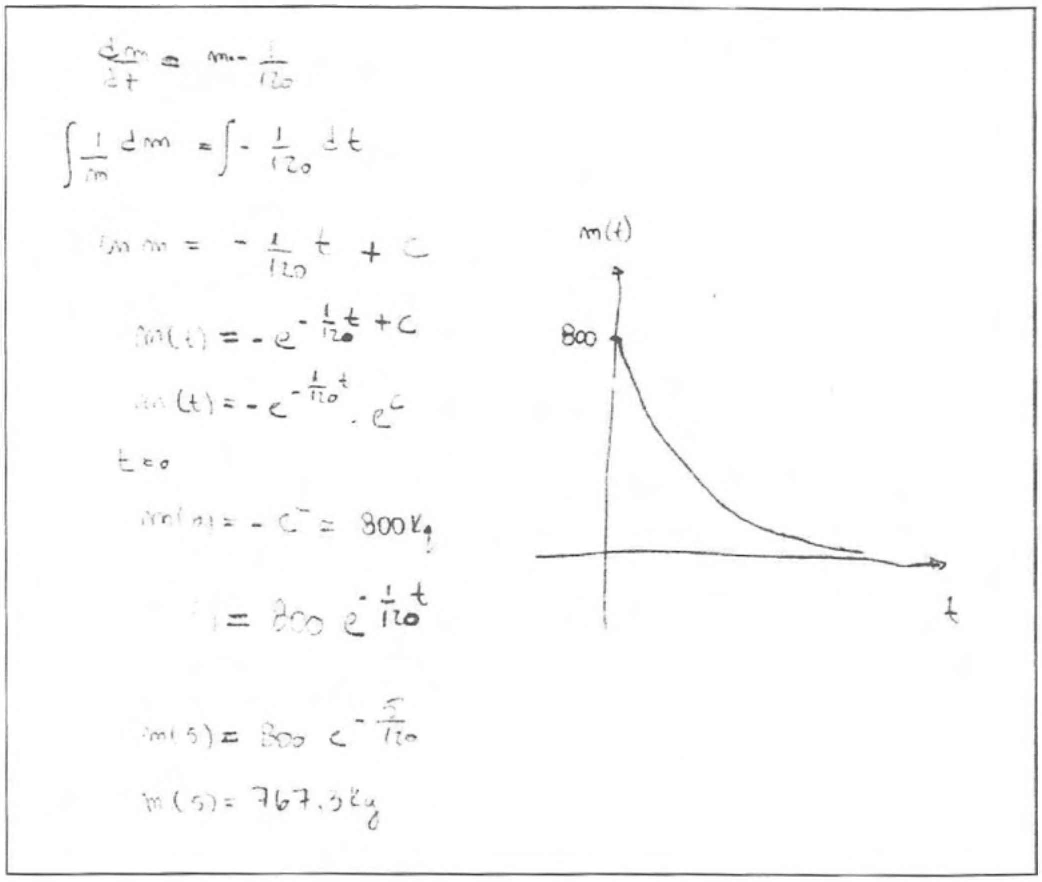
s1 P1-E

Outros 20% dos alunos resolveram **P1-E** considerando a razão da quantidade de farinha variável minuto a minuto, descontinuamente, apesar de às vezes esboçarem gráficos contínuos da quantidade de farinha em relação ao tempo (em resposta à segunda parte do problema). Como pode ser visto na solução seguinte (**s2 P1-E**):



s2 P1-E

Apenas 2% dos alunos escreveram uma solução para **P1-E** na qual consta uma equação diferencial, variação da quantidade de farinha em relação ao tempo, para depois proceder aos cálculos por integração, conforme a solução seguinte (**s3 P1-E**):



s3 P1-E

Cuja solução _ parcialmente correta, devida ao equívoco(?) cometido com a fração 1/200, escrevendo o tempo todo 1/120, e o sinal negativo que coloca ao começar a usar a exponencial, o qual teria que ser colocado só no expoente $(\frac{-1}{120}t + C)$, mas que desaparece no final _ também tem a segunda parte, a respeito do gráfico, de modo coerente com o obtido na primeira a respeito do escapamento da farinha.

Portanto, podemos dizer que 76% (56%+20%) dos alunos têm suas soluções baseadas em cálculos algébricos-numéricos, na categoria **alg-func**, enquanto que apenas 2% usa integração, ou seja, podemos classificar suas soluções na *categoria* ***integr***.

Quanto aos outros 22% dos alunos restantes, parecem não ter entendido a questão, ou ter entendido outra coisa, pois tentaram também soluções do tipo algébricas-numéricas, só que sem uma coerência aparente de condução a partir do enunciado.

<u>Análise em relação ao MTCS</u>:

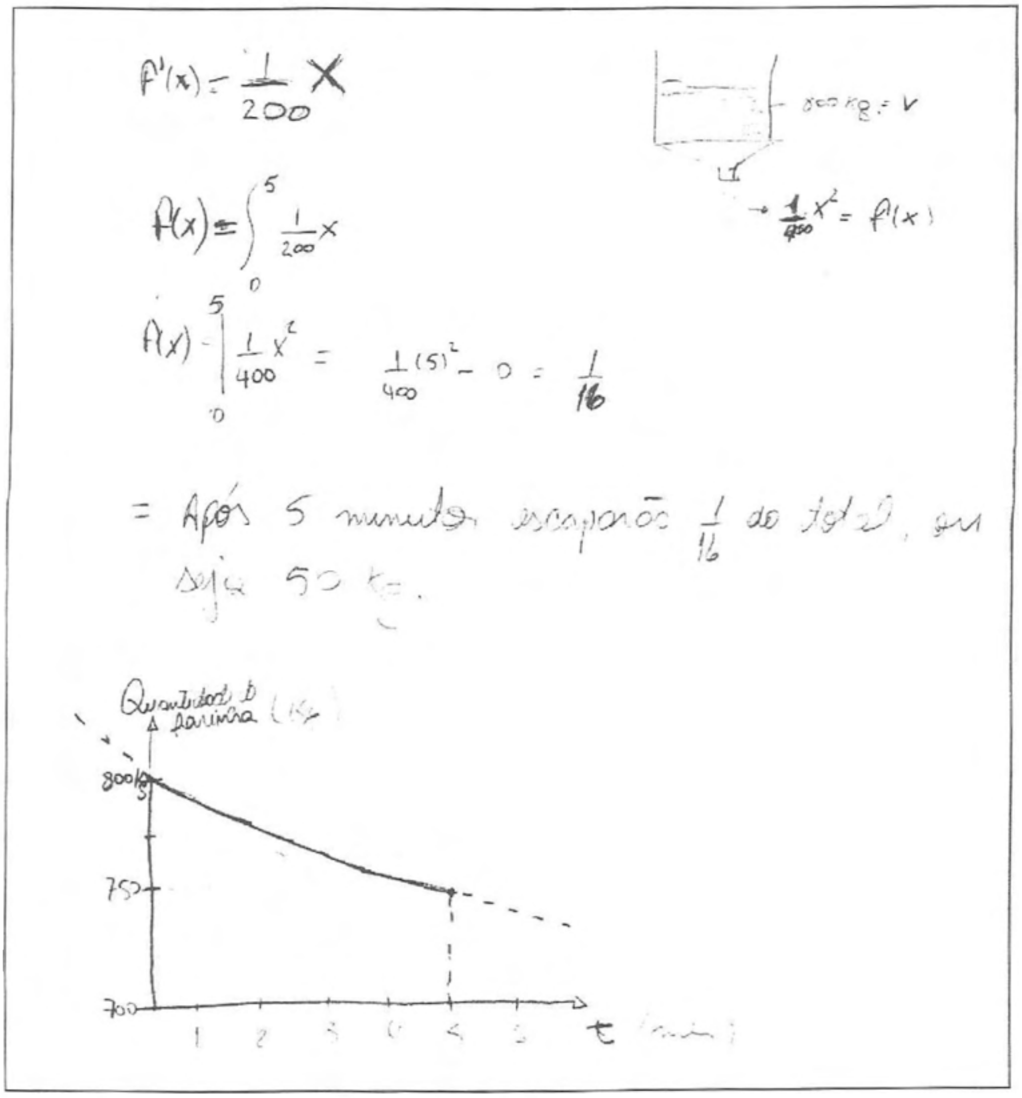
Embora os alunos da segunda faixa porcentual (20%) tenham produzido significados a partir de estipulações algébicas-numéricas ("retirar uma fração, 1/200, de determinada quantidade de farinha") assim como os da primeira faixa (56%) que apresentaram soluções usando regra de três, alguns da segunda faixa podem também ter pensado em relação a uma estipulação local numérica a respeito de taxa de variação (razão entre duas quantidades, constante minuto a minuto, ou seja, a unidade de variação da variável independente _ tempo _ é o minuto).

Os 2% dos que trabalharam uma solução de **P1-E** a partir de uma equação diferencial, taxa de variação como derivada, propriedades das funções exponecial e logarítimica, regras de integração, cálculos algébricos-numéricos e gráfico, certamente produziram significados a partir de diversos núcleos que permeiam o pensamento diferencial e integral. Onde a cada sentença afirmativa e suas justificações (muitas não explicitadas através da escrita), se pudessem ter sido captadas lentamente por etapas, poderiam nos mostrar mais do que uma produção:

- em um CS de algoritmos (por exemplo, "taxa de variação instantânea é derivada", na primeira linha da solução apresentada _ **s4 P1-E** -_ ou pelas regras de integração imediata, como da segunda para a terceira linha da mesma solução);
- em um CS visual-geométrico (através dos gráficos feitos);
- em relação a estipulações locais funcionais e algébricas (como as das últimas linhas da solução **s4 P1-E**).

Além disso, a análise a partir do MTCS nos permite olhar para certas soluções (da faixa dos 22% de erros incoerentes, e poder ver o quanto por exemplo, na solução a seguir apresentada, o aluno está fixo em um CS de

s4 P1-E



algoritmos (esquema de notação), onde "taxa de variação instantânea é derivada, *e, derivada é algo do tipo F'(x), uma função em x ",* *não lhe permitindo perceber a* variação da quantidade de farinha em relação a outra variável, o tempo (dF/dt), embora até faça a integral definida de 0 a 5 minutos, e o gráfico (conforme pedido no enunciado, da quantidade de farinha em *relação ao* <u>tempo</u>)

ATIVIDADE 2

Os problemas **P2-E**, **P3-E** e **P4-E**, cujas soluções analisamos a seguir, integram uma mesma avaliação individual elaborada pelo professor de uma das três turmas observadas de Cálculo I, da qual participaram 48 alunos.

Problema 2 - escrito (P2-E)

questão Um movimento te equação $s = t^3$ e se realiza entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$. a) Em que instante a velocidade (instantânea) desse movimento é igual à velocidade média? b) Em que instante a velocidade (instantânea) desse movimento é igual à média das velocidades?

Análise:

Obtivemos os seguintes resultados sobre **P2-E** em relação ao MTCS:

1. trinta e nove dos estudantes apresentaram soluções a partir estipulações locais algorítmicas (regras de derivação) e algébricas-numéricas (cálculos algébricos), dos quais dezessete resolveram corretamente;
2. dois estudantes tentaram soluções a partir de estipulações algorítmicas (definição de derivada pelo quociente de Newton) e algébricas-numéricas (cálculos algébricos), mas se confundiram nos cálculos;
3. um estudante apresentou solução relacionadas, predominantemente, a estipulações visuais-geométricas (retas tangentes e secantes, coeficiente angular, gráfico, e medidas aferidas visualmente pelo gráfico).

A seguir expomos duas dessas soluções para o item a) de (**P2-E**), sendo que a primeira (**s1 P2-E**) é uma das soluções (entre as trinta e nove) em 1., e a segunda (**s2 P2-E**) em 3.

s1 P2-E

a) $S(t) = t^3 \Rightarrow S'(t) = 3t^2 \Rightarrow \underbrace{V(t)}_{4} = 3t^2$

$\Delta t = 2$

$\Delta s = 8$

$V_m = 4 m/s$

No instante $t = \frac{2\sqrt{3}}{3} s$ ($\sim 1,15 s$) a velocidade instantânea será igual a velocidade média.

$4 = 3t^2$

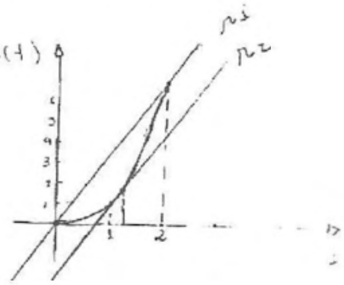
$t = \pm \sqrt{4/3}$ → não há tempo negativo

$\therefore t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} s$

s2 P2-E

$S = t^3$ entre $t = 0$ e $t = 2$

a) $t = ?$ q do $V_m = V_{inst.}$



r1 é paralela a r2

$\therefore m_1 = m_2$

Quando o coeficiente angular da reta secante for igual ao da reta tangente elas terão a mesma velocidade

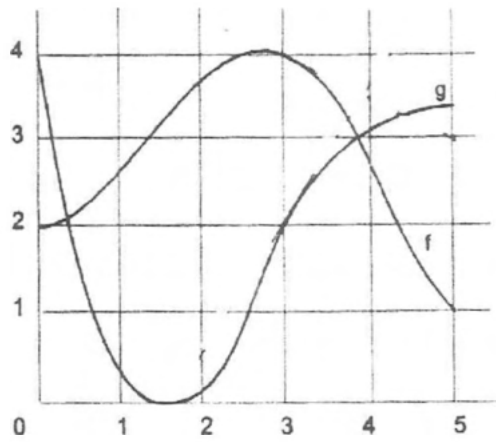
Como o coef ang da reta secante é a velocidade média o coef ang da reta tangente é a velocidade instantânea, temos que $V_m = V_{inst}$ no instante $\cong 1,25$

<u>questão</u>

Com dados retirados dos gráficos de f e de g, ao lado:

a) determine aproximadamente o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função produto f.g no ponto de abcissa x = 3;

b) escreva a equação dessa reta tangente.



Problema 3 - escrito (P3-E)

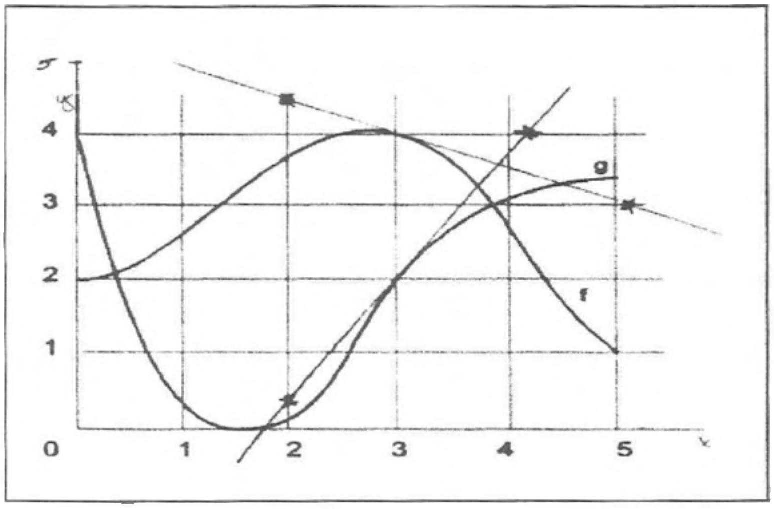
Obtivemos os seguintes resultados sobre **P3-E**:

1. Vinte e sete dos estudantes trabalhando a letra a) da questão, parecem ter pensado em relação a estipulações locais visuais-geométricas e algébricas-numéricas, uma vez que temos, em seus procedimentos, traçados de retas tangentes aos gráficos de f e g na figura dada e medidas tomadas, a partir desses traçados, para encontrar os coeficientes das retas tangentes, sendo que, desse modo, 10 dos estudantes calculam com uma aproximação razoável os valores de f '(3) e g'(3). Além disso, nove deles tomam o algoritmo

(fg)' (x) = f '(x).g(x) + f(x).g '(x) para calcular o valor de (fg)' (3),

conforme mostra a solução (**s1 P3-E**) de um desses estudantes.

2. Um dos estudantes calcula (fg)' (3) (sem usar algoritmo) em relação a estipulações locais geométricas, esboçando primeiramente o gráfico da função produto fg por valores tabelados a partir da figura dada, e então calculando o coeficiente angular em x = 3 no próprio esboço gráfico, conforme sua solução (**s2 P3-E**).



s1 P3-E

a) $fg(x) = f(x)\cdot g(x) \Rightarrow fg'(x) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$

coef. ang da tangente de $f(3)$: $f'(3)$

$$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3-4,5)}{(5,2-2)} = -0,46$$

$$g'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(4-0,4)}{(4,2-2)} = 1,63$$

$$fg'(3) = f(3)\cdot g'(3) + g(3)\cdot f'(3)$$

$$fg'(3) = 4\cdot 1,63 + 2\cdot(-0,46)$$

$$fg'(3) = 6,25 - 0,92 \Rightarrow fg'(3) = 5,33$$

b) $fg(3) = 8$

$m = 5,33$

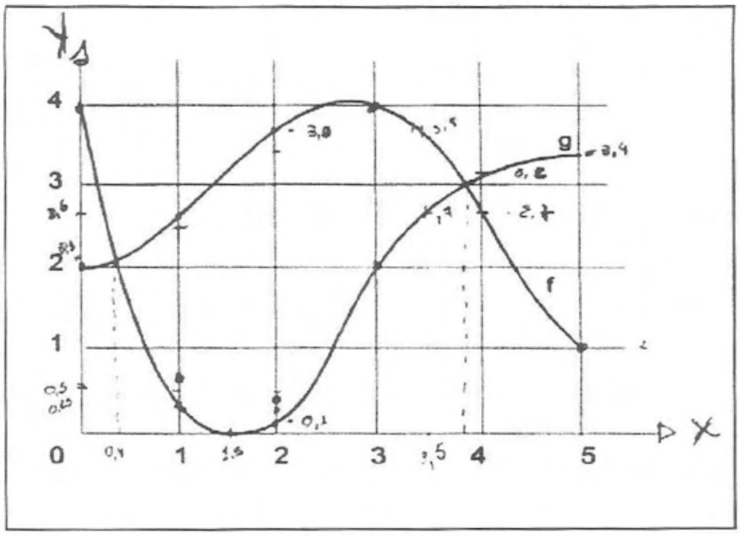
$y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = 8 + 5,33(x-3)$

$y = 8 + 5,33x - 15,99$

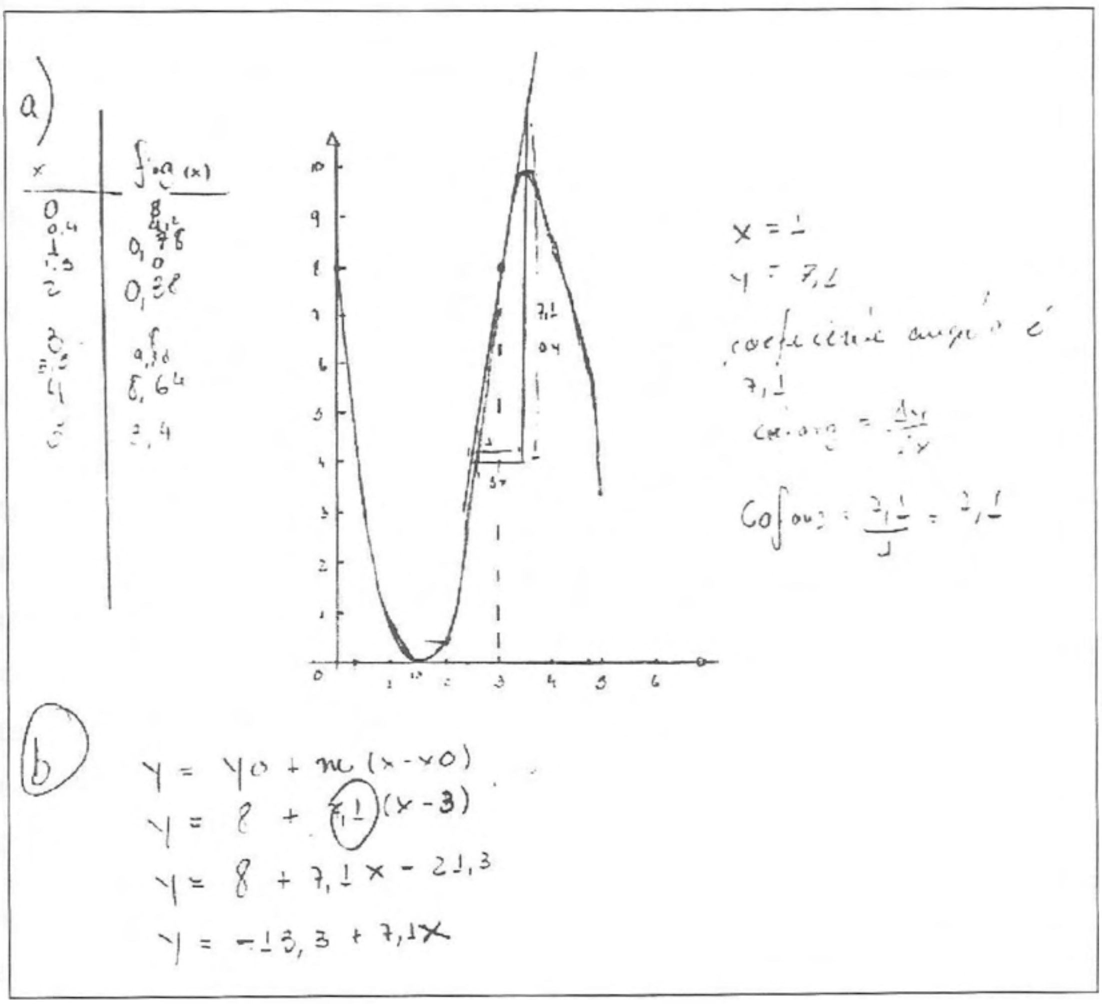
$y = 5,33x - 7,99$

s1 P3-E


Y
X
g
f
0
1
2
3
4
5

s2 P3-E

s2 P3-E


a)
x
x = 1
y = 7,1
coeficiente angular é
7,1
b
y = yo + m (x - xo)
y = 8 + 7,1 (x - 3)
y = 8 + 7,1 x - 21,3
y = -13,3 + 7,1x

P4-E

questão Pela definição de derivada calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{10x-3}$

Análise

Obtivemos os seguintes resultados em relação ao MTCS:

1. Seis dos estudantes, dentre os quarenta que tentaram resolver, ignoraram a orientação do enunciado e apresentaram soluções a partir de regras de derivação diretamente (estipulações algoritmicas) sem justificação escrita (talvez por facilidade e costume no manuseio das regras, talvez por não recordarem a definição, ou mesmo por displicência com o enunciado).

2. Dos trinta e quatro estudantes que partiram da definição, observamos que alguns fizeram desenvolvendo pelo $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ enquanto que outros partiram do quociente $\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)}$ fazendo t=x depois de simplificar, sem escreverem a respeito de limite (vide solução **s1 P4-E** de um desses estudantes). Contudo, mesmo os que tomaram o primeiro desses algoritmos envolvendo limite, não parecem ter pensado a partir de estipulações de limite, e sim, de esquemas de resolução, em relação portanto a estipulações algorítmicas e, talvez, em relação a estipulações algébrico-numéricas em algumas passagens de seus cálculos. Isso é mesmo reforçado na solução (**s2 P4-E**) que exibimos, na qual podemos notar que na antepenúltima linha o estudante faz o cancelamento de h por h e também o cancelamento dos termos 10h (fazendo h=0, provavelmente) e que mesmo assim escreve na penúltima linha, antes do quociente o termo $\lim_{h\to 0}$, como fazendo parte da referida notação, mas sem qualquer outro sentido matemático aparente até à resposta final.

Questão $f(x)=\sqrt[3]{10x-3}$

$$Qf(x,t)=\frac{\sqrt[3]{10t-3}-\sqrt[3]{10x-3}}{t-x}\Rightarrow$$

$$=\left(\frac{10t-3-(10x-3)}{\sqrt[3]{(10t-3)^2}+\sqrt[3]{(10t-3)}\,\sqrt[3]{(10x-3)}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}}\right)\cdot\frac{1}{t-x}=$$

$$\Rightarrow=\left(\frac{10t\cancel{-3}-10x\cancel{+3}}{\sqrt[3]{(10t-3)^2}+\sqrt[3]{(10t-3)}\,\sqrt[3]{(10x-3)}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}}\right)\cdot\frac{1}{t-x}=$$

$$\Rightarrow=\left(\frac{10(\cancel{t-x})}{\sqrt[3]{(10t-3)^2}+\sqrt[3]{(10t-3)}\,\sqrt[3]{(10x-3)}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}}\right)\cdot\frac{1}{(\cancel{t-x})}=\left(\frac{10}{\sqrt[3]{(10t-3)^2}+\sqrt[3]{(10t-3)}\,\sqrt[3]{(10x-3)}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}}\right)$$

P/ $t=x$

$$f'(x)=\left(\frac{10}{\sqrt[3]{(10x-3)^2}+\sqrt[3]{(10x-3)}\,\sqrt[3]{(10x-3)}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}}\right)=\left(\frac{10}{3\sqrt[3]{(10x-3)^2}}\right)$$

s1 P4-E

$$f(x)=\sqrt[3]{10x-3}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{10(x+h)-3}-\sqrt[3]{10x-3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{\cancel{10x}+10h\cancel{-3}\cancel{-10x}\cancel{+3}}{\sqrt[3]{(10(x+h)-3)^2}+\sqrt[3]{(10(x+h)-3)(10x-3)}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}}\right)\left(\frac{1}{h}\right)=$$

$$=\lim_{h\to10}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}\cdot\frac{10}{\sqrt[3]{(10x+10\cancel{h}-3)^2}+\sqrt[3]{(10x+10\cancel{h}-3)(10x-3)}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{10}{\sqrt[3]{(10x-3)^2}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}+\sqrt[3]{(10x-3)^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{10}{3\sqrt[3]{(10x-3)^2}}}$$

s2 P4-E

ATIVIDADE 3

O problema **P5-E** cuja solução analisamos a seguir, está entre seis problemas de uma avaliação individual elaborada pelo professor de uma das três turmas observadas de Cálculo I, da qual participaram 53 alunos.

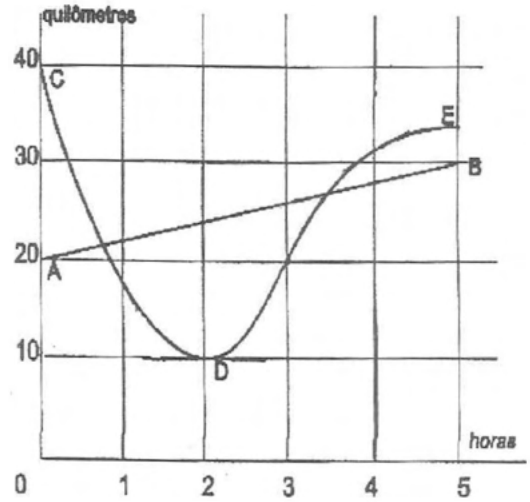
(Entregue esta folha.)

questão

O diagrama mostra os gráficos de um movimento uniforme AB e de um movimento variado CDE.

a) Calcule (aproximadamente) a velocidade do movimento variado às 3 horas.

b) Em que instantes os dois movimentos tiveram a mesma velocidade?



P5-E

Análise

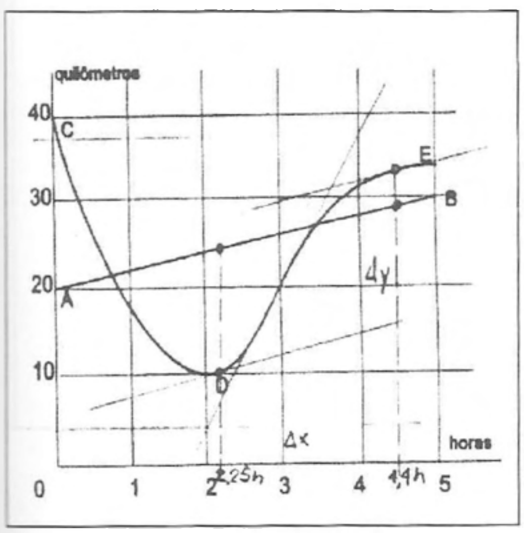
Todos os estudantes tentaram resolver a questão em relação a estipulações locais visuais-geométricas (inclusive de velocidade instantânea em um ponto como declividade da reta tangente neste ponto) e algébricas-numéricas, conforme também nos parece sugerir (por significados que produzimos) o próprio enunciado da questão.

Dez dos estudantes resolveram o problema corretamente, em **s1 P5-E** mostramos uma dessas soluções.

Dezesseis deles confundiram espaço com velocidade, tomando os valores pedidos a respeito de velocidade como sendo as ordenadas (em quilômetros) diretamente na figura dada.

Um estudante, depois de encontrar a velocidade pedida às 3 horas (item a)), calcula a velocidade instantânea em alguns valores inteiros de t, seguindo com sua estipulação local visual-geométrica de velocidade instantânea a partir de traçados de retas tangentes ao gráfico nos pontos correspondentes (o que podemos observar por seus traçados na figura dada) e, em uma *generalização prematura*,[1] conclui que os dois movimentos não tiveram a mesma velocidade em nenhum ponto (veja penúltima linha de **s2 P5-E**).

A impressão que temos é a de que ele olhou para os valores obtidos, e para a própria velocidade como algo numericamente discreto, que deveria ser igual à velocidade do movimento uniforme AB em algum dos valores inteiros de t. Portanto, esse estudante, nesta atividade, parece não ter pensado em relação a estipulações algébricas-numéricas a partir de números reais ou de qualquer noção envolvendo continuidade da velocidade em função do tempo (mesmo que graficamente), uma vez que calcula corretamente em t=2 a velocidade v=0 e em t=3 a velocidade v≈15 (item a)) e escreve, apesar disso, que a velocidade do movimento variado CDE em nenhum instante foi de v=2.



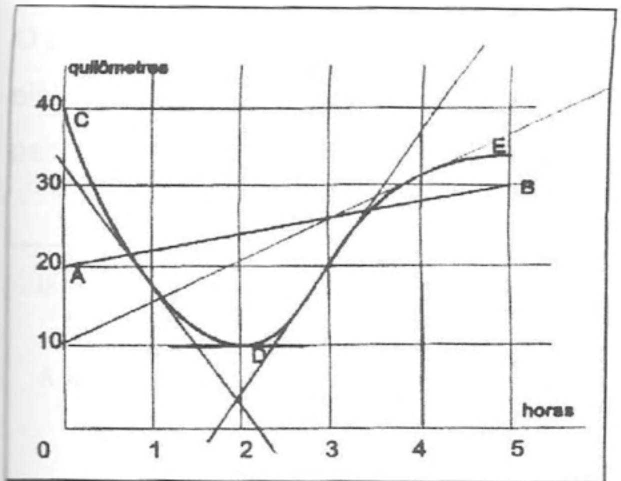
s1 P5-E

1°

a) $V(3h) \cong \dfrac{37-4}{4-2} = \dfrac{33}{2} = 16{,}5\ Km/h$

b) Nos instantes 2,25h e 4,4h

[1] Tommy Dreyfus (1991, p.35) diz que : "*Generalizar é derivar ou induzir de particulares, identificar familiaridades, expandir domínios de validade.*" No caso acima chamamos de "*generalização prematura*" pelo fato de que o aluno induz de particulares valores a 'todos', onde o todo é uma totalidade real, não pesquisada ou refletida em suas particularidades próprias.



s2P5-E

1ª Questão

a) V = coeficiente angular $= \dfrac{36-0}{4-1,6} = \dfrac{36}{2,4} = 15$

$V = 15\ km/h$

b) A velocidade do movimento uniforme AB é dada por

V = coef. ang $= \dfrac{30-20}{5-0} = \dfrac{10}{5} = 2\ km/h$ cdr

A velocidade do movimento variado é dada por

p/ $t=0 \Rightarrow V = 0$?

p/ $t=1 \Rightarrow V = \dfrac{32}{2,2} \Rightarrow V = -14,5\ km/h$

p/ $t=2 \Rightarrow V = 0$

p/ $t=3 \Rightarrow V \approx 15\ km/h$

p/ $t=4 \Rightarrow V = \dfrac{35-10}{5-0} = 5 \Rightarrow V = 5\ km/h$

∴ Os dois movimentos não tiveram a mesma velocidade em nenhum instante; eles se encontraram na mesma posição nos instantes $t \approx 0,45h$ e $t \approx 4,5h$

ATIVIDADE 4

O problema **P6-E** cuja solução analisamos a seguir, faz parte da avaliação individual elaborada pelo professor de uma das três turmas observadas de Cálculo I, da qual participaram 45 alunos.

(Entregue esta folha.)

questão

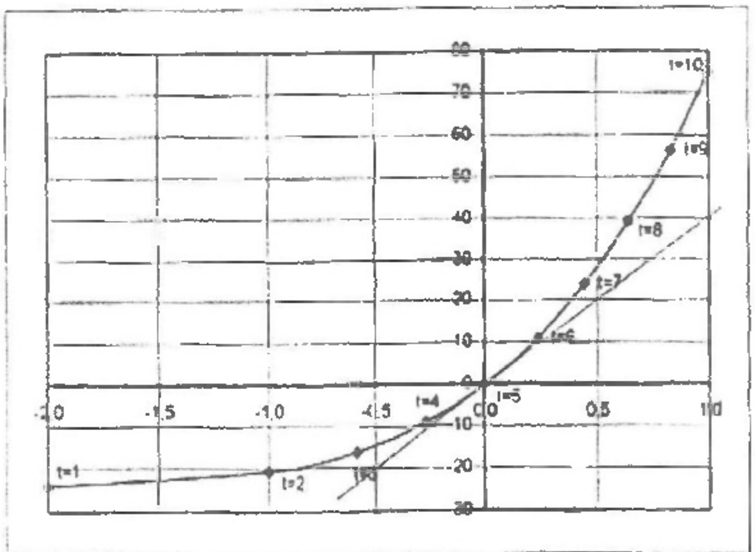
A figura mostra a trajetória de uma partícula que se move no plano xy com equações horárias

$$x(t) = \sqrt{t-1} - 2$$
$$y(t) = t^2 - 25$$

Calcule o coeficiente angular da reta tangente à trajetória quando a partícula passa pela origem, ou seja, quando $x = 0$, $y = 0$, $t = 5$:

a) com valores aproximados, a partir do gráfico;

b) pelas regras de derivação, a partir das fórmulas.



P6-E

Análise

Todos os estudantes resolveram o item a) da questão **P6-E** em relação a estipulações locais visuais-geométricas e algébricas-numéricas, traçando uma tangente em t=5 e calculando sua declividade por medidas gráficas, segundo o enunciado.

Entre as soluções para o item b) encontramos: 60% por regras de derivação aplicadas na fórmula $\frac{dy}{dx}_{(t=5)} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ (veja solução **s1 P6-E**); 2% por regras de derivação juntamente com a regra de L'Hospital, $\frac{dy}{dx} = \lim_{t \to 5} \frac{f(y)}{g(x)} = \lim_{t \to 5} \frac{f'(y)}{g'(x)}$ (veja solução **s2 P6-E**).

Portanto, neste segundo item, podemos dizer que os estudantes ao resolvê-lo embora tenham todos pensado predominantemente em relação a estipulações locais algorítmicas (inclusive em termos do limite), houve variação dos esquemas e das regras que as constituíram.

$x(t) = \sqrt{t-1} - 2$

$y(t) = t^2 - 25$

a) $\text{coef ang} = \frac{10-(-20)}{1-(-0,5)} = \frac{60}{1,5} = \underline{40}$

b) $x(t) = (t-1)^{1/2} - 2$

$x'(t) = \frac{1}{2(t-1)^{1/2}} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{1}{2(t-1)^{1/2}} \quad t = \frac{1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{4}$

$y(t) = t^2 - 25$

$y'(t) = 2t = 10$

$f'(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{10}{\frac{1}{4}} = \underline{40}$

s1 P6-E

s2 P6-E

Coef. ang: $\lim\limits_{t=5} \frac{f(y)}{f(x)} = \lim\limits_{t=5} \frac{t^2-25}{\sqrt{t-1}-2}$

L'Hopital $\Rightarrow$ $\lim\limits_{t=5} \frac{f(y)}{f(x)} = \lim\limits_{t=5} \frac{f'(y)}{f'(x)}$

(b) $\lim\limits_{t=5} \frac{t^2-25}{\sqrt{t-1}-2} = \lim\limits_{t=5} = \frac{2t}{\frac{1}{2\sqrt{t-1}}} = \lim\limits_{t=5} 4t\sqrt{t-1}$

Coef. ang da reta tangente $= 4.5.\sqrt{5-1} = \boxed{40}$

(a) Coef ang. da reta tangente $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20-0}{0,5-0} = \boxed{40}$

ATIVIDADE 5

O problema **P7-E**, cuja solução analisamos a seguir, faz parte da avaliação feita em grupos de três ou quatro alunos cada e elaborada pelo professor de uma das três turmas observadas de Cálculo I, da qual participaram 44 alunos.

> questão
>
> *O proprietário de um laranjal estima que, plantando* 50 laranjeiras por hectare, cada árvore produzirá 600 laranjas por ano. Estima também que, para cada árvore, a mais, plantada por hectare, haverá um decréscimo de 12 laranjas por ano por árvore. Quantas árvores deve plantar para que a colheita seja máxima?

Análise

Das treze soluções entregues (uma por grupo, abrangendo quarenta e um alunos) temos seis em relação a *estipulações locais algébricas-numéricas* (operações numéricas, funções etc) e algorítmicas (esquemas de cálculos, regras de derivada etc), como a solução(**s1 P7-E**) mostrada a seguir, das quais metade totalmente certas.

1 hectare = 50 laranjeiras × 600 laranjas / ANO = 30.00[illegible] laranjas

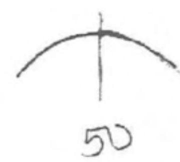
Cada árvore a mais plantada por hectare so decrescerá de 12 laranjas por ano; por á[illegible]

1 hectare { número de árvores = x ; número total de laranjas = f(x) }

$f(x) = x[600 - 12(x - 50)]$

$f(x) = x[600 - 12x + 600]$

$f(x) = 600x - 12x^2 + 600x$



$f'(x) = -24x + 1200$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos:

$-24x + 1200 = 0$

$-24x = -1200$

$x = \frac{1200}{24} = \boxed{50}$

∴ devem ser plantadas 50 árvores.

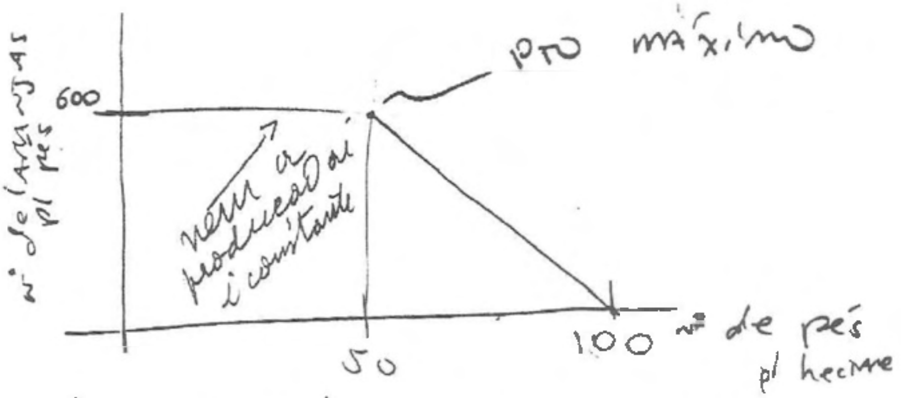
s1 P7-E

Entre as demais, temos uma solução (**s2 P7-E**) que se diferenciou por ter sido elaborada a partir de um gráfico (estipulação visual-geométrica) e considerando, não o número total de pés de laranja (como representada pela variável *x* de **s1 P7-E**), mas o número de laranjas por hectare (olhando para um hectare) _ o que, após 50 pés, *pode ser representada pela equação*

$$y = 600 - 12\,(x - 50),$$

que podemos notar como parte da equação $f(x) = x\,[600 - 12\,(x - 50)]$

usada pelos alunos em soluções semelhantes à **s1 P7-E**, porém só no modo gráfico na **s2 P7-E.** Além disso, nessa segunda solução mencionada, os estudantes se relacionam a estipulações numéricas em meio a um raciocínio lógico, expresso a partir de linguagem mais quotidiana.



Analisando os dados apresentados no problema, montamos um gráfico (figura acima) para estudarmos o comportamento da função nº de laranjas p/ árvore X árvores plantadas, olhando o gráfico vemos que até 50 árvores plantadas o produtor terá uma colheita máxima de 30.000 p/ ano, aumentando apenas 1 pé a mais por hectare, o produtor teria uma perda de 12 laranja p/ pé, até atingir 100 pés plantados o que tornaria a sua produção zero, por isso não haveria lógica em plantar mais árvores em sua plantação, pois, o que torna o seu lucro (colheita) máximo é 50 pés por hectare.

s2 P7-E

6.5.3 As entrevistas

A técnica de entrevista para a coleta de dados foi escolhida com o objetivo de continuar a investigar os pontos discutidos sob as outras técnicas. Optamos por entrevistar uma aluna _ que particularmente teve uma experiência em mais de uma disciplina de Cálculo e em diferentes cursos _ e quatro professores que estavam (naquele ano) trabalhando com pelo menos uma turma de Cálculo de alunos recém ingressos na universidade, para obtermos diretamente alguns de seus discursos. Essas entrevistas individuais transcorreram em um clima informal, centradas no ensino e aprendizagem a partir do Cálculo.

Devemos lembrar que, existe todo um conjunto uníssono de gestos, expressões, entonações, hesitações, que não se consegue captar nas expressões da fala verbalizada (transcrita), por isso, às vezes, acrescentamos comentários (entre colchetes) durante a transcrição. As entrevistas filmadas permitem guardar um pouco mais dessas nuanças e, portanto, foram particularmente úteis nas análises.

Falas:

Sempre que houver interesse ou que julgar necessário, o leitor poderá remeter-se às transcrições das gravações das entrevistas que encontram-se no Anexo 1. [1] Aqui, apenas citamos alguns trechos imprescindíveis ao entendimento e construção de análises das atividades.

ATIVIDADE 1

Entrevista de uma aluna de Cálculo I _ curso de Matemática _, ex-aluna da Engenharia, pela pesquisadora.

[1] A divisão (em partes) em cada uma das entrevistas, conforme encontramos no Anexo 1, foi feita posteriormente para facilitar a localização de referências às mesmas durante a análise. Assim, para demarcar as falas, usamos a letra "P" para indicar a parte e o símbolo "§" para indicar o parágrafo, respectivamente; por exemplo, (1ª P., 7º§) indica uma fala que está na 1ª Parte e no sétimo parágrafo.

Além disso, os parênteses na forma (...) marcam cortes que fizemos na transcrição das falas, e, os escritos entre colchetes são comentários nossos.

Conforme Anexo 1, entrevista nº 1, a aluna entrevistada é denominada (para fins desta pesquisa) por **Tan** e a entrevistadora (pesquisadora) por **O**.

<u>Análise</u>:

Podemos notar que o tema central da entrevista gira em torno de maneiras diferentes de se ensinar e aprender um mesmo enunciado (no caso, conteúdo programático) relativo à disciplina de Cálculo. Certamente que, por não ser um mesmo curso (que a estudante **Tan** havia cursado), com objetivos distintos (inclusive referente à parte de Matemática, que para o curso de Engenharia é considerada uma ferramenta e para o curso de Matemática, o central) é natural que existam diferenças. Contudo, não são essas diferenças de objetivos, de cursos, de metodologias pessoais, de didáticas do professor, de livros-textos e outras mais _ dentre as demandas em geral (sob e para as quais os estudantes respondem) _ que nos interessam discutir, no momento, mas sim, o que elas provocam em termos das enunciações a partir do Cálculo e as conseqüentes mudanças no modo de produção de significados.

Por exemplo, é evidente a produção diferenciada de objetos denominados "*derivada*" e "*integral*" pela estudante **Tan**, quando ela fala do que aprendeu sobre isso nos cursos. No curso de Engenharia, ela demonstra tê-los produzido em relação a estipulações algorítmicas (regras e esquemas):

> "***Tan*** _ *... o importante era você saber derivar e integrar, saber usar as regras de derivação*" (2ª P., 2º §).
>
> "*[A aluna pega o livro adotado na Engenharia e...mostrando diz:]*
>
> ***Tan*** _ *No início do livro já aparecem regras e fórmulas [constato] para desenvolvimentos algébricos [são regras de potenciação, identidades trigonométricas, notação de intervalos...]*
>
> ***O*** _ *E já aparecem todas as regrinhas prontas, as mais usadas no livro vem em quadradinhos coloridos, explicadinhas.*
>
> ***Tan*** _ *Hum-hum.*
>
> *A gente começou primeiro com uns limites básicos [mostra uma lista com alguns limites de funções, bem elementares] e depois fomos para derivada. Aí dá a definição por limite e já passa para todas as regras prontas*" (3ª P., 18º-21º §).

Ademais, nesse último trecho de fala, podemos notar que o próprio livro texto (como a pesquisadora observou pessoalmente) embora contenha enunciados a respeito da definição de derivada por limite do quociente de Newton e de integral por limite de soma de Riemann, a partir do qual pode-se produzir significados em relação a outras estipulações locais (como de limite ou visuais-geométricas), o destaque é feito às regras de derivação, que juntamente com outras demandas (como autoridade do professor e sucesso nas avaliações) integram o processo de produção (para um leitor nas condições de **Tan**) de significados e de justificações de conhecimentos em relação, predominantemente, a um núcleo de algoritmos.

Esse modo de produzir significado era tão prioritário (pelo menos, ao se tratar de derivada e integral) que a própria **Tan** reconhece a impossibilidade que tinha de produzir significados de outro modo.

> "*... Acho que a gente até estudava inclinação, ponto de máximo e mínimo...mas para resolver usávamos as regras. Mas também se o exercício mudava um pouquinho... ninguém conseguia fazer mais nada. Eu não conseguia mais...Se tinha uma coisa um pouquinho diferente a gente não conseguia mais ligar com a regra*" (2ª P., 4º §).

Enquanto que na Matemática:

> "***Tan*** *_ Ah!! Na Matemática eu penei! Porque eu não queria aceitar aquilo. Por que que eu tenho que ficar entendendo fazer por limite, por isso, se eu sei já derivar e integrar?*" (2ª P., 6º §)
>
> "***Tan*** *_ Ah!! Então o Cálculo que eu fiz na Matemática, foi tudo por* Δx*, por partições...por dx..., você vai dividindo ao máximo, coisas assim...[gesticula com dois dedos bem próximos, encostados].*
>
> ***O*** *_ Essas coisas, esses objetos você não tinha constituído no curso de Engenharia?*
>
> ***Tan*** *_ Não. Por isso foi difícil! Eu não entendia porque tinha que fazer umas "coisinhas" tão difíceis, achando que já sabia muita coisa, porque que eu tinha que ir pelo mais difícil se eu sabia mais fácil?*" [...](3ª P., 10º-12º §)

Em cujos discursos, observamos a dificuldade de **Tan** para passar a produzir significados e objetos para o processo de derivação e integração em relação a outras estipulações locais (como algébricas-numéricas ou de limite) distintas de regras e esquemas anteriores.

O que precisa ser compreendido é que objetos como derivada, diferencial, integral, limite ou qualquer outro que **Tan** tenha produzido, foram bem diferentes (diríamos, "uma outra coisa") conforme as estipulações locais *eram integrantes de* um núcleo do tipo algorítmico, de limite, ou visual-geométrico. Em outras palavras, não são modos diferentes de se "falar de um objeto" (que existiria a priori), mas são modos diferentes de se falar (responder às demandas), de produzir objetos, que podem ou não ser relacionados.

No trecho de sua fala:

> "*Eu acho que você entender o que é a derivada, isso é melhor do que saber algoritmo. Porque então você resolve qualquer um sabendo alguns poucos. Agora que eu vejo. Se eu sei por exemplo alguns..., mesmo se eu esquecer outros, eu sei como fazer. E mesmo posso, se esquecer derivada, pensar como fazer pela reta tangente e reconstruo todo o processo, e faço*" (3ª P., 6º §).

ao pronunciar a última frase, embora a entrevistada afirme como benéfico produzir derivada em relação a estipulações visuais-geométricas, indicado por "...fazer pela reta tangente...", novamente demonstra só admitir derivada como uma regra (estipulação local algorítmica), pois diz: "...posso, se esquecer derivada, pensar como fazer [construir o algoritmo] pela reta tangente e reconstruo todo o processo...", não admitindo derivada como sendo a declividade (ela mesma) de que fala, mas faz da declividade um meio de chegar até o que considera como derivada (um algoritmo).

Ao falar sobre "reconstruir o processo", talvez **Tan** possa também ter pensado a frase, "...fazer pela reta tangente...", a partir de uma noção de limite _ se pensou na declividade de uma reta tangente que é limite de retas secantes ao gráfico da função na vizinhança de um certo ponto _ ou ainda, de estipulações locais infinitesimais, tomando, em uma mônada de um certo ponto, a reta tangente coincidente com o gráfico da função; são hipóteses que não temos como asseverar (pelas falas transcritas) qual ocorreu, mas que cabe realçá-las como possíveis.

ATIVIDADE 2

Entrevista de um professor de Cálculo I _ turma do curso de Matemática _ pela pesquisadora.

Conforme Anexo 1, entrevista nº 2, o professor entrevistado é denominado (para fins desta pesquisa) por **Joi** e a entrevistadora (pesquisadora) por **O**.

Análise

Temos boa parte no começo da entrevista em que o professor **Joi** aborda algumas "*noções fundamentais*" (segundo considera), como as de sistema numérico e funções, falando desde o início em uma maneira informal de ensinar, na qual demonstra constante produção de significados em relação principalmente a estipulações locais visuais-geométricas.

> "*Inclusive, você mostra que faz isso aí... né? se você representar na reta os racionais então . ela não é coberta por todos os racionais, né... Por exemplo, aí pode construir com régua e compasso, fazer construção geométrica simples... né? e você chega que o √2 não é... não é... racional (ao mesmo tempo: O _ Racional!) Ele... tem um espacinho na reta numérica reservado para ele, ele não é racional e... ele seguinte... ele vai ser colocado, né... então, ele vai ter uma representação lá na reta numérica. Então, os racionais não cobrem a reta toda*" [grifo nosso] (1ª P., 19º §).

> "*Por exemplo, gráfico, nós definimos, nós desenhamos alguns gráficos... mas você não explora, fatos mais assim... mais específicos sobre função*" [grifo nosso] (2ª P., 2º §).

A seguir, notamos sua preocupação com o fato dos estudantes sentirem mais dificuldade em representar matematicamente uma função, uma vez produzidos significados para um texto escrito em linguagem quotidiana (dá o exemplo: "*considere a função que a cada número associa o seu dobro*"), do que produzir significado de função como uma correspondência (em relação a estipulações numéricas-algébricas), quando o texto já está caracteristicamente simbolizado ($f(x) = 2x\ ,\ \forall x \in \Re$). Sabemos que essa alternância e transposição entre linguagens nem sempre é simples; no caso, além do entendimento de cada uma delas, também há a modificação e introdução de novos símbolos gráficos (próprios da Matemática).

À medida que trabalham essas noções fundamentais (nesse curso, segundo **Joi**, há um trabalho intensivo nas três primeiras semanas) os estudantes interagem mais com a linguagem a ser usada, aumentando o diálogo formativo _ quando as estipulações locais relevantes estão sendo compartilhadas pelos sujeitos _ e a produção de significado no sentido matemático requerido.

> "*Certo. Isso aí é bem importante no seguinte sentido: você..., se envolve com os alunos. Eles também formam um grupo bom, porque eles se relacionam bem, porque eles... estão envolvidos o dia todo com aquilo, percebe?! Não é só com... Por exemplo, nos primeiros 3 dias você vai falar sobre função ou sobre sistema numérico, então é só aquilo. Percebe?! Então todos estão falando a mesma linguagem, a mesma coisa. Então cria um relacionamento _ isto é o que percebemos _ bom entre eles. Aliás, eles ficam muito barulhentos*" (3ª P., 2º §).

Pelo discurso do professor entrevistado observamos que pessoalmente ele opta por produzir significados e objetos centrais, no ensino de Cálculo, em relação a estipulações locais de limite:

> "*É uma opção. Eu não sei... eu acho assim natural, desde que tudo é limite, né?!, se você pensar em continuidade, é um processo de limite, integral é um processo também de limite, como a gente encara no Cálculo, né?! A integral como limites de somas... soma superior, soma inferior, isso vai ver mais prá frente. Então desde que tudo... se reduz a limite, então eu falei: 'bom..., acho melhor a gente começar por aqui'*" (5ª P., 8º §).

Todavia, na prática, como ele mesmo afirma, trabalha bastante a idéia de limite intuitivamente, sem usar a definição por ε e δ. Nessa fase, a produção de significados a respeito de limite é a partir de um núcleo com estipulações visuais-geométricas, conforme suas falas:

> "*Foi tudo graficamente. Para certas funções, se ela é contínua... eu faria o gráfico... aqui por exemplo,... então, quando x se aproxima do ponto p, veja graficamente você vê que f(x) se aproxima do L. Então foi feito... a idéia de aproximação, foi explorando geometricamente*" (5ª P., 18º §).
>
> "***Joi** _ Escrevemos inclusive. É o único número que envolve o que: se x se aproxima do ponto p, então os valores da função f(x) devem se aproximar daquele número. Quando existir o número... é único, né?! Aí então... o limite é aquele*
>
> ***O** _ E aí quando eles chegam em limite infinito, por exemplo?*
>
> *(...)*

Joi _ Não, não é número. Aí... essa parte de limites infinitos não, não tratamos ainda. A gente tá falando mais em função contínua, derivada. Quando eu chegar no esboço gráfico de função, função definida na reta, aí então eu vou chegar nos limites infinitos. Quando um ponto t tende para + ∞, também.

Mas, aí você explora... acho que não tem problema também, você pode explorar isso aí dizendo o seguinte: quando x tende para + ∞... observe o comportamento da função, ela pode ...os valores podem se aproximar de um número fixo, tá certo?! De um forma até... graficamente você tira também x... a noção dele, essa idéia.

(...)

Certo. Exatamente, aqui você não precisa dizer qual é a expressão que... como é a função. Mas, pelo aspecto do gráfico, ele é capaz de definir... de discernir se existe ou não limite. Como nesse caso aqui que não tem... isso é perfeitamente..." (6ª P., 2º § e 6º-8º§).

Ao discutir o processo de como trabalhar a definição de limite (veja 7ª P., 1º-21º §), **Joi** produz significados em relação a um CS cujo núcleo contém estipulações locais de limite e comenta sobre as dificuldades do seu ensino e aprendizagem. Entre essas dificuldades, destacamos a mudança (nem sempre conseguida pelo estudante) de uma produção de significados e objetos em relação a estipulações locais visuais-geométricas _ em um movimento dinâmico geométrico a respeito da noção de limite _ para uma produção em relação a estipulações locais de limite _ em um relacionamento estático dos quantificadores pela definição formal.

O entrevistado frisa o fato de que a definição de limite, continuidade e derivada são relativas a um ponto, sendo que continuidade e derivada são posteriormente estendidas a intervalos. Ao insistirmos sobre as noções "próprias"[2] que os estudantes trazem, ele reafirma um fato demonstrado também em nossa prática, de que essas noções "próprias" nem sempre se harmonizam com a requerida pelos professores. Por exemplo, citamos (durante a entrevista) o caso da *continuidade, no qual, o modelo alternativo (próprio)* do estudante é relacionado, de modo geométrico, a uma linha contínua, enquanto que o professor, embora faça gráficos de funções contínuas e descontínuas, exige

[2] A palavra ***própria*** aqui é colocada para designar o significado literal produzido pelos estudantes em meio às suas práticas sociais anteriores (inclusive escolar). (Veja adjetivos com significados literais semelhantes em Cornu (1983), em Williams (1991) e em Walkerdine (1988)).

continuidade a partir de uma definição pontual (como na definição matemática formal):

> "**Joi** _ *Ah! Sim, não, não. Mas aí quando se fala em continuidade, é continuidade no ponto.*
>
> **O** _ *No ponto a.*
>
> **Joi** _ *No ponto a, é claro!*
>
> **O** _ *E limite também?!*
>
> *(...)*
>
> **Joi** _ *Olha, inclusive eu friso bastante durante... vocês observem o seguinte quando nós falamos em continuidade, quando nós falamos em derivada, então você fala que uma função tem derivada, ela é contínua no ponto, tá certo?!*
>
> *(...)*
>
> *Então, você define a noção de limite, de continuidade, de derivada, no ponto. É pontual.*
>
> *(...)*
>
> **Joi** _ *No ponto. Claro todas as definições...*
>
> **O** _ *Agora, a noção dele [aluno], que traz de continuidade é do gráfico, ampla.*
>
> **Joi** _ *Certo.*
>
> **O** _ *Essa é a diferença que eu estava colocando.*
>
> **Joi** _ *Certo. Agora quando... O que significa ela ser contínua num intervalo aqui? Então, aí você pode... geometricamente o gráfico tem que ter um aspecto semelhante a esse aí. De uma... uma... linha. Tá certo?!"* (8ª P., 2º-7º § e 13º-17º §).

Sobre a noção pontual de limite, a fala gira em torno de "ter um valor" de "ser um número", mesmo no caso de limite infinito. Ora, se estamos pensando a partir de estipulações locais numéricas (conjuntos de números), como explicar (para os estudantes, a partir de seus significados próprios) algo ilimitado, infinito? Claro, assim como no discurso de **Joi**, o modêlo "potencialista"[3] se adequa, juntamente com uma interpretação dinâmica de variável, antecedendo à "transposição numérica"[4] no uso da definição weirstrassiana de limite. Vemos, portanto, uma produção de significados em relação a estipulações locais numéricas-funcionais:

---

[3] Cf. SIERPINSKA (1987, p.385).

[4] Cf. REZENDE (1994, p. 87).

*"**O** _ Eh... no caso de limite também que você pega por um exemplo pontual, você disse que insiste no ponto, no ponto né?! E aí você vê limite no infinito... qual é o ponto?*

***Joi** _ Não, aí não. Aí se tem que... (sorriso) aí... aí não tem ponto, tá certo?! Aí você estende a noção... é uma outra análise.*

(...)

***Joi** _ E o limite aí depende dele, né?! Depende da função, tá certo?! Pode acontecer o seguinte, ou poderia não existir, ou poderia dar um número real, ou isso aqui tende a ser limite, dar um + ou - infinito.*

***O** _ Então o limite aí passa a não ser mais um número, como você tinha escrito, "é um número".*

***Joi** _ O ponto limite, sim. Não é um número. Aqui nesse caso sim, o limite é um número. Agora, aqui já não é mais um número. Então, aqui se traduziria, qual seria uma forma assim?!"* (8ª P., 18º-19º § e 22º-24 §)

*"**O** _ Ou seja, quando você fala 'se aproxima' dá idéia de que tem alguma coisa lá e que ele tá se aproximando.*

***Joi** _ Certo. Nesse sentido, da aproximação. Que não é o caso aqui. Então aqui deveria tomar o cuidado de dizer: olha, estes valores aqui, eles crescem... com esta frase aqui nós pretendemos expressar a seguinte idéia, a seguinte idéia, que os valores f(x) são maiores que qualquer quantidade que você imaginar, desde que para isso você escolha o x suficientemente grande. Então, é no sentido disso daqui... sempre cresce, cresce mais e mais...*

Por isso que a gente usa a linguagem f(x) tende para + ∞" (9ª P., 1º-2º §).

Ainda a respeito de limite, o professor **Joi** admite que os objetos produzidos pelos alunos dependem da "ênfase" dada _ diríamos, depende do modo de produção de significados _ , citando então a definição por ε e δ e a visão geométrica intuitiva como sendo as que ele prefere, embora considere ideal a primeira por ser matematicamente a definição aceita.

"Porque no seguinte sentido, vamos supor que no curso de matemática você deu a ênfase por aqui [def. de ε e δ] e lá [no curso de administração], por isso aqui, [visual-geométrico de limite] numa forma mais geométrica, intuitiva.

Se você colocasse, se eles dois forem colegas de república, eles não vão perceber que estão falando a mesma coisa. Com certeza, eu acho. Claro, você não pode afirmar porque, de repente você é surpreendido com... ele percebeu exatamente, essa sentença aqui ele percebeu exatamente o que ela traduz. Mas eu acho... claro, é um sentimento, né?! Eu acho que eles não vão..." (10ª P., 14º-15º §).

De maneira análoga, pelas suas enunciações (11ª e 12ª P.), parece agir no ensino de derivada, tendo como objetivo a definição em relação a estipulações locais de limite. Pois, embora comece falando sobre inclinação de reta tangente pelo limite de retas secantes (partindo de estipulações locais visuais-geométricas) e depois diga que pode usar a interpretação física de velocidade, ele parece considerar um objeto derivada como estando lá (sendo dado pela definição de limite do quociente de Newton) enquanto que as demais noções são usadas para explorar essa definição. Em suas palavras:

> "*O _ Então o motivo, a motivação inicial seria por reta tangente.*
>
> *Joi _ É, derivada. É, eu saí por aí, tá certo?! Uma escolha, né?! Então, depois você faz também usando a interpretação física, de velocidade... É onde também você pode explorar a derivada, né?!*" (11ª P., 8º §).
>
> "*Isso aí sabem, então surge naturalmente esse limite aqui. Aí você fala: ó, definição, esse limite eu vou chamar de derivada*" (11ª P., 15º §).

Contudo quando questionado sobre a aprendizagem dos estudantes, diz:

> "*Ou às vezes você, nan... o que que é derivada de uma função? Ele vai falar que é o f '(a).*
>
> *Eu falo: ó gente, se você disser isso, você não disse nada, isso aqui é um símbolo. Agora, que significado que ele tem, né?! Se você já assimilou a idéia de limite, então esse símbolo ele reflete... é este limite aqui. Tá certo?! Então por isso que às vezes se você insiste, olha a derivada f ', aí você passa..., você esquece a idéia e fica com o símbolo. Esse é o problema que às vezes...*" (12ª P., últimos parágrafos).

ATIVIDADE 3

Entrevista de um professor de Cálculo I _ turma do curso de Engenharia _ pela pesquisadora.

Conforme Anexo 1, entrevista nº 3, o professor entrevistado é denominado (para fins desta pesquisa) por **Assai** e a entrevistadora (pesquisadora) por **O**.

Análise

O professor **Assai** diz que trabalha com os alunos na seqüência: números reais, intervalos, funções, gráficos, limites, derivadas..., porque ele acha "*funcional*"

(1ª P., 7º§).[5] Porém, quando perguntado se nunca tinha pensado alguma vez em uma inversão de ordem nessa seqüência, diz:

> "*Não, também não. Eu acho que inclusive isso é conseqüência do... como é que eu vou dizer!? ...da cristalização das coisas. Você aprendeu assim, os textos normalmente trazem as coisas assim e a gente acaba se acomodando a essa situação. Né!?*" (6ª P., 6º §).

O que reforça as afirmações:

> "*O desenvolvimento do Cálculo em cursos onde a disciplina é obrigatória, pode ser descrito como uma seqüência de conteúdos, expressa pela fórmula: números reais ⟶ funções ⟶ limite ⟶ derivada ⟶ integral*" (Baldino et al., 1996, p.295).

> "*... livros de Cálculo vendáveis, constrói-se sobre uma pedra fundamental, o conceito de limite, que é usado para fundamentar os dois conceitos básicos de derivada e integral*" (Baldino, 1995a, p. 9).

Em boa parte de suas falas (a seguir, destacamos algumas) podemos notar que **Assai** produz significados em relação a estipulações locais visuais-geométricas e que isso deve acontecer de modo análogo quando, em sala de aula, ensina a partir do Cáculo:

> "***O*** _ *Você acha que eles têm idéia do que é um número real?*
> ***Assai*** _ *Não sei se eles têm uma idéia, mas geometricamente eles sabem como é que funciona...em geral. [...]*
> *Na reta ele sabe que, existem pontos que não são racionais...pelo menos isto eu tenho notado nos cursos da engenharia que eu tenho dado.*" (1ª P., 12º-15º §).

> "*Vêem. São as que eles mais vêem na verdade. Eles vêem as funções trigonométricas também, mas de uma forma talvez mais decorada do que entendida. Eles sabem, a função de segundo grau sabem que é uma parábola, mas eles não têm muito bem o domínio de como é o gráfico dessa parábola ou como são os gráficos. Então eu acho que essa visão é importante. A função escada ajuda muito quando você está trabalhando com limites laterais e tal...Então é uma função simplesinha que já te dá uma idéia de...de limites laterais diferentes, né!? Então ele já vê geometricamente encima daquilo*" (2ª P., 5º §).

> "***Assai*** _ *Não. Eu, a noção de limite é muito mais complicada do que a idéia geométrica de derivada. A idéia geométrica é muito mais simples, a de derivada. Só que, na hora que ele vai calcular, ele precisa saber calcular limites!*
> ***O*** _ *Ele não faz derivada sem limite? É isso?*
> ***Assai*** _ *Eu acho que não. Quer dizer... fica difícil para o aluno fazer uma derivada sem limite. Mesmo porque, quando você define a derivada, você define como limite de declividades*" (2ª P., 9º-11º §).

---

[5] Conforme dissemos anteriormente, usamos a letra "P" para indicar a parte e o símbolo § para indicar o parágrafo correspondentes aos da tradução da entrevista.

"*Quer dizer... ver de fato...quer dizer, acho que eles calculam o limite, eles têm a idéia do que é que eles estão fazendo, porque eles aprenderam por aí , né!? É...vendo geometricamente como é que a coisa funciona, encima de gráficos...*" (3ª P., 12º §)

Quanto aos objetos que caracterizamos como relativos ao Cálculo, temos mais algumas observações. Primeiro, conforme o professor diz, a idéia de limite por ele trabalhada é só uma "*noção intuitiva*" e, ao falar dela, inicia por uma produção de significados em relação a estipulações locais visuais-geométricas com a "*noção de proximidade*", chamando atenção a um fato interessante, de que "*estar próximo*" para o aluno, pode não significar o mesmo que para o professor, ao que acrescentamos, inclusive se pensam a partir da Matemática e ainda mais se a expressão for "*suficientemente próximo*".

"*A noção intuitiva é uma noção de proximidade, muito embora isto seja uma coisa muito relativa, porque o que é próximo pra eles não é próximo para a matemática, né!? Pro aluno, você fala próximo, ele acha que próximo é é...basta tá pertinho, né!? Mas matematicamente, o que visualmente está próximo pra ele, matematicamente pode não estar próximo ou suficientemente próximo. Então é uma noção complicada, mas é encima disso que eu particularmente trabalho; com essa noção de proximidade. Quer dizer, f(x) estará próximo de alguma coisa quando x está próximo de algum valor. Então essa idéia é uma idéia bastante intuitiva, que é por onde eu começo na verdade, pra depois fechar essa noção intuitiva com a definição mais sofisticada de limite, embora eu não trabalhe com ela dentro do Cálculo. Pessoalmente, eu acho que não é o lugar para se trabalhar a definição de limite com* ε *e* δ*, e outras coisas* (3ª P., 2º §).

"*... Porque quando você fala " se aproxima de", na cabeça dele tem um entendimento, mas na hora que você começa a complicar as coisas e começa a colocar uns buraquinhos no meio, né!? De modo que o "se aproximar de" já não, começa a não bater com a idéia de estar perto, que ele tinha lá, aí você começa a complicar; entre dois racio...entre dois reais você tem, entre dois irracionais você tem um racional, e entre dois..., isso aí não bate muito bem pra eles*" (4ª P., 10º §).

Continuando as suas enunciações a respeito da noção de limite, **Assai** relaciona-se a estipulações locais do tipo algébricas-funcionais ao referir-se às operações algébricas ("*algebrismos*"):

"...Porque o que acontece normalmente é que os problemas tanto de limite como de derivada, que não deixa de ser problema de limite, acabam é...se transformando num problema de você pegar uma indeterminação, de uma maneira geral, e transformar pra uma expressão que seja uma expressão contínua, através de algebrismos. Então, quer dizer, uma vez que ele percebe que, através dessas operações algébricas, ele acaba transformando ou saindo de uma indeterminação e *obtendo uma expressão que é uma expressão contínua, ele já sabe que o limite daquela expressão é o valor da expressão no ponto, e daí ele vai. É...o que é complicado é você falar em derivada ou em limite, eu acho, sem chamar atenção para esses pontos. Quer dizer, por que que em um determinado ponto eu tenho que fazer um conjunto de algebrismos e, a partir de um certo ponto, eu simplesmente substituo o valor...que se propôs?*" (3ª P., 4º §).

Segundo, é sobre a noção de diferencial. Ele diz que fala em diferencial "*usando o conceito de forma bilinear [...] acaba sendo uma função, de duas variáveis...*", produzindo significados em relação a estipulações locais algébricas-funcionais, $dy = f'(x)\,dx$. Contudo, chama a atenção de seus alunos nos seguintes termos:

> "*... diferencial não é nada daquilo que a gente vai fazer, porque o que se usa de diferencial, na verdade, é definir dy/dx como variação de y sobre a reta tangente, ou seja, é um valor aproximado de Δy, da variação da função, então é isso que ele vai usar ali, e nada mais que isso, na verdade [...] Na verdade o que acontece é que eles* [referindo-se aos livros de Cálculo] *acabam fazendo com que o limite de "Δ" seja o "d", basicamente é isso. O limite de um Δy é um dy, o limite de ΔA é dA, eles quase que... intuem ao aluno essa idéia, obrigam o aluno a pensar assim, onde você tem "Δ", e vai calcular o limite, você substitui por "d"; que é a história do limite de Δy/Δx ser dy/dx que é a derivada da função*" (5ª P., 5º e 6º §).

Portanto, o que tudo indica é que seus alunos devem então produzir significados (na demanda do interlocutor, professor **Assai** ou livro texto) em relação a estipulações locais visuais-geométricas ("*...o que se usa de diferencial, na verdade, é definir dy/dx como variação de y sobre a reta tangente, ou seja, é um valor aproximado de Δy, da variação da função...*") ou também de estipulações locais algorítmicas (em esquemas: "*O limite de um Δy é um dy, o limite de ΔA é dA, [...] onde você tem 'Δ', e vai calcular o limite, você substitui por 'd'* ").

ATIVIDADE 4

Entrevista de um professor de Cálculo I _ turma do curso de Geologia _ pela pesquisadora.

Conforme Anexo 1, entrevista nº 4, o professor entrevistado é denominado (para fins desta pesquisa) por **Alp** e a entrevistadora (pesquisadora) por **O**.

<u>**Análise**</u>

Nas preocupações de **Alp** com a aprendizagem a partir do Cálculo observamos várias falas em relação a estipulações locais visuais-geométricas, como ao tentar relacionar o que é visto em Cálculo com questões próprias da Geologia:

> "*Este ano eu pedi para eles um trabalho que vão apresentar, no qual eles devem procurar dois gráficos relacionados à Geologia, às outras disciplinas que estão cursando..., e que analisem estes gráficos em termos de toda a matéria que a gente discutiu. O que eles poderiam falar em termos dos gráficos.*
> *Estão se dedicando muito, trabalhando em grupos, e estão aparecendo coisas assim... difíceis de explicar geologicamente ...*" (2ª P., 2º §).

Nessa situação idealizada pelo professor, os estudantes devem produzir, além de significados a partir da Geologia e do Cálculo, significados e conhecimentos em relação a núcleos mais complexos _ que são constituídos tanto de estipulações locais "geológicas" como de estipulações locais mais específicas ao Cálculo _, por isso, como **Alp** diz, "*coisas assim... difíceis de explicar geologicamente*". Outra vez encontramos essa idéia de produções conjuntas quando o professor fala em buscar na Geologia um motivo para o ensino e aprendizagem de determinados assuntos pertinentes ao Cálculo:

> "*Eles estão usando na interpretação dos gráficos em Geologia, eles estão falando... Essa foi a ênfase maior no começo. Depois a gente resolveu alguns problemas de taxa de variação, de aumento de bactérias, até surgiram equações diferenciais...*
> *O objetivo não era discutir profundamente isso, mas que eles tivessem problemas onde aparecesse taxa de variação, aumento e redução. E, a necessidade de estudar integrais*" (5ª P., 10º-11º §).

Seguindo os pronunciamentos de **Alp** , podemos notar que ele também se relaciona a estipulações locais visuais-geométricas ao falar de derivada como "*coeficiente angular da reta tangente*", para depois falar de derivada como uma definição por limite do quociente de Newton:

> "*Agora, é claro que não foi simplesmente colocar a definição lá. A gente primeiro discutiu reta secante e... reta tangente, o que seria isso ... e analisamos em um gráfico vendo o que acontecia, variação no eixo x, variação no eixo y, analisando o coeficiente angular*".
> (...)
> "*Eles falam muito, a gente falou muito mesmo, em coeficiente angular da reta tangente... e muitos deles usavam mesmo o limite por definição, para demonstrar a*

derivada de algumas funções, não de todas. Ou, resolvendo problemas onde foi pedido que usassem a definição.

Até quando tínhamos umas regras... muitos deles não se tocavam e queriam usar o limite que definia" (5ª P., 4º §, 10º-11º §).

Nessa última frase do período acima observamos que o entrevistado devia estar a pensar, preponderantemente, em relação a estipulações locais algorítmicas, como se dissesse: "*já tínhamos regras, elas bastavam, eles não precisavam pensar em outra coisa*" ou "apesar d*as regras já terem sido obtidas, muitos ainda queriam usar a definição por limite*". Aqui é interessante notar a facilidade com que o professor tem, se comparado ao aluno que está a aprender, de pensar de um modo ou de outro em relação à derivada, de discernir quando e como produzir certos significados. Essa possível escolha e mudança rápida de CS nem sempre é acompanhada de igual modo pelo aprendiz, como pudemos observar em sala de aula. No presente caso, por falta dessa mudança, parece que eles continuaram a produzir significados em relação a outras estipulações locais (como às algébricas-funcionais ou às numéricas) de modo análogo aos processos em que obtiveram as regras. Até que, "esquematizado" o processo e obtida a necessária legitimidade (às vezes também adquirida por autoridade do professor ou do livro), passam a agir diretamente a partir das regras. Aprendem, por exemplo, a produzir significados diferentes conforme a presença ou ausência de frases no enunciado da questão dizendo: "use a definição de derivada" (limite do quociente de Newton) ou "faça pela definição". Uma observação pertinente é a ocorrência do contrário, em que alguns estudantes não aprendem a produzir significado em um processo a partir do limite do quociente de Newton, embora produzam significados para as regras de derivação (em relação a estipulações algorítimicas).

Contudo, embora **Alp** fale na definição de derivada por limite, ele não demonstra relacionar-se, em sala de aula, a estipulações locais de limite (como estamos entendo por), uma vez que em termos de limite admite dar a idéia intuitiva, em relação a estipulações visuais-geométricas ou estipulações locais numéricas-funcionais:

"O _ *Por exemplo, quando você falou em limite, você falou para eles como?*

Alp *_ Mais em termos intuitivos, dando idéia de limite, não dando a definição formal por épsilons e deltas..., mas isso acontece na matemática também, isso não é diferença. Em termos intuitivos, com algumas técnicas, mas sem a pretensão de gastar muito tempo com isso"* (3ª P., 1º-2º §).

"1/n , o que acontece quando n torna-se muito, muito grande? O que vai acontecer com 1/n ? Alguns aceitaram que se aproxima de zero. Discutíamos esta questão também, não é que é igual... mas no limite... a gente fala em Matemática que é zero. Não é que o valor 1 dividido por aquele número vá ser zero, mas...a gente pensa: aquilo aumenta cada vez mais...e em matemática a gente acha um jeito para conversar sobre estas coisas, a gente define como sendo o limite e fala que ele é zero" (3ª P.,10º§).

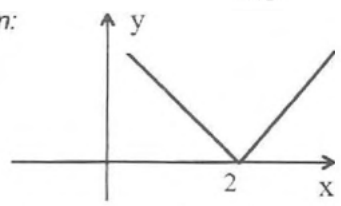
*"**Alp** _ Com respeito a isso... Por exemplo,* $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ *, então... ou olham no gráfico da função ou pensam aqui... [aponta o limite escrito].*

O *_ Inclusive faziam gráficos na calculadora, não é?*
Alp *_ Também, também"* (4ª P., 11º-13º §).

"... Anh!... Vou dar outro exemplo: $\lim_{x \to 2} |x-2|$ *, nós falamos: [escreve e lê]*

$\lim_{x \to 2^+} |x-2| = 0$ *e* $\lim_{x \to 2^-} |x-2| = 0$ *e* $\therefore$ *o* $\lim_{x \to 2} |x-2| = 0$*.*

Fazem:



$\lim_{x \to 2^-} |x-2| = 2$

e

$\lim_{x \to 2^+} |x-2| = 2$

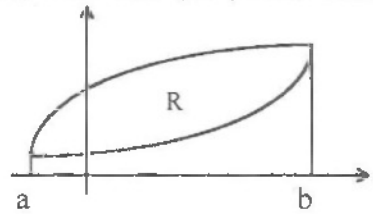
Mas escrevem $\lim_{x \to 2} |x-2| = 0$*..*

Não têm sentido. Ou tem prá ele, né?!"

Quanto a essa última citação, algum significado os alunos produziram, mas para escreverem o que **Alp** mostra, não foi certamente um significado para limite lateral conforme fala e apresenta no início do exemplo, inclusive (para ele, o professor) com uma implicação existencial do limite em $x = 2$ a partir da existência e igualdade dos limites laterais e, por isso, a afirmação *"Coisas que parecem não ter ligação"*.

Na parte final da entrevista o professor fala que trabalhou com os alunos a idéia de área antes de definir integral definida por limite (devia estar pensando na integral por limite de soma de Riemann, como no livro texto adotado), aproveitando seus significados próprios, "Primeiro falamos em área. Antes de falar em integral definida, conversamos *sobre área de figura plana, eles deram mil idéias. A gente precisa realmente, se quer fazer o ensino através de atividades em sala de aula, você tem que pensar muito seriamente no que parte deles.*

No plano uma região R [desenha]: eles deram a idéia de quadricular, de dividir em triângulos..., então é natural para eles.



*[**Alp** conta que os alunos foram falando, discutindo com ela a idéia de partição da área por retângulos, tomando como altura o máximo e o mínimo, por excesso e por falta, até chegarem à definição por limite de uma integral definida].*

Você define integral definida como ela é, por limite. Aí depois, o que se faz na prática? Existe o Teorema Fundamental do Cálculo, aí você tem um resultado forte, que permite calcular integral definida de uma forma bastante simples, que é através da integral não definida. Então..." (6ª P., 6º-9º §).

Assim, notamos primeiramente uma produção de significados e objetos em relação a estipulações locais visuais-geométricas ao trabalhar área e ligar à integral definida, quando a função é positiva; depois, em relação a estipulações locais de limite na definição de integral definida por limite de soma de Riemann. Porém, pelo que **Alp** diz, dificilmente os alunos (com o trabalho em sala de aula) produziram significados para a integral definida em relação a estipulações locais de limite, mesmo porque sequer trabalharam limite a partir de estipulações locais de limite conforme vimos antes. Isso é reforçado em seus comentários finais:

"Antes de falar no Teorema Fundamental do Cálculo, eles vieram me falar: 'Ah! professora! A senhora não vai repetir um pouco mais aquilo, falar um pouco mais? Eu não entendi nada!'

Então você percebe que em termos de conceito... embora eles tivessem participado... Achei normal e natural.

(...)

O que eu quero dizer para você é que, pela carga horária, eu deixei de trabalhar melhor esta parte aqui [aponta para as áreas calculadas por soma de partições], fui logo para o Teorema Fundamental do Cálculo, para eles terem a oportunidade de ver o que era este teorema, resolver alguns exercícios, e ligar a integral definida com área quando a função é positiva... Mas o semestre vai parar por aí" (6ª P., 10º §, 11º § e 14º §).

ATIVIDADE 5

Entrevista de um professor de Cálculo I _ turma do curso de Matemática _ pela pesquisadora.

Conforme Anexo 1, entrevista nº 5, o professor entrevistado é denominado (para fins desta pesquisa) por **Su** e a entrevistadora (pesquisadora) por **O**.

Análise

O professor **Su**, como os demais professores por nós entrevistados, tem como ponto básico na seqüência de ensino de Cálculo um objeto denominado limite. De início nos relata que, para dele falar aos alunos, recorre à idéias intuitivas, o que do ponto de vista de seu discurso e do MTCS evidencia uma produção de significados e objetos em relação a estipulações locais visuais-geométricas e funcionais-numéricas (como podemos observar em alguns trechos da entrevista que transcrevemos a seguir), deixando a definição por épsilon e delta para o final do primeiro ano, pois como diz: "*antigamente eu entrava com 'épsilon e delta' mas ... o aproveitamento era mínimo*" (4ª P., 4º §).

> "*Nós, já há vários anos, resolvemos não falar na definição formal de limite por épsilon e delta, e eu vou introduzir essa notação agora que eu vou dar seqüências e séries. Agora, nas próximas aulas, final de novembro.*
>
> (...)
>
> *Bom, eu só acho que se der no início* [a definição de limite por épsilon e delta], *quando eu der limite, eles não vão assimilar bem a idéia de intervalo... Até eu tento. Às vezes eu tô dentro de um exercício... eu sem querer eu falo um pouquinho... faço um desenho, mas muito pouco.*
>
> (...)
>
> *... eu sigo bem o Swokowski, a idéia de: quando x se aproxima de a, f(x) se aproxima de um valor fixo L. É bem na base de aproximação*" (3ª P., 2º, 4º e 6º §).
>
> "*Eu uso demais... desenhos. Acho importantíssimo. Se você vai, por exemplo, dar a idéia por 'épsilon e delta', se você não for num desenho e mostrar... Como ele vai perceber o que está acontecendo?*" (8ª P., 2º §).

O entrevistado faz uma importante observação a respeito de livros textos de Cálculo _ apesar de aparentemente terem uma mesma seqüência de assuntos, eles diferem não só no modo de introduzi-los, mas nos próprios enunciados de algumas noções _. Cita, como exemplo, a noção de "ponto crítico" e de "função sobrejetora".

A respeito de ponto crítico diz que alguns livros definem como sendo um ponto em que a derivada é zero ou não existe, enquanto que em outros é somente um ponto em que a derivada é zero.

No segundo exemplo, a função sobrejetora, para alguns autores, é como se não existisse, porque só falam em conjunto imagem de uma função e não se referem ao contradomínio.

No nosso entender, isso vem a contribuir na afirmação de que um objeto é aquilo que se fala de, na dependência das estipulações locais tomadas, um "algo" constantemente produzido e, não, uma construção modificável.

Isso também vem ao encontro de nosso acordo com **Su** sobre a diferenciação entre o que um aluno de Biologia e um aluno de Matemática (em turmas específicas a cada curso) geralmente saem sabendo de Cálculo. Todavia temos que ter cuidado na explicitação das justificativas desse fato.

Quando **Su** destaca que "*... no curso de Biologia e Ecologia, eu fujo muito mais da parte teórica. Eu sempre procuro entrar mais na parte teórica nos cursos de Matemática e Física, até Computação*" (6ª P., 2º §), fica implícito, porém escondido, que por falar mais teoricamente (formalmente) usando maior rigor para os estudantes de determinados cursos como a Matemática em relação a outros, a produção de objetos e conhecimentos é diferente. Por exemplo, "derivada": 1. como declividade limite de retas secantes; 2. como o resultado numérico (quantitativo) de uma taxa instantânea calculada por regras; *são objetos distintos, em cuja produção outros significados* e objetos distintos são também produzidos, como: em 1. tangência a uma curva, ponto de tangência, reta tangente como limite de retas secantes, coeficiente angular, e outros; em 2. relação entre variáveis, unidades de variação, acréscimos (numéricos), funções, regras de derivação, e outros.

Notamos então que, embora **Su** diga (6ª P., 6º §) ser o <u>mesmo</u> saber a partir do Cálculo, somente "*menos aprofundado no curso de Biologia*" do que na Matemática[1], logo a seguir diz que, os alunos da Biologia e da Matemática, teriam respostas diferentes se perguntados sobre a derivada, por exemplo. Justifica-se, dizendo que: na Matemática (*o curso inicial de Cálculo é de um ano*) e "*... você tem tempo de* amadurecer os conceitos. Enquanto que na Biologia e Ecologia isso é impossível, porque você dá em seis meses o curso de diferencial e integral" (6ª P., 8º §). Contudo, novamente, fica escondido no "*amadurecer os conceitos*", a função epistemológica relativa às produções análogas e às escolhas de novos modos de pensar, de produzir significados, objetos e conhecimentos, esses, sim, responsáveis diretos pelas diferenciações. Além disso, ao ter mais tempo para "amadurecer ou profundar" as noções, há mais tempo de se pensar, de aprender a produzir significados, de comparar e desenvolver novos modos.

Uma experiência com um aluno, citada por **Su**, veio corroborar com essa idéia de que o desenvolvimento de uma noção, de sua aprendizagem, não é um processo linear, mas em espécies de ciclos (em espiral). O relato é sobre um aluno que tinha, segundo o professor **Su**, dúvida na definição de módulo:

> "*A dúvida dele era: 'por que que se o x for negativo, aqui* [*mostra a definição:*
>
> $$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$] *fica -x, e como é que aqui aparece 'menos' se o valor absoluto é sempre positivo?' Na cabeça deles 'menos alguém' é negativo*" (7º P., 14º §).

Todavia, a dúvida do referido aluno, para nós, é considerada em termos de sua noção de variável, que certamente foi trabalhada antes do Cálculo, mas no processo de aprendizagem, "retorna" (em um novo ciclo), "agregando" para ele mais um significado sobre variável que antes deve ter passado despercebido e não produzido, quer seja, o sinal da variável (*x*) não é o sinal que está a sua frente, - *x* não quer dizer, como variável em um conjunto de valores positivos e negativos, que seja uma variável negativa, do mesmo modo que *x* não quer dizer que seja positiva.

[1] Para a entrevistadora esta fala soou como um eco de outras escutadas anteriormente nas equipes de professores de Cálculo . (Cf. Cap. 1, item 1.1).

Esta mesma noção de variável (que não incorpora sinal) aparece novamente na fala do entrevistado ao lembrarmos os três modos de se tratar módulo de uma variável real *x* (como desigualdade (distância), como função ou como $\sqrt{x^2}$):

> "*Você tem que trabalhar muito. Eles simplesmente vão dizer que* $\sqrt{x^2}$ *é x . Eles esquecem...Eles não se preocupam com o sinal da raiz. É a velha história, se x não carrega nenhum sinal, para eles é positivo*" (7ª P., 20º §).

Nos trechos da entrevista em que descreve um pouco do ensino e aprendizagem em sua sala de aula, o professor apesar de conduzir-se em uma postura pedagógica tradicional de aulas (exposições de assuntos seguidos de exercícios, que ele justifica pelo turma ser numerosa), reconhece a importância de observar e ouvir as perguntas dos alunos _ tanto dirigida aos colegas quanto a ele (professor) _ como uma fonte de seu entendimento a respeito das "dificuldades" deles e ao entendimento dos próprios estudantes quanto ao que está sendo aprendido.

> "*Agora, com pouco aluno, eu daria de vez em quando um texto para cada um expor na lousa. Nem que fosse por quinze minutos para ele colocar. Mas ele teria o trabalho de entender aquilo na íntegra... Porque ele não tem esse trabalho enquanto você está expondo na lousa, ele é passivo e não percebe se entendeu ou não. Ele vai perceber, talvez, na hora de fazer o exercício. Agora, se ele fosse na lousa e fosse questionado pelos colegas sobre o que ele está falando... eu tenho a certeza que iria ter uma postura diferente de como estudar. Ele aprenderia de certa forma como estudar. Ele ia ser questionado de uma maneira diferente, ali na hora. Acho que o aluno aprende muito*" (8ª P., 24º §).

Acontece, no entanto, que o professor se coloca mais predisposto em olhar em termos das dificuldades, das falhas, daquilo que *falta* para o estudante chegar ao *certo*, a produzir determinados significados (que ele produz) e, menos norteado, em saber como trabalhar a partir do que o estudante está pensando e poder ajudá-lo na condução de seu processo de aprendizagem; conforme pudemos evidenciar em trechos da entrevista (além das observações em sala de aula):

> "O _ *E eles têm uma tendência em achar que este valor sempre existe...*[a respeito de limite]? *Ou...porque quando eles trabalham com funções, você fala f(x), isso é sempre um valor?*
> ***Su*** _ *Não sei... O que eu acho é que não dá tempo de você reparar certas coisas. A não ser que você faça uma pergunta já com essa intenção. Em geral, o que acontece? Seu tempo é geralmente curto para tudo*" (3ª P., 9º-10º §).

"*A partir do momento em que você dá o exercício para eles fazerem, eles vão ter que se encaixar na teoria... Aí você vai ver quais as dificuldades*" (8ª P., 5º §).

"*É... eu passo e olho o que eles estão fazendo, para não atrapalhar. E, nisso eu vejo, que às vezes eles comentem erros que jamais passou pela minha cabeça...chamar a atenção para aquilo*" (8ª P., 20º §).

6.6 CONCLUSÕES

Destacamos como resultado central da pesquisa de campo a confirmação da existência de diversos modos de produção de significados a partir do Cálculo e, juntamente a esses, quais as estipulações locais predominantes. A análise epistemológica dos dados, tendo por base o MTCS, mostrou que o ponto principal desse resultado central é a produção de objetos diferentes a partir do Cálculo, não apenas objetos de aparências diferentes. A fonte dessa conclusão está nos discursos, nas falas colhidas, as quais aparecem na forma de afirmações distintas a partir de um mesmo texto.

Nesse sentido, temos nas entrevistas com os professores, um indicativo de que na defesa natural e necessária de uma unicidade a respeito de noções ou objetos do Cálculo, os professores tendem a esquecer a pluralidade dos modos de produção de significados e a importância disso para novas relações, novas descobertas e criações.

Quanto às categorias que usamos nas análises (**alg-func**, **lim**, **deriv**, **integr**, **geom**, **infinit**), apesar de fornecerem uma classificação para as soluções de problemas em Cálculo, não evidenciam características epistemológicas importantes como : uma mesma crença-afirmação junto a justificações diferentes resultarem em conhecimentos diferentes; de sujeitos estarem falando e escrevendo aparentemente de uma mesma coisa ("limite", "derivada", f '(x), dy, "diferencial", $\int_a^b f(x)dx$ e outros) mas produzindo significados em relação a estipulações locais distintas, objetos distintos; de um sujeito, trabalhando em uma mesma atividade, poder produzir significados de diversos modos e em relação a núcleos (complexos) constituídos por mais de um tipo de estipulações locais.

Agir e olhar do ponto de vista do MTCS de modo a poder explorar positivamente em termos da compreensão e do desenvolvimento do pensamento diferencial e integral em meio ao ensino e aprendizagem de Cálculo, tem algumas conseqüências que se mostraram ainda mais claras no decorrer desta parte da pesquisa. Primeira, a evidência dessas características epistemológicas que acabamos de citar no parágrafo anterior.

Segunda conseqüência, a questão de limites e obstáculos epistemológicos, para os quais o professor tem que estar atento e manter determinadas posturas. Mas vamos primeiro falar da ocorrência deles em nossa pesquisa de campo.

Vimos nas entrevistas e também durante as observações das atividades em grupo, que o fato do aluno produzir significado preferencialmente em relação a determinado núcleo, transforma sua passagem a um outro CS constituído em torno de um outro núcleo nem sempre em algo fácil e direto, ainda mais se as estipulações locais são completamente distintas. Devido a isso, acontece (como registrado na atividade 1 de 6.5.1, na **T3**) de estudantes estarem falando, por exemplo, de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ em relação à estipulações visuais-geométricas e não perceberem a indeterminação em $x = 0$, para onde o professor quer conduzi-los. Simplesmente traçam ou visualizam na calculadora gráfica uma continuidade nesse ponto. Não produzem qualquer significado de "indeterminação" a partir de um tal CS. Notamos que, para alguns estudantes foi impossível mudar para um outro CS (cujo núcleo fosse constituído por estipulações locais numéricas ou de uma noção intuitiva de limite) onde pudesse produzir significado. Ou seja, estávamos diante de um obstáculo epistemológico _ da impossibilidade de produção de significados em relação a determinadas estipulações locais (numéricas ou em relação a uma noção de limite), embora fosse possível, pois em meio a outras atividades constituíram núcleos a partir delas e produziram significados para outras proposições.

Logo, diante dessa segunda conseqüência temos um indicativo de que determinadas posturas do professor _ que é uma autoridade e um interlocutor para o estudante _ são fundamentais para que os estudantes superem os obstáculos epistemológicos, para os quais os professores nem sempre estão atentos e, por isso, se contentam em determinar para o aluno aonde ele deve chegar (o que o professor gostaria que produzisse), pois, geralmente, o professor tem uma atitude centralizada em termos do conteúdo a ser ensinado, sem saber ao certo onde o estudante está ou a partir de que está produzindo significados.[2] O professor tenta transportar a linearidade que estabelece nos planejamentos de ensino para a aprendizagem dos estudantes, tratando os significados distintos dos "oficiais" como "erro" (como ficou patente em relação à entrevista nº 5) ou do ponto de vista de "falta".[3]

Como diz Lins (1997, p.131):

> *"Em vez de tentar 'escorregar suavemente' para um novo modo de produzir significado, como se tudo fosse o mesmo de antes, e, portanto, deixando o aluno com a sensação de que ele deve 'descobrir' como as coisas se passam 'de fato', o professor toma explícita sua intenção de tentar algo novo e diferente do que se fazia antes."*

Um segundo aspecto que vem a complementar esse indicativo é a necessidade de abordagens pedagógicas que permitam ao professor estar ouvindo e "lendo" o aluno a fim de examinar os significados que produz e poder interagir com isso, poder sempre que possível partir de onde o estudante está, produzindo significados em relação a estipulações locais com as quais ele (o "aprendiz") constituiu núcleos e opera.

---

[2] Sobre a metodologia empregada pelo professor em sala de aula de Matemática, "*professor-pesquisador em Matemática*", orientado por concepções herdadas de uma prática científica da Matemática, temos como referências o trabalho de Silva (1993).

[3] A respeito de abordagens didáticas que olham pela "falta", encontramos referências em Lins (1997, p. 103-104 e 138).

Capítulo 7

CONCLUSÕES GERAIS

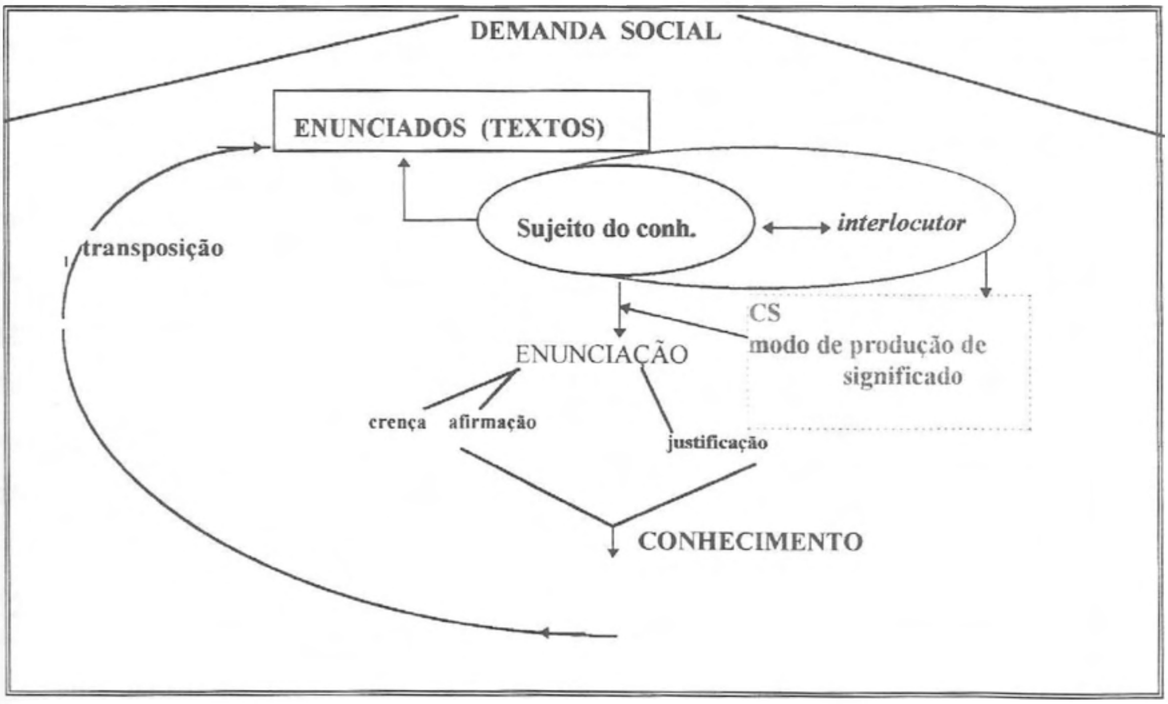
7.1 CERTEZAS

Nossas investigações quer sejam teóricas, metodológicas ou práticas, tiveram como central a produção de significados e objetos a partir do Cálculo. Uma vez que essas produções são observadas no interior de uma atividade, as conclusões e indicações são diretamente relacionadas com o ensino e aprendizagem.

As evidências da investigação histórica epistemológica e os resultados das análises da pesquisa de campo nos dão a certeza de poder afirmar, mais do que positivamente, à primeira parte de nossa pergunta diretriz _ "São estabelecidas diversificações nos modos de produção de significados e de objetos a partir do Cálculo diferencial e integral?"_ pois, elas nos permitem tanto mostrar a existência de diversos modos de produção de significados (CS) quanto exibir objetos definitivamente distintos que podem ser produzidos ao se falar de uma mesma "coisa" a partir do Cálculo, afirmações diferentes em relação a um mesmo texto. Elas também nos possibilitaram responder à complementação (ou segunda parte) da pergunta diretriz _ "Quais?"_ ao analisarmos as falas dos professores e alunos a partir do Cálculo, juntando-se a isso o reforço encontrado nos discursos dos diversos autores da parte de revisão literária (Capítulo 3).

Nossa pesquisa confirmou que dentre os modos predominantes de produção de significados, objetos e conhecimentos a partir do Cálculo, a caracterização fica por conta de estipulações locais dos seguintes tipos: estipulações locais visuais-geométricas, estipulações locais infinitesimais, estipulações locais de limite e estipulações locais algorítmicas. No entanto, não há como deixar de dizer que essa caracterização não se esgota como elementos constituintes de um pensamento diferencial e integral. Pensar em termos de diferencial e integral inclui, por exemplo, produzir significado para situações que envolvem noções básicas como a de função e outras relacionadas ao pensamento algébrico.

O entendimento em um nível mais geral dessa produção de significados para situações a partir do ensino e aprendizagem de Cálculo diferencial e integral _ coloca em destaque uma necessidade de compreensão das interrelações entre os elementos que são constituintes desses dois complexos processos, dos quais destacamos: um sujeito do conhecimento (agente principal: o aluno), interlocutor, enunciados (textos, como os de Cálculo), enunciação, conhecimento, CS (modo de produção de significado), e demanda social.



Procuramos congregar as interrelações desses elementos no diagrama abaixo (onde a disposição não deve ser entendida como prioridade ou importância a nenhum de seus componentes).

A seguir, cabe sintetizar os principais pontos a respeito dessas interrelações, já que durante todo o decorrer deste trabalho de pesquisa elas vêm sendo evidenciadas.

Não há um verdadeiro e absoluto modo de pensar sobre Matemática, de *produzir seus significados, como historicamente também podemos evidenciar no* Capítulo 5. Mesmo argumentando do ponto de vista do desenvolvimento na prática (por exemplo, em sala de aula) de um processo de ensino e aprendizagem a partir do pensamento diferencial e integral, estes processos obedecem a certos componentes em um quadro maior de uma demanda social. Esses componentes são: uma linguagem, um conjunto de afirmações e de questões aceitas, e, um conjunto de visões metamatemáticas (incluindo modelos de provas e definições). Além do que, esses componentes são advindos do domínio do enunciado matemático que é lido por um sujeito, que por sua vez o transforma em enunciação. É o caso do livro texto de Cálculo, um enunciado matemático para o aluno, que o transforma em enunciação segundo uma demanda de seus *interlocutores*, o que ocasiona a escolha de certos *modos de produção de significado* _ Campos Semânticos (CS) _ para as *crenças-afirmações e justificações*. Estas crenças-afirmações junto com as respectivas justificações comporão o que chamamos de *conhecimento matemático* do aluno, que por meio de uma transposição, poderá se tornar um enunciado.

7.2 SOBRE AS PROPOSTAS DIDÁTICO/ PEDAGÓGICAS

• processo de ensino/aprendizagem do Cálculo, acreditamos estar centralizado em que aprender é aprender a produzir significado. Porém, a crença em que uma "boa" explicação ou um enunciado "claro" (presente por excelência no ensino tradicional vigente) coloca o estudante diante do conhecimento requerido e somente na dependência de sua vontade de apossar-se dele, desconsidera o processo de produção de significado. Simplesmente, através de justificações supostas adequadas, um discurso linear e bem "arrumado" perpassa os enunciados e ajudam a compor a forma estrutural do que o professor diz. Um método que podemos chamar de "ensino textual" (que está de acordo com as propostas na linha tradicional). Nossas entrevistas apontaram essa postura pedagógica do professor como uma (dentre outras) que está presente em sala de aula de Cálculo. Assim atuando, o professor centraliza suas ações didático/pedagógicas em termos do conteúdo a ser ensinado, esquecendo de procurar investigar "onde o estudante está" ou a partir de que está produzindo significados.[1] Uma implicação disso é o professor raramente ajudar o aluno, intencionalmente, nas questões pertinentes a mudança de modos de produzir significados, o que se agrava nos casos mais extremos de obstáculos e limites epistemológicos.

Vamos exemplificar falando especificamente, a partir de nossas observações em sala de aula e de pesquisas citadas no Capítulo 3, de um obstáculo epistemológico encontrado na aprendizagem da noção de limite.

A maneira de se considerar limite como um processo dinâmico, pontos em um gráfico, cada vez mais próximos de um ponto limite, como na definição de limite de Cauchy (com a idéia de movimento induzida por seu conceito de variável), muitas vezes consiste em um obstáculo epistemológico, conforme Cornu (1983) e Rezende (1994) apontam e já pudemos observar. Porém, seja em um obstáculo do tipo "cinético" como Rezende denomina e não considera sempre negativo à aprendizagem, seja "potencialista" como diz Sierpinska (1987) ou outro, estamos de acordo com a idéia das afirmações de Williams (1991) de que, para melhorar o entendimento dos estudantes a partir da definição formal de limite, é necessária uma "*instrução cuidadosa e explícita* " (que aqui transladamos para *interferência cuidadosa e explícita do professor*), que estime os diversos modelos de limite construídos pelos estudantes, bem como os conhecimentos e relacionamentos (como os a priori de gráficos e funções) durante o processo de produção, a fim de tornar possível uma mudança para um modo de produção de significado em relação, por exemplo, a estipulações locais de limite (como é requerido em Cálculo e Análise), e, assim, não

[1] Sobre a metodologia empregada pelo professor em sala de aula de Matemática, "*professor-pesquisador em Matemática*", orientado por concepções herdadas de uma prática científica da Matemática, temos como referências o trabalho de Silva (1993).

permitindo que o estudante faça do seu modo de produção de significado um obstáculo a outros modos.

Uma conseqüência, portanto, desse tipo de postura centralizadora é a desatenção dos professores quanto a essa questão de limites e obstáculos epistemológicos, contentando-se em determinar para o aluno aonde ele deve chegar, como se pudesse simplificar a aprendizagem deles transportando a linearidade de seus planejamentos de ensino para os modos de operar dos estudantes.[2] Com esse direcionamento, o professor procura olhar para o que "falta" para o aluno atingir o que propõe, o que é "correto", esquecendo que o aluno opera por seus próprios modos e, que pode até estar em outro lugar.

Um outro tipo de postura, que também encontramos em nossa pesquisa de campo, é a que da ênfase à produção do aluno, e à sua verbalização, permitindo realçar que: *todo conhecimento depende de um sujeito e de uma enunciação.* Portanto, uma vez presente certa crença-afirmação, que tenha justificativa num CS compartilhado pelo interlocutor, pode passar a existir um diálogo formativo (diálogo quando os CS relevantes estão sendo "compartilhados" pelos sujeitos) que direcione a produção dos objetos matemáticos.

Nesse caso, o sincronismo existente no diálogo aumenta a possibilidade de compreensão mútua, embora não impeça a divergência na constituição dos conhecimentos, quer seja por disparidade na ocorrência da sua formação, por sofrerem outras interferências cognitivas ou psicológicas, quer seja por integração e mudança de relevância de algum CS.

A prática de sala de aula tem demonstrado (dentro de nossa pesquisa de campo) que a divisão da turma em pequenos grupos de alunos, para desenvolvimento de atividades conjuntas (como por exemplo: trabalho em resolução de problemas e investigações matemáticas) parece facilitar a comunicação e compartilhamento dos "conceitos, significados, técnicas e outros valores

[2] A respeito de abordagens didáticas que olham pela "falta", encontramos referências em Lins (1997, p. 103-104 e 138).

matemáticos" entre os estudantes. Ao mesmo tempo, portanto, deixa transparecer mais ao professor a constituição dos significados e dos conhecimentos.

Isso não faz do professor somente um observador, mas ao contrário, atribui à sua interferência uma maior importância nas negociações com os estudantes na constituição de novos núcleos em relação aos quais eles devem operar dentro de uma legitimidade conferida pelo professor _ em seu papel de autoridade e interlocutor.[3]

7.3 QUANTO AO MTCS

Se mostrou adequado não só ao estudo histórico epistemológico como para entendermos a parte epistemológica da produção de significados, objetos e conhecimentos pelo sujeito.

Nossas preocupações, em ter esse modelo como base, dizem respeito ao perigo que uma enfatização excessiva em um foco epistemológico pode provocar em termos de um desligamento de outros fatores psicológicos também importantes nas produções dos alunos durante suas atividades.

Devemos pois atentar para não "recortarmos" o aluno do quadro geral de seu processo de aprendizagem, ao tentar entendê-lo via produções de significados e conhecimentos por este modelo (e por qualquer outra teoria do conhecimento que, como essa, leve em consideração o psicológico do sujeito como uma união intrínsecamente inseparável dos fatores cognitivos e afetivos, mas deixe de se mostrar enquanto relacionada à esse afetivo).

Esse tipo de preocupação é realçada no contexto de sala de aula, ao nos depararmos e observarmos o aluno, como um sujeito não só do conhecimento.

[3] Cf. LINS (1997, p.131).

7.4 ALGUNS DIRECIONAMENTOS E INDICATIVOS

- Como a produção de significados é cognitivamente dinâmica, devemos atentar para as mudanças e relações entre CS. Cuidar dessa diversidade é ao menos um passo na intenção de se buscar estar dialogando com o aluno nos mesmos CS e ser um interlocutor compreendido ou ter no aluno um interlocutor.

- As diversificações encontradas na função semântica da linguagem matemática em diferentes textos, juntamente com a diversidade de significados que então se produz a partir deles, reforça a importância de dedicarmos uma maior atenção à enunciação na qual são produzidos os significados para o texto lido.

- Observamos que objetos da matemática, que estão ligados mais intrinsecamente aos objetos do Cálculo, são concebidos em meio de diferentes demandas; com os alunos tendo outros interlocutores além de possivelmente o professor.

- A fala é uma construção social, cuja demanda provém de um interlocutor e carrega significados através da linguagem. Portanto é primordial na aprendizagem dar maior importância à *fala* dos alunos se queremos analisar como e o quê estão aprendendo.

- As metodologias de ensino que se impõem como necessárias à aprendizagem e conseqüentemente influentes na produção de significados matemáticos no início do 3º grau, devem privilegiar e preocupar-se com as atividades em grupos (socialização dos significados, diálogos e críticas), as diferentes interpretações de textos, narrativas, e outras, onde o papel central é do aluno, e não do professor.

BIBLIOGRAFIA

AABOE, A. ***Episódios da História Antiga da Matemática***. Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ABBAGNANO, N. ***Diccionario de Filosofia***. 13 ed. Traduzido por Alfredo N. Galletti. México: Fondo de CulturaEconómica, 1996. Tradução de: Dizionario di Filosofia.

ALCOBA, M.L. ***La ley de continuidad en G. W. Leibniz***. Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996.

ALEKSANDROV, A.D. et al. ***La Matemática: su contenido, métodos y significado***. 7 ed. Tradução de Manuel López Rodríguez. Madrid: Alianza Universidad, 1988.

ANGELO, C.L., CASSOL, A., SAD, L., SILVA, M.R.G. *Uma Análise do Teorema Fundamental do Cálculo em alguns livros-texto*. ***Quadrante: Revista teórica e de investigação***. V. 4. Lisboa: APM, 1995.

ÁVILA, J. S. S. ***Cálculo Diferencial e Integral***. Brasília: Livros Técnicos e Científicos, 1978. 3 v.

AYER, A.J. ***The problem of knowledge***. UK: Penguin Books, 1986.

BACHELARD, G. ***Epistemologia***. 2 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1983.

___ ***A Epistemologia***. Rio de Janeiro: Edições 70, 1971.

___ ***A formação do espírito científico***. Traduzido por Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. Tradução de: La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance.

BAKHTIN, M. ***Marxismo e Filosofia da Linguagem***. 6.ed. Traduzido por Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira. São Paulo:Hucitec, 1995.

BALDINO, R.R..*A interdisciplinaridade da Educação Matemática*. ***Didática***, São Paulo:UNESP, v.26/27, p.129-131, 1991.

___*Object of knowledge and object of desire in a cooperative learning calculus course*. São Paulo: UNESP-Rio Claro, Relatório Interno do Dep. de Matemática, 1993b.

___*Ensino Remedial e Recuperação Paralela*. São Paulo: UNESP-Rio Claro, SMEM nº 45, 1993 c.

___*Cálculo Infinitsimal: passado ou futuro?* ***Temas , Debates*** , nº 6. SBEM, 1995a.

___*Como integrar disciplinas sob o ponto de vista epistemológico*. Águas de Lindóia. Mimeo, apresentado no I Encontro Setorial dos Cursos de Graduação da UNESP, 1995b.

BALDINO, R. R., CABRAL, T.C.B. , BARBOSA, V.M.. *A survey of Solidarity Assimilation Groups*. ***Anais do 7th International Congress on Mathematical Education*** (ICM-7). Canadá, 1991.

BALDINO, R. R., SAD, L..A., , TEIXEIRA, M.V.. ***Cauchy and the problem of pont-wise convergence***. Liège: Anais do XXth International Congress of History of Science, 1994.

BALDINO, R. R., et al. *Sobre o papel do conceito de limite no primeiro curso de Cálculo*. ***Anais do IV EPEM***. São Paulo, 1996.

BARON, M.E ***History of mathematics : origins and development of the calculus***. Traduzido por José Raimundo B. Coelho, Rudolf Maier e Mª José M. M. Mendes.Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BATTRO, A.M. ***Dicionário Terminológico de Jean Piaget***. São Paulo: Livraria Pioneira, 1978.

BICUDO, I. *Análise não-standard*. ***Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)***, n. 8, p. 60-67, 1992.

BICUDO, M.A.V. , ESPÓSITO, V.H.C.(orgs.). ***Joel Martins...um seminário avançado em fenomenologia***. São Paulo: EDUC (Ed. da Pontífice Univ. Católica - PUC-SP),1997.

BOCHENSKI, I. M.. ***A Filosifia Contemporânea Ocidental***. São Paulo: Ed. Pedagógica e Universitária (EPU) e Ed. da Universidade de São Paulo (EDUSP), 1975.

BOTTAZINI, U. ***The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass***. Traduzido por Warren V. Egmond. New York: Spring-Verlag, 1986.

BOURBAKI, N. ***Elementos de História de las Matemáticas***. Traduzido por Jesús Hernández. 2.ed. Madrid: Alianza Editorial, 1976.

BOYER, C.B. ***The History of the Calculus and its Conceptual Development***. New York: Dover Publications, 1959.

___ ***História da Matemática***. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRAIT, B. (organizadora). ***Bakhtin, dialogismo e construção do sentido***. São Paulo: Editora da UNICAMP, 1997.

BRANDÃO, C.R. ***Pesquisa Participante***. São Paulo: Brasiliense, 1988.

BRUNER, J. ***Actual minds, possible worlds***. Cambridge: Havard University Press, 1986.

BRUNER, J. ***Realidade Mental, Mundos Possíveis***. Traduzido por Marcos A.G. Domingues. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997a.

___ ***Atos de Significação***. Traduzido por Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas,1997b.

BROUSSEAU, G., OTTE, M. *The fragility of knowledge* .***Mathematical knowledge: Its growth through teaching.*** Editado por Bishop, A.J., Mellin-Olsen, S. , van Dormolen, J..*The fragility of knowledge*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., p. 13-36, 1991.

BUYSSENS, E. ***Semiologia Comunicação , Linguística.*** São Paulo: Cultrix, 1974.

CABRAL, T.C.B. ***Vicissitudes da aprendizagem em um curso de Cálculo***. Dissertação de Mestrado. São Paulo: UNESP-Rio Claro, 1883.

___***Teorias epistemológicas e algumas implicações pedagógicas.***Trabalho apresentado na USP (mímeo). São Paulo, 1994.

CAJORI, F. ***A History of Mathematical Notations.*** 2.ed. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1930.

___ ***A História of Mathematics***. New York: The Macmillan Company, 1950.

CASSOL, A.. ***Produção de significados para a derivada***. Dissertação de Mestrado apresentada na Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Rio Claro, 1997.

CAUCHY, A. L. ***Résumé des leçons sur le Calcul Infinitésimal*** [*Summary of Lectures given at the École Polytéquinque about infinitesimal Calculus*]. Paris: Ellipses, 1823.

___*Cauchy's inauguration of mathematical analysis,* ***1820-1827***. Tradução de Ivor Grattan-Guinnes. ***Science networks historical studies***, v. 3, 1990.

CLEAVE, J. P. *Cauchy, convergence and continuity*. ***Brit. Sci.***, n. 22, p.27-37, 1971.

COLLEL, A. E.. *La intuición y el concepto de límite*. ***Educación Matemática***, v.6, nº 2, p.30-44, 1994.

CONFREY, J., SMITH, E. ***Applying an epistemology of multiple representations to historical analysis: a review of "Democratizing Acess to Calculus: new routes to old roots"***. (Mímeo)

CORNU, B. ***Aprentissage de la notion de limite: conceptions et obstaculos.*** Tese de Doutorado apresentada em L'Universite Scientifique et Mdicale de Grenoble, 1983.

CHISHOLM, R.M. ***Theory of Knowledge***. 3 ed.New Jersey: Prentice-Hall International, 1989.

DAMEROW, P.. ***Abstraction and Representation: essays on the cultural evolution of thinking***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1986.

DEL NERO, H. S. ***O sítio da mente***. São Paulo: Collegium Cognitio, 1997.

DAVIS, P. J., HERSH, R. ***A experiência Matemática***. Lisboa: Gradiva, 1995.

DAVIS, R. B.. *The interplay of Algebra, Geometry and Logic*. ***The Journal of Mathematical Behavior***, v. 7, 1988.

DAVIS, R. B. , VINNER, S.. *The notion of limit: Some seemingly unavoidablemisconception stages*. ***The Journal of Mathematical Behavior***, v. 5, p. 281-303, 1986.

DESCARTES, R. ***Discurso do Método***. Traduzido por João Gama. Lisboa: Edições 70, 1993.

DIEUDONNÉ, J. ***Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui***. Paris:Hacette/Pluriel, 1987.

DIJKSTERHUIS, E. J. ***Archimedes***. Traduzido por C. Diksboorn. New Jersey: Priceton university Press, 1987.

DÖRFLER, W. *Forms and means of generalization in Mathematics*. ***Mathematical knowledge: Its growth through teaching.*** Editado por Bishop, A.J., Mellin-Olsen, S. , van Dormolen, J..*The fragility of knowledge*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., p. 13-36, 1991.

ECO, U. ***Interpretação e Superinterpretação***. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

EHRLICH, P. et al. ***Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua***. Dordrech: Kluwer Acad. Publ., 1994.

EL *Cálculo infinitesimal: Leibniz / Newton*. **Biblioteca Cultural Los Fundamentales**. Buenos Aires: EUDEBA - Universitaria de Buenos Aires, 1977.

EVES, H. ***Introdução à História da Matemática***. Campinas: Unicamp, 1995.

FAUVEL, J. , GRAY, J. ***The History of Mathematics: A Reader***. New York: The Open University, 1987.

FERREIRA, A. B. de H., ***Dicionário Aurélio Básico da Língua Portuguesa***. Rio de Janeiro:Nova Fronteira, 1994.

FERRI, M. G. et al. ***Introdução aos Estruturalismos***. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1972.

FOULCAULT, M.. ***A ordem do discurso***. São Paulo: Edições Loyola. 1996

___ ***As palavras e as coisas***. São Paulo: Martins Fontes, 1995a.

___ ***Microfísica do Poder***. 11ª ed. Traduzido por Roberto Machado. Rio de Janeiro: Graal, 1995b.

FOUREZ, G..***A construção das ciências***. São Paulo: Editora UNESP, 1995.

GARNIER, C., BEDNARZ, N. , ULANOVSKAYA, I.. ***Après Vygotski et Piaget***. Bruxelles: De Boeck, 1991.

GIAQUINTO, M.. *Epistemology of visual thinking in elementary real analysis*. ***British Society for Philosophy of Science***, v. 45, p.789-813, 1994.

GILLIES, D.. ***Revolutions in Mathematics***. New York: Oxford Science Publications, 1995.

GODINO, J. D. , BATANERO, M.C.. *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. ***Recherches en didactique des Mathématiques***, v. 14, nº 3, p.325-255, 1994.

GOODMAN, N. ***Of Mind and Other Matters***. Cambridge: Havard University Press, 1984.

GOLDMAN, A. I. ***Epistemology and cognition***. England: Harvard University Press, 1986.

GRAY, E. M. , TALL, D. O.. *Duality, Ambiguity and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic.* ***Journal for Research in Mathematics Education***, v. 25, nº 2, p. 116-140, 1994.

HAGUETTE, T. M. F. .***Metodologias qualitativas na sociologia***. Petrópolis: Vozes, 1990.

HARNIK, V.. *Infinitesimals from Leibniz to Robinson: Time to Bring Them Back to School.* ***The Mathematical Intelligencer***. v.8, nº2, p.41-47. New York: Springer-Verlag, 1986.

HART, L. E. *Life historymethods in the study of tacher change and reform in mathematics education.* In: ***Mathematics Education Conference***, Blacksburg, Virginia,1991.

HEATH, T. L. ***The Thirteen Books of Euclid's Elements***. New York: Dover, 1956 (republicação da 2ª ed. , Cambridge University Press, 1926).

HESSEN, J. ***Teoria do Conhecimento***. 8ªed. Traduzido por António Correia. Portugal: Coimbra. Traduzido de *Erkenntnistheorie*, 1987.

HOFFMANN, L. D. ***Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações***. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos - LTC, 1982.

JAPIASSU, H. , MARCONDES, D. ***Dicionário Básico de Filosofia***. 2 ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.

KATZ, V. J.***A History of Mathematics:*** *an introduction*. New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

KLINE, M. ***Mathematical Thought: from ancient to modern times***. New York: Oxford University Press,1990. v.1,2,3.

KUHN, T. S. ***La estructura de las revoluciones científicas***. Madrid: Fondo de Cultura Económica de España, 1975.

LAKATOS, I.. *Cauchy and the Continuum: The Significance of Non-standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics.* ***The Mathematical Intelligencer***, v.1, nº3, p.151-161. New York: Springer-Verlag, 1978.

___ ***Mathemáticas, ciencia y epistemología***. Madri: Alianza, 1987.

LEFEBVRE, H. ***Lógica Formal/Lógica Dialética***. Rio de Janeiro:Civilização Brasileira, 1991.

LEGRAND, G. ***Os Pré-Socráticos***. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.

LEIBNITZ, G. W. ***Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal***. 6 ed. Traduzido por Jean Peyroux. Paris: Librairie A. Blanchard, 1983.

___. ***La naissance du calcul différentiel***. Traduzido por Marc Parmentier. Paris: Librarie Philosophique J. Vrin, 1989.

___ ***Discurso de Metafisica***. Traduzido por Adelino Cardoso. Lisboa: Colibri, 1995.

LEITHOLD, L. ***O Cálculo com Geometria Analitica***. São Paulo: Rarper & Row do Brasil, 1982. 2 v.

___ ***Matemática Aplicada à Economia e Administração***. São Paulo: Harbra, 1988.

LEONTIEV, A. ***O desenvolvimento do psiquismo***. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LINS, R.C. ***A framework for understanding what algebraic thinking is.*** PhD Thesis. Inglaterra: University of Nottingham, 1992.

___*Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa.* ***Revista da SBEM-SP,*** nº 1. São Paulo, 1993.

___*O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico.* ***Revista Dynamis***, v.1, nº 7. Blumenau: FURB, 1994.

___*Struggling for survival: the producition of meaning.* **Anais do BSRLM** Meeting Sheffild, 1996.

___***The production of Meaning for Algebra: a perspective based on a Theorical Model of Semantic Fields.*** (mímeo). São Paulo, 1997a.

LINS, R.C. , GIMENEZ, J.. ***Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.*** São Paulo: Papirus, 1997.

LÜDKE, M. , ANDRÉ, M.E.D.A..***Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.*** São Paulo: EPU (Editora Pedagógica e Universitária), 1986.

LURIA, A.R. ***A construção social da mente.*** São Paulo: Ícone, 1992.

___ ***Pensamento e Linguagem: as últimas conferências de Luria.*** Traduzido por Diana M.Lichtenstein. Porto Alegre: Artes Médicas, 1987.

MACHADO, N.J. ***Epistemologia e Didática.*** São Paulo: Cortez, 1995.

MARTINS, J. , BICUDO, M.A.V.. ***A pesquisa qualitativa em psicologia. Fundamentos e recursos básicos.*** São Paulo: Edcu/Moraes, 1989.

MORA, J.F. ***Dicionário de Filosofia.*** 2 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

MORATO, E.M. , COLDRY, M.I.H. *Processos enunciativos-discursivos e patologia da linguagem: algumas questões lingüítico-cognitivas.* In: PINO, A., GÓES, M.C. (Org.). ***Cadernos Cedes.*** Campinas: Papirus, 1991. p. 66-78.

NERO, H.S. Del. ***O Sítio da Mente.*** São Paulo: Collegium Cognitio, 1997

NEWTON, I. ***Principia.*** Traduzido por Andrew Motte, 1729. 2 ed. Revisada por Florian Cajori. Berkeley: University of California Press, 1962. 2v.

OLIVEIRA, T.A. ***Análise não-Standard: uma apologia ao seu ensino.*** Dissertação de Mestrado. São Paulo: UNESP-Rio Claro, 1993.

OTTE, M. ***O Formal, o Social e o Subjetivo:uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática.*** São Paulo:UNESP, 1993.

OUTHWAITE, W. , BOTTOMORE, T. et. al.. ***Dicionário do Pensamento Social do século XX***. rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1996. Editoria da versão brasileira: Renato Lessa e Wanderley Guilherme dos Santos.

PÂNDU, P. ***Dicionário Global da Língua Portuguesa.*** Rio de Janeiro: Renovada Livros Culturais, 1985.

PEIRCE, C.S.. ***Vida e Obra***. Seleção de Armando Mora D'Oliveira. São Paulo: Abril Cultural, *1980*.

PÉTER, R. ***Jeux avec l'infini: voyage à travers les mathématiques***. Paris:Éditions du Seuil, 1977.

PIAGET, J..***Lógica e Conhecimento Científico***, v.1 e v.2. Porto: Livraria Civilização, 1980.

___***Epistemologia genética***. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

___ ***Psicologia e Epistemologia***. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

___***A equilibração das estruturas cognitivas***. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

___ ***Problemas de psicologia genética***. Traduzido por Nathanael C. Caixeiro. São Paulo: Abril S.A. Cultural e Industrial, 1978.

PINO, A.. *Pensamento e Linguagem: estudos na perspectiva da psicologia soviética*. ***Cadernos Cedes***, nº 24, p.39. Campinas: Papirus, 1991.

PINTO, A.V. ***Ciência e Existência***. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1969.

PLATÃO, ***A República***. 7 ed. Traduzido por Maria Helena da Rocha Pereira. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1993. Tradução do texto grego: ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΠΟΛΙΤΕΙΑ.

POLETTINI, A. F.F. ***Teachers' percepcions of change:*** *an examination of mathematics teaching life histories*, 1995. Tese de Doutorado _ University of Georgia.

PRADO JR., C. ***Notas Introdutórias à Lógica Dialética***. 2 ed. São Paulo: Brasiliense, 1961.

___ ***Dialética do Conhecimento***. 2 ed. São Paulo: Brasiliense, 1980.

RAEPER, W. , SMITH, L. ***Introdução ao Estudo das Idéias***. São Paulo: Loyola, 1997.

REZENDE, W.M. ***Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite***. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: USU, 1994.

SCHMITTAU, J.. *Vygotskian Scientific Concepts: implicacions for Mathematics Education*. ***Focus on Learning Problems in Mathematics***, v.15, nº 2,3. New York: Spring , Summer, 1993.

SCHNEIDER, M.. *A propos de l'apprentissage du taux de variation instantane*. ***Educational Studies in Mathematics***, v. 23, nº 4, p.317-350, 1992.

SERRES, M. ***Elementos para uma História das Ciências***. Lisboa: Terramar. v. 1 e 2, 1994.

SIERPINSKA, A. *Humanities students and Epistemological Obstacles related to Limits*. ***Educational Studies in Mathematics***, v. 18, p. 371-397, 1987.

___ *Some remarks on understanding in mathematics, for the learning of mathematics*. ***Recherches en Didactique des Mathématiques***, v.10, nº 3, p.24-36, 1990.

SILVA, M. R. G. da. ***Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática.*** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista - UNESP, Rio Claro, 1993.

SIMMONS, G. F. ***Cálculo com Geometria Analítica.*** São paulo: Mac Graw-Hill, 1987. 2 v.

STROYAN , LUXEMBURG. ***Introduction to the theory of infinitesimals***. New York: Academic Press, 1976.

STRUIK, D. J. ***História concisa das Matemáticas***. Lisboa: Gradiva, 1989.

SWOKOWSKI, E. ***Cálculo com geometria analítica***. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1983. 2v.

TALL, D. ***Advanced Mathematical Thinking***. London: kluwer Academic Publishers,1991.

___ *Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes*. ***Mathematial Gazette***, v. 64, p. 22-49, 1980a.

___ *The notin of infinite masuring numbers and its relevance in the intuition of infinity*. ***Educational Studies in Mathematics***, v.11, p.271-174, 1980b

___***Mathematical intuition, with special reference to limiting process***. Paper apresentado na conferência do IGPME. Berkeley, 1980c

___***Intuitive infinitesimal in the calculus***. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick. UK, 1981.

TALL , VINNER.. *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*. ***Educational Studies in Mathematics***,v. 12, p.151-169, 1981.

TAYLOR, L.. *Vygotskian influences in Mathematics Education, with particular reference to attitude development*. ***Focus on Learning Problems in Mathematics***. v.15, nº 2,3. New York: Spring, Summer, 1993.

THIOLLENT, M. ***Metodologia da Pesquisa-Ação***. 6 ed. São Paulo: Cortez, 1994.

THUILLIER, P. ***De Arquimedes a Einstein***. Rio de Janeiro: Zahar, 1994.

URBANEJA, P.M.G. ***Las raices del cálculo infinitesimal en el siglo XVII***. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

VAZ, H.C.L. ***Escritos de filosofia III. Filosofia e Cultura.*** São Paulo: Loyola, 1997.

VERÓN, E. ***A produção de sentido***. São Paulo: Cultrix, 1980.

VUYK, R. ***Panorámica y crítica de la epistemologia genética de Piaget***. Madrid: Alianza Edfitorial, 1984.

VYGOTSKY, L.S. ***A Formação social da mente***. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

___ ***Obras escogidas***. Madrid: Visor Distribuiciones, 1991a. 3 volumes.

___ ***Cadernos Cedes 24***. São Paulo:Papirus. *Pensamento e Linguagem*, 1991

___ ***Pensamento e Linguagem***. Traduzido por J.L.Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

VYGOTSKY, LURIA , LEONTIEV. ***Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem***. São Paulo: Ícone, 1992.

WALKERDINE, V. ***The mastery of reason***. New York: Routledge, 1988.

WERTSCH, J.V. ***Vygotsky y la formación social de la mente***. Barcelona: Ediciones Paidós, 1988.

___ ***Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives***. New York: Cambridge University Press, 1988.

WILLIAMS, S.R.. *Models of limit held by college Calculus students*. ***Journal for Research in Mathematical Education***, 22, 219-236, 1991.

ANEXO 1

ENTREVISTAS INDIVIDUAIS

Nas transcrições das entrevistas individuais devemos observar que fizemos alguns pequenos cortes somente de trechos nos quais as falas nos pareceu supérflua a esta pesquisa.

Lembramos que: a divisão em partes foi feita posteriormente durante a transcrição das entrevistas para facilitar as referências durante as análises, os parênteses, (...), indicam que houve corte na transcrição e os comentários entre colchetes são nossos.

Entrevista (nº 1) (transcrição de gravação "audio")

Aluna de graduação em Matemática

O _ Entrevistadora (pesquisadora)
Tan _ Aluna entrevistada

[Em uma conversa quotidiana, anterior a essa entrevista, a aluna Tan surgiu com o assunto a respeito das disciplinas de Cálculo que havia cursado pela Engenharia e pela Matemática (mais de uma vez). Desde o início, espontaneamente referiu-se às diferenciações que vivenciou nessas disciplinas, como se não devessem ter existido].

(1ª Parte)

O _ Essa aluna se propôs a me dizer um pouco das diferenças que ela vê nos cursos em relação ao Cálculo, embora seja a mesma disciplina nos dois cursos que ela fez. Não é isso?

Tan _ Hum-hum! Então...as diferenças que eu...

O _ Ou as semelhanças, né!?

Tan _ Não. No fundo a única semelhança que eu vi foi na tabela, a tabelinha de derivadas e integrais, que são iguais. porque o jeito de ver é totalmente diferente, não tem nada a ver. Tanto é que quando cheguei aqui, que eu vi que o professor ["fulano", diz o nome] falava que eu só queria derivar usando as regras que eu já sabia. Que eu não sabia a definição, não entendia e não queria entender a definição.

[...]

E que...eu tinha aprendido na Engenharia, no Cálculo I também, só derivar, usar regras.

O _ Os algoritmos.

Tan _ Só os algoritmos de derivada. Então foi uma batalha...Assim como para uma outra colega que estudava comigo na Matemática e que também vinha da Engenharia. Ela também igualzinha...não queria aceitar isso...Para que a gente precisa saber essas definições se a gente já sabia os resultados? Eu sabia os resultados de cabeça, sem fazer nada daquilo.

O _ As definições de que você fala...por exemplo a definição de derivada...

Tan _ É, de derivada, Regra da Cadeia...derivada de seno, cosseno...todas essas coisas, então ele queria que a gente fizesse por limites. E a gente nunca tinha visto limite. na Engenharia a gente não estudou nada de limites, era só derivada e integral. Até o livro que a gente usou era aquele do...(?) .Então a gente pegava as listas imensas de exercício, fazia tudo...e...estava apta prá...

(2ª Parte)

O _ E quando vocês seguiam na parte de continuidade de função, por exemplo, o que vocês usavam?

Tan _ Prá ser sincera, eu nem lembro se a gente usava continuidade...Porque prá eles, na engenharia, bem visto que não terminei o curso, mas prá eles o importante era você saber derivar e integrar, saber usar as regras de derivação.

O _ Então o que você usava era a derivação e integração através das regras e dos métodos?!

Tan _ Só isso. Acho que a gente até estudava inclinação, ponto de máximo e mínimo...mas para resolver usávamos as regras. Mas também se o exercício mudava um pouquinho... ninguém conseguia fazer mais nada. Eu não conseguia mais...Se tinha uma coisa um pouquinho diferente a gente não conseguia mais ligar com a regra.

O _ E aí quando você chegou na Matemática...

Tan _ Ah!! Na Matemática eu penei! Porque eu não queria aceitar aquilo. Por que que eu tenho que ficar entendendo fazer por limite, por isso, se eu sei já derivar e integrar?

O _ E quando você via por limite, o que você sentia que era diferente?

Tan _ Sentia que era mais difícil, que era uma coisa que eu nunca tinha visto, que eu não queria!

O _ O que você não tinha visto?

Tan _ Limite! Eu não tinha visto limite na Engenharia. E aí ele falava: isto aqui é o ponto no qual o coeficiente angular da reta tangente... explicava o que é...e falava o que era derivada. Então prá mim derivada eu já sabia. Isso eu entendia. Só que eu não entendia a relação disso com inclinação de reta...não sei o quê... E isso era diferente e eu não aceitava. Porque eu falava: eu não sei fazer isso, eu não sei trabalhar com limite. É uma coisa nova prá mim. Mas eu sei trabalhar com derivada, então o caminho mais fácil era ir direto prá derivar.

...Então o professor dava lá... queria derivada por limite...*Eu pegava, derivada pelas regras que eu sabia e ia embora...Aí ele que...[faz gestos negativos]*

O _ Quer dizer, aqueles objetos que você devia constituir através de limite e usar a declividade da reta..., você se recusava.

Tan _ Me recusava porque achava que derivada no outro [curso] eu já aprendi. E aí quando começou...eu me lembro bem, aqui a gente começou com integral. E quando eu estudei na FEI, eu comecei com derivada. Como nos outros cursos depois, de Cálculo que eu vi, sempre começam por derivada. Então eu já sabia que integral quer dizer a área ...E ele fazia agora tudo por definição... de retângulozinhos, num sei o quê...num sei que lá...E eu sabia que a inversa era a derivada. Então eu já invertia tudo. Fazia um rolo disso daí. Usava as regras para integrar e derivava o resultado para ver se dava a mesma coisa. E enrolava tudo. E não aprendia o que ele queria que eu aprendesse, que era por definição...

(3ª Parte)

O _ Então você acha que embora o conteúdo [programático] das disciplinas fossem os mesmos, você vê como coisas diferentes.

Tan _ Totalmente diferentes. Os objetivos delas são diferentes. O da Engenharia não é você aprender derivada por definição...integrais também. É você aprender a usar a técnica. Só isso. Em tudo, mesmo na disciplina de Física, na Engenharia é diferente.

O _ Como assim?

Tan _ Porque na Física a gente tinha que resolver as coisas por derivada, pela integral, de cabeça. E aqui não. E agora que faço o último ano de matemática, percebo que daquele modo se fica muito "bitolado".

O _ E...quando você fez o curso de Cálculo da Matemática, que você viu derivada por limite, você acha que compreendeu melhor derivada? Ou não compreendeu? Acha que deve ser mesmo através dos algoritmos (regras)? Ou você acha que não é o suficiente?

Tan _ Eu acho que você entender o que é a derivada, isso é melhor do que saber algoritmo. Porque então você resolve qualquer um sabendo alguns poucos. Agora que eu vejo. Se eu sei por exemplo alguns..., mesmo se eu esquecer outros, eu sei como fazer. E mesmo posso, se esquecer derivada, pensar como fazer pela reta tangente e reconstruo todo o processo, e faço.

O _ Mas o algoritmo ajuda?

Tan _ O algoritmo ajuda, mas se você tiver ele na cabeça. Agora, sem ter o algoritmo na cabeça, se você entende o que é derivada..., inclinação de reta tangente..., você produz e faz. E se vira. Agora...decorando não é a mesma coisa, porque decorar..."empaca".

O _ Quando você viu na Matemática, além de ver por limite, você viu alguma coisa por infinitésimos? Não?!

Tan _ Ah!! Então o Cálculo que eu fiz na Matemática, foi tudo por Δx, por partições...por dx..., *você vai dividindo ao máximo, coisas assim*...[gesticula com dois dedos bem próximos, encostados].

O _ Essas coisas, esses objetos você não tinha constituído no curso de Engenharia?

Tan _ Não. *Por isso foi difícil! Eu não entendia porque tinha que fazer umas "coisinhas" tão* difíceis, achando que já sabia muita coisa, porque que eu tinha que ir pelo mais difícil se eu sabia mais fácil? Essa foi a luta. Com o professor eu consegui...é... ver que eu preciso saber isso. Que não é porque eu sei a regra...

O _ Que é um outro modo de pensar, mas que é necessário...

Tan _ É. Que é necessário, mas é muito difícil para quem está entrando na Faculdade! Ainda mais como eu, que já tinha uma colega na mesma situação para dar as mãos.

O _ Cálculo, que eu sei, é outro!

[Risos!]

Tan _ É. Esse professor não é de Cálculo! Ele é louco! Não é de Cálculo, não é isso, por que ele está querendo me falar diferente? Aí foi uma briga!

O _ E, como que na Engenharia o professor passava por essas coisas [mostro no livro *definições de derivada pelo limite do quociente de Newton e definição de função contínua*], *por essas definições?*

[A aluna pega o livro adotado na Engenharia e...mostrando diz:]

Tan _ No início do livro já aparecem regras e fórmulas [constato] para desenvolvimentos algébricos [são regras de potenciação, identidades trigonométricas, notação de intervalos...]

O _ E já aparecem todas as regrinhas prontas, as mais usadas no livro vem em quadradinhos coloridos, explicadinhas.

Tan _ Hum-hum.

A gente começou primeiro com uns limites básicos [mostra uma lista com alguns limites de funções, bem elementares] e depois fomos para derivada. Aí dá a definição por limite e já passa para todas as regras prontas.

O _ E aí vocês aplicavam.

Tan _ Aí a gente fazia exercícios. Só que a gente olhava os quadradinhos onde estava o resultado pronto e não usava a definição por limite. Decorava isso [vai ao final do livro e mostra tabelas]. Decorávamos as tabelas no final do livro com as regras de derivadas e integrais. As demonstrações aqui [aponta no livro] a gente não via. Dava o modelo para a gente seguir. Saiu disso... aluno nenhum conseguia fazer!

O _ Obrigada.

XXXXX

Entrevista (nº 2) (transcrição de gravação "audiovisual")

Turma de Cálculo I
60 alunos

O _ Entrevistadora (pesquisadora)
Joi _ Professor entrevistado

(1ª Parte)

O _ A Turma é de que?

Joi _ Matemática.

O _ Número de alunos?

Joi _ Aproximadamente 40 calouros. Freqüentam aproximadamente 60 alunos, porque tem os repetentes.

(...)

Joi _ Nas duas ou três primeiras semanas, a gente faz um trabalho assim mais abrangente, onde ele não vê especificamente cálculo ou geometria...

O _ Seria quase que um pré-Cálculo?

Joi _ Não exatamente um pré-Cálculo... seriam noções fundamentais que ele deveria ter para começar o curso. Por exemplo: noções de sistemas numéricos,... né? Essas noções assim que muitas vezes ficam deficientes.

O _ Você colocaria aí números reais?

Joi _ É ... Mas de uma forma bem intuitiva, né... Começaria com os números naturais, os inteiros, né... os fracionários e os reais, né ...?

(...)

O _ O racional! E o irracional?

Joi _ Há, sim! O irracional nós só dizemos para eles que o número irracional é aquele que, na representação decimal, né? ela não é nem finita, nem periódica. Certo?

O _ Ou seja, que não é um racional?

Joi _ Que não é racional. Exatamente. O número é irracional quando não é racional. [Fala ao mesmo tempo que **O**].

Joi _ O número é racional quando se expressa na forma decimal como decimal finita, ou infinita mas periódica. Né?!... Os números que não têm essa representação você chama de irracional, percebe?!?

O _ E daí você diz que o conjunto dos reais... só sobrou isto, essa união.

Joi _ É... essa união [ao mesmo tempo que **O**]. E aí a gente frisa dando exemplos de alguns: $\sqrt{2}$, → não é racional, né..., $\sqrt{3}$, né? Então, é uma coisa de uma forma bem informal. Você não tá... construindo um corpo...

O _ É... é quase que uma ... circularidade ... né? Pois você pega uma coisa que não conhece que são os irracionais e vai definir uma outra coisa que você não conhece que são os reais... e aí...

Joi _ É ... você parte do princípio que ele aceita a existência...

(...)

Joi _ Inclusive, você mostra que faz isso aí... né? se você representar na reta os racionais então... ela não é coberta por todos os racionais, né... Por exemplo, aí pode construir com régua e compasso, fazer construção geométrica simples... né? e você chega que o $\sqrt{2}$ não é... não é... racional (ao mesmo tempo: **O** _ Racional!) Ele... tem um espacinho na reta numérica reservado para ele, ele não é racional e... ele seguinte... ele vai ser colocado, né... então, ele vai ter uma representação lá na reta numérica. Então, os racionais não cobrem a reta toda.

O _ Então, essa noção... noções fundamentais, incluiriam também funções?

Joi _ Também. Tá certo

(...)

(2ª Parte)

Joi _ Depois a gente entra com um pouquinho de função... Mas coisas bem elementares, dizendo o que é função, tá certo?! Nada de... de... assim... aspecto geométrico, não.

Joi _ Por exemplo, gráfico, nós definimos, nós desenhamos alguns gráficos... mas você não explora, fatos mais assim... mais específicos sobre função.

O _ Tá.

(3ª Parte)

O _ Mas, você encara mesmo com as noções que vocês vão precisar e que são fundamentais prá... pro Cálculo.

Joi _ Certo. Isso aí é bem importante no seguinte sentido: você..., se envolve com os alunos. Eles também formam um grupo bom, porque eles se relacionam bem, porque eles... estão envolvidos o dia todo com aquilo, percebe?! Não é só com... Por exemplo, nos primeiros 3 dias você vai falar sobre função ou sobre sistema numérico, então é só aquilo. Percebe?! Então todos estão falando a mesma linguagem, a mesma coisa. Então cria um relacionamento _ isto é o que percebemos _ bom entre eles. Aliás, eles ficam muito barulhentos.

O _ É normal, eles conversam...

(...)

(4ªParte)

Joi _ Por aqui. Então dentro do Cálculo, agora vou falar da disciplina que estou lecionando, nós já aproveitamos aquela parte de função que nós fizemos naquele primeiro período. Certo?

(...)

Joi _ Funções, eu comecei o curso aí. Então, agora eu vou falar do curso.

O _ Hum-hum.

Joi _ Eles já tiveram aquele primeiro contato naquele primeiro período. Mas, a gente, de fato já fez tudo. Tá certo?! Percebe?! Porque o aluno... É o seguinte... ele aprende por repetição mesmo! Também, né?!

O _ Também!

Joi _ Quer dizer... Você ouve uma vez um conceito, aí você entende... aí na segunda vez você descobre algo mais que você não tinha percebido... A própria definição, às vezes, ela esconde certas coisas que só a vivência faz com que você perceba a força dela. Principalmente na definição de limite, é um caso, né?! Tá certo?! Então, a gente... nós retomamos função desde o comecinho, falando o que era função, o que era gráfico, tudo... Então, aí que começou o curso em si. Claro! aí você vai com uma velocidade um pouco maior, porque nesses conceitos eles já tem uma noção, eles já... já tinham do colégio e, já foi feita alguma coisa aqui dentro, então ele já tá mais... com uma velocidade um pouquinho maior.

O _ Isso. E agora quando você fala dessas funções... você trata das funções polinomiais, algébricas...

Joi _ Aí já começa, então agora aí nós falamos de função e começa... as funções polinomiais que são as mais... mais simpáticas, né?! Tá certo?! E... a gente toma... Aí nesse começo, você... nós... eu pelo menos optei quase que por trabalhar somente com função polinomial.

(...)

O _ Você acha que a idéia de função, ela é... facilmente percebida?

Joi _ Não... Já é um conceito abstrato. Porque esta idéia de correspondência... a gente de algum tempo assimila isso e... a gente repete, né?! E prá aquele que já tá trabalhando um pouco, fica natural. Agora, mas pro aluno, que tá começando, ele vê duas... existem duas... eu vejo, pelo menos eu, duas coisas: a idéia e depois você escrever aquilo, você através de uma linguagem matemática, você traduzir aquela idéia. Até que a idéia como correspondência é uma coisa razoável, e o pessoal... aceita com certa dificuldade.

A dificuldade começa... Eu acho o seguinte... Para o aluno, não é só na idéia do conceito de função, em geral, durante o curso dele todo e, principalmente no começo, é quando ele começa a escrever a... a... expressar numa linguagem matemática a sua idéia. Esse eu acho que é o problema crucial.

(...)

O _ Por exemplo: se tem um texto escrito onde está falando em função, ele tirar...

Joi _ Resumir aquilo em uma linguagem matemática.

O _ Uma linguagem. Isso é difícil prá ele.

Joi _ *É difícil. Por exemplo,* eu fiz questão, no começo do curso... considere a função que a cada número associa o seu dobro. Expresse isso numa linguagem matemática. Simbólicamente. Até prá ele exercitar um pouquinho isso, porque já é uma dificuldade que ele tem. Certo?!

(...)

O _ E você acha que esta dificuldade um pouco reside no fato dele não saber separar o que é variável... o que é constante.

Joi _ Não. Eu acho que... Não sei, eu sou leigo. Eu acho que é próprio da linguagem, da linguagem matemática. Quando você traduz uma idéia de uma linguagem para outra... existe esta transposição, essa passagem, né?! Ela cria uma dificuldade. Maior prá um, menor prá outro, mas sempre existe.

(...)

(5ªParte)

O _ Depois das funções quais seriam os próximos passos?

(...)

Joi _ Depois de funções se vê limite... aí é uma idéia de limite, aí eu comecei a fugir um pouco do livro, porque...

(...)

O _ Você fez nesta ordem? continuidade, limite?

Joi _ Não. Não. Primeiro limite, depois continuidade.

(...)

O _ Aí você passou para derivada?

Joi _ Certo, derivada. Só que é o seguinte... é...

Joi _ Em derivada, 1º semestre vou terminar derivada. Se eu terminar derivada vou estar feliz e tranqüilo.

O _ É... essa seqüência você estabeleceu porque você acha que ela é melhor?... ou você vê alguma vantagem?

Joi _ É uma opção. Eu não sei... eu acho assim natural, desde que tudo é limite, né?!, se você pensar em continuidade, é um processo de limite, integral é um processo também de limite, como a gente encara no Cálculo, né?! A integral como limites de somas... soma superior, soma inferior, isso vai ver mais prá frente. Então desde que tudo... se reduz a limite, então eu falei: bom..., acho melhor a gente começar por aqui. E, eu sempre opto por essa seqüência. Falar de limite e, aí sim... só que, abrindo um parênteses aqui, como você fez referência ao livro, eu não... eu não dei limite por definição. Tá certo?!

Eu usei a idéia de limite..., de maneira intuitiva, percebe?! Né?! Então as propriedades saíram de forma intuitiva também...

O _ E como que você iniciou esse assunto: limite? Como que você... iniciou pro aluno?

Joi _ Olha...

O _ Você colocou um gráfico...? Como que você iniciou?

Joi _ Foi mais ou menos por aí. Eu achei... ahhh... como eles já tinham trabalhado bastante com gráfico, gráfico até da hipérbole que nós fizemos, da parábola... Então, não foi difícil, a gente... eles já, olhando no gráfico, eles perceberem a idéia de aproximação, a idéia de limite, quando x se aproxima... próximo de a (creio que de f(a)). Então foi por aí, exatamente por aí. Uma idéia de... explorando geometricamente. Eu achei... eu achei mais razoável por aí.

Joi _ Porque se podia fazer algebricamente, só né?!, pega a função $f(x) = x^2$, então se x... se dá valores a se próximo de 2 e vê o comportamento de f(x). Mas eu achei que gráfico... geometricamente parece que ficou mais... fica... ficou bastante bom prá eles. Eu achei... Eu fiquei satisfeito.

(...)

O _ Geometricamente intuitiva..., daí ele vem prá isso e dá essa definição [apontando a definição formal do livro texto por ε e δ].

Joi _ Mas eu não faço..., eu não fiz a definição. Então, os alunos não sabem a definição de limite por ε e δ. Por enquanto, tá certo?! Eu vou deixar eles trabalharem bastante...

O _ Você mostrou isso aqui no gráfico...?

Joi _ Foi tudo graficamente. Para certas funções, se ela é contínua... eu faria o gráfico... aqui por exemplo,... então, quando x se aproxima do ponto p, veja graficamente você vê que f(x) se aproxima do L. Então foi feito... a idéia de aproximação, foi explorando geometricamente.

O _ Você acha que... quando você diz assim pro aluno: x se aproxima de p então f(x) se aproxima de L, o aluno acompanha bem...

Joi _ Isso foi natural. Foi uma coisa que aconteceu bastante natural... natural... sem dificuldade, né?!

O _ Aí... quer dizer... o limite tem um valor! Você se aproximou tanto que atingiu este valor? Ou como é que é...?

Joi _ Não, não. Aí você... você... a primeira coisa o x aqui, eu fiz questão de dizer, que ele se aproxima do ponto e não necessariamente ele atinge o ponto, até porque a função nem precisa estar definida no ponto p.

(...

O _ Mas, você chega a dizer para o aluno: o limite é isso. Ou seja, o que que é o limite? Como é que você diz sobre limite?

Joi _ O limite, o que é? É um número... o limite o que é? É um número, de modo que a medida em que se aproxima do ponto p o f(x) tem que se aproximar daquele número.

(...)

(6ªParte)

O _ Você fala assim.

Joi _ Escrevemos inclusive. É o único número que envolve o que: se x se aproxima do ponto p, então os valores da função f(x) devem se aproximar daquele número. Quando existir o número... é único, né?! Aí então... o limite é aquele.

O _ E aí quando eles chegam em limite infinito, por exemplo?

Joi _ Não, aí... ahh!... Aí você...

O _ Aí, infinito não é número?!

Joi _ Não, não é número. Aí... essa parte de limites infinitos não não tratamos ainda. A gente tá falando mais em função continua, derivada. Quando eu chegar no esboço gráfico de função, *função definida na reta, ai então eu vou chegar nos limites infinitos*. Quando um ponto t tende para + ∞, também.

Mas, aí você explora... acho que não tem problema também, você pode explorar isso aí dizendo o seguinte: quando x tende para + ∞... observe o comportamento da função, ela pode ...os valores podem se aproximar de um número fixo, tá certo?! De um forma até... graficamente você tira também x... a noção dele, essa idéia.

(...)

Certo. Exatamente, aqui você não precisa dizer qual é a expressão que... como é a função. Mas, pelo aspecto do gráfico, ele é capaz de definir... de discernir se existe ou não limite. Como nesse caso aqui que não tem... isso é perfeitamente...

(...)

(7ª Parte)

(...)

O _ Tá. Então não usa isso aqui (definição formal) você não diz.

Joi _ Não a definição... vou fazer isso no curso, na passagem do primeiro para o segundo semestre.

O _ Você pretende dar essa definição?

Joi _Vou, pretendo. Vou sim.

O _ Você acha que é importante?

Joi _ É... é... é um ponto assim meio traumático, eu acho.

O _ Porque?

(...)

O problema é quando você vai manusear a definição de limite, assim informalmente. Aí que começa a surgir o problema. Dado ε, você tem que achar o δ, de modo que, aquela coisa acontece.

Você quer que acontece aquilo, mas você não tem a informação de quem é o δ, ele está a determinar ainda, a ser determinado, quando se tem um limite, né?! Dado o ε, você tem que achar um δ de modo que aquilo acontece. Então que você faz? Bom, você vai lá na... na... conclusão que você quer, você começa a trabalhar e você vê qual é o δ conveniente.

(...)

Eles falam assim: se $(x - x_0)$ é menor que... (então $(f(x) - L)$ é menor que ε. Então, quem que é o δ? Muitas vezes o que você faz? Você vai lá na conclusão... que você quer tirar...

O _ Aonde se quer chegar...

Joi _ E você trabalha com aquilo, e aí vê qual é o δ conveniente. Para que aquilo aconteça, para que essa afirmativa implique naquela. E muitos falam assim: mas você não está usando a tese? [Risos]

Eu vou fazer no curso até porque a gente não pode fugir. Mais cedo ou mais tarde ele vai se deparar com esta definição, então eu vou fazer isso... eu vou parar uma aula... um tempo, e vou dar uma discutida sobre isso.

Mas... não vou explorar muito não! Não vou fazer isso.

O _ Certo. E, quando você for dar essa definição aqui, como você fala isso aqui, essa definição? Como você fala? Como você fala isso em relação a essa idéia intuitiva de limite a que você chegou?

Joi _ Olha, aí. Bom, eu faria o seguinte. Eu partiria daqui, tá certo? E iria tentando o outro lado, né?! Iria tentar fazer com que ele despertasse para a situação, né?! Aqui, o que significa x estar próximo de p? A distância teria que estar pequena. É diminuir. Então, o que acontece quando x está próximo de p? Então o f(x) deve estar próximo de L.

A forma intuitiva de limite. Estar próximo de L, então é diminuir. Então, para x suficientemente pequeno, então o que que acontece? Pelo gráfico... por isso que eu acho que o gráfico é bom, nesse ponto né?! Para o x suficientemente pequeno..., não. Para o x suficientemente próximo de p, o f(x)..., desde que o limite exista, o f(x) deve estar próximo de L. Estar próximo é estar a distância entre os dois cada vez menor.

O _ Distância você traduz em módulo.

Joi _ Certo, em módulo, exatamente.

(...)

Joi _ Eu não sei se olhando dessa forma... formal até, vamos dizer assim, ele perceberia... ele conseguiria traduzir isto (definição por ε e δ) geometricamente, por isso aqui (interpretação geométrica da definição). E acho que... por isso, eu optei em fazer geometricamente, fazer esse trabalho com limite e aí depois fazer essa passagem (para a definição formal por ε e δ).

(...)

Aí, num momento eu vou fazer um parênteses e vou dar a definição de limite, destacar para eles a definição por ε e δ...

O _ Porque por enquanto você escreveu: limite é um número..., não é isso?

Joi _ O que que é o limite?

(...)

Joi _ Certo. Então quem é o limite? Notação... f(x) quando x se aproxima de a e é o número L, percebe?! Então... aqui, qual é o significado dessa sentença aqui...? Os valores de f(x), eles se aproximam de L, à medida em que x se aproxima de a, e aqui eu friso bastante, x diferente de a.

O _ Tá, tá. E no caso da f contínua?

(...)

Joi _ Uma fun... geometricamente se falar assim... bom... que claro, é uma questão de você também explicar o que se quer entender por continuidade. Tá certo? Então aí a primeira coisa é falar: "nós queremos agora estudar gráficos, funções onde o gráfico ele não tem... ruptura de espécie alguma.

Então para não ter ruptura aí, qual o valor que você deve dar para a função no ponto a, né? Então o valor no ponto a tem que ser o valor L que é o limite dela. Percebeu?!

(...)

(8ª Parte)

O _ E aí, se você disser para ele, por exemplo, eu posso dizer ela é contínua aqui, e aí você fala..., essa função não é contínua porque ela tem um salto e essa daqui tem uma ruptura, mas aí... eu posso dizer, por exemplo, ela é contínua, ela é contínua aqui.

Joi _ Ah! Sim, não, não. Mas aí quando se fala em continuidade, é continuidade no ponto.

O _ No ponto a.

Joi _ No ponto a, é claro!

O _ E limite também?!

(...)

Joi _ Olha, inclusive eu friso bastante durante... vocês observem o seguinte quando nós falamos em continuidade, quando nós falamos em derivada, então você fala que uma função tem derivada, ela é contínua no ponto, tá certo?!

(...)

Então, você define a noção de limite, de continuidade, de derivada, no ponto. É pontual.

(...)

O _ Então, veja bem, a noção de continuidade que o aluno traz de uma linha contínua, ela não bate assim totalmente com a definição que a gente dá de continuidade.

Joi _ Mas, mas quando?

O _ Porque a definição que você dá de continuidade, o aluno enxerga aquilo ali uma linha contínua? Não! Não enxerga.

Joi _ Certo Ali não.

(...)

O _ Pois é, tem que insistir no ponto.

Joi _ No ponto. Claro todas as definições...

O _ Agora, a noção dele [aluno], que traz de continuidade é do gráfico, ampla.

Joi _ Certo.

O _ Essa é a diferença que eu estava colocando.

Joi _ Certo. Agora quando... O que significa ela ser contínua num intervalo aqui? Então, aí você pode... geometricamente o gráfico tem que ter um aspecto semelhante a esse aí. De uma... uma... linha. Tá certo?!

(...)

O _ Eh... no caso de limite também que você pega por um exemplo pontual, você disse que insiste no ponto, no ponto né?! E aí você vê limite no infinito... qual é o ponto?

Joi _ Não, aí não. Aí se tem que... (sorriso) aí... aí não tem ponto, tá certo?! Aí você estende a noção... é uma outra análise. Por exemplo, quando você analisa...

O _ Mas não é limite?!

Joi _ Não, tudo bem. Nem todas as Marias são iguais! Então veja bem, você tem que dar sentido a isso. *Você pode até usar a mesma, a mesma notação, né?! Mas você vai explicar agora, por exemplo, este fato aqui. Limite quando x tende para + ∞. Primeira coisa, isso aqui não é* número. Então esta... este *símbolo aqui, ele demanda uma explicação, tá certo?! Então você* pode dizer prá eles o que?!

(...)

Joi _ E o limite aí depende dele, né?! Depende da função, tá certo?! Pode acontecer o seguinte, ou poderia não existir, ou poderia dar um número real, ou isso aqui tende a ser limite, dar um + ou - infinito.

O _ Então o limite aí passa a não ser mais um número, como você tinha escrito, "é um número".

Joi _ O ponto limite, sim. Não é um número. Aqui nesse caso sim, o limite é um número. Agora, aqui já não é mais um número. Então, aqui se traduziria, qual seria uma forma assim?!

(...)

O _ Então você acha por exemplo, que o livro... quando você fala pro aluno: "limite é", "tende a" ou "se aproxima" de L, você acha que isso significa a mesma coisa para ele?

(...)

Joi _ Olha, pelo menos, eu pretendo que sim! Porque se ele entender dessa forma, tá certo né?! Procura a fazer com que... ele sinta essa idéia, né?! Agora se eu colocar aqui...

O _ + infinito.

(...)

Joi _ É... prá onde... Não vou dizer de onde ele se aproxima porque não teria sentido, tá certo?! Então, acho que volto a insistir, ela é ilimitada.

O _ Então, mas aí o limite passaria a ser o quê? A tendência? O "tanto" ao qual ela se aproxima? Porque não é mais um número!

Joi _ Não. Ela... eu... agora [riso] não sei como nós diríamos aí, né?!

(...)

(9ª Parte)

O _ Ou seja, quando você fala "se aproxima" dá idéia de que tem alguma coisa lá e que ele tá se aproximando.

Joi _ Certo. Nesse sentido, da aproximação. Que não é o caso aqui. Então aqui deveria tomar o cuidado de dizer: olha, estes valores aqui, eles crescem... com esta frase aqui nós pretendemos expressar a seguinte idéia, a seguinte idéia, que os valores f(x) são maiores que qualquer quantidade que você imaginar, desde que para isso você escolha o x suficientemente grande. Então, é no sentido disso daqui... sempre cresce, cresce mais e mais...

Por isso que a gente usa a linguagem f(x) tende para + ∞.

(...)

O _ Certo. Mas aqui também pode ser assim, né?! Ela pode tender prá ℓ sem assumir o valor ℓ.

Joi _ Certo, mas ôô Ligia, você vai usar nos dois casos a mesma linguagem, só que as situações são diferentes. Aqui por exemplo, você fala a função se aproxima de um número ℓ, e aqui, de fato, isso é um ponto de onde os valores de f(x) se aproxima, e você não tem essa situação aqui ($\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$). *É por isso que eu acho que você usa a mesma linguagem, a mesma* maneira de escrever...

(...)

O _ E se você não falar de limite? Tem jeito?

Joi _ Mas... e falar do quê?

O _ E falar do quê? Como é que você faz derivada?

Joi _ Sem limite? Como assim derivar...?

(...)

(10ª Parte)

[Ainda sobre a definição formal de limite]

Joi _ Eu acho que ele não faz. Não faz. Então esta aqui (definição formal) é uma etapa bem na frente dessa idéia. Geralmente... curso de cálculo, né?! Oh! tem que ser por ε e δ, vamos fazer, né?! Mas...

(...)

O _ Pois é. E aí às vezes prá um aluno, por exemplo, de curso de administração, ou de ... mais ligado à...

Joi _ Mais técnico.

O _ ... a área mais técnica, de engenharia civil, você evita de dar, né?!

Joi _ Eu jamais daria esta definição!

O _ E, você fica aqui [visual-geométrico].

Joi _ Só nessa aí, né?!

O _ Já pro aluno de Matemática, você sabe que ele tem análise e outras coisas, você entra aqui (definição por ε e δ).

Joi _ Aí eu acho... Ele vai...

O _ Então você acha que é, se você pegar um aluno de lá do curso de administração e um do curso de matemática, você deu o objeto limite prá eles digamos assim, você acha que ambos constituíram o mesmo significado de limite? Eles tem o mesmo objeto?

Joi _ Olha, aí o seguinte...

O _ Podem produzir o mesmo objeto?

Joi _ Eu acho que eles têm chance de formar, mas se você também conduzir.

Porque no seguinte sentido, vamos supor que no curso de matemática você deu a ênfase por aqui [def. de ε e δ] e,lá, por isso aqui, [visual-geométrico de limite] numa forma mais geométrica, intuitiva.

Se você colocasse, se eles dois forem colegas de república, eles não vão perceber que estão falando a mesma coisa. Com certeza, eu acho. Claro, você não pode afirmar porque, de repente você é surpreendido com... ele percebeu exatamente, essa sentença aqui ele percebeu exatamente o que ela traduz. Mas eu acho... claro, é um sentimento, né?! Eu acho que eles não vão...

(...)

Joi _ Aquela é mais... vamos supor, é mais natural, vamos pensar assim. Mas depois a gente vai conduzir os alunos prá essa outra definição. Tá certo?! Aos pouquinhos ele vai ver um pouquinho de Cálculo I, no Cálculo II ele pode retomar um pouco isto aí,

(...)

Joi _ Eu vejo. Tá certo?! A gente já sente, agora, claro que o aluno, ele vai ter dificuldade prá sentir isso, tá certo?! Essa ponte aí... né?!

(...)

O _ Você faz esta [intuitiva, visual-geométrica] pensando naquela [definição por ε e δ do livro].

Joi _ É a gente já, né?! Faz essa aqui, né?! Até sabendo que tem essa outra forma, o que é aceitável, né?! Chega num ponto do curso que você tem que abrir mão disso e usar aquela [def. por ε e δ do livro]. Até... você tem que fazer isso, né?! Essa é a definição aceita em matemática, então chega num certo instante então, o aluno tem que saber também trabalhar com a definição aceita como definição de limite.

(...)

(11ª Parte)

O _ E você introduz derivada simplesmente como limite?! Como é que você inicia esse assunto?

Joi _ Olha, eu inicio... eu falei no problema da tangente. Eu comecei por aí, tá certo?!

O _ Qual problema? Um específico, ou...

Joi _ Não, quando você traça tangente a uma curva. Como que eu vou traçar uma tangente?!

O _ E qual a idéia que o aluno tem de tangente?

Joi _ A idéia que ele tem, sabe qual é? É a reta que toca a curva num único ponto. Essa é a idéia que ele tem.

(...)

O _ Então o motivo, a motivação inicial seria por reta tangente.

Joi _ É, derivada. É, eu saí por aí, tá certo?! Uma escolha, né?! Então, depois você faz também usando a interpretação física, de velocidade... É onde também você pode explorar a derivada, né?!

(...)

Joi _ Ainda surge o limite, a inclinação da tangente, tá certo?! E quem é a inclinação da tangente? Na hora... eu já percebi que em certas ocasiões, parece que isto o pessoal não percebe.

O _ Então, primeiro você define a reta tangente como um limite de uma reta secante. Aí depois você pega o coeficiente da reta tangente...

Joi _ Da secante. Então, quem é ele? O coeficiente da tangente? É o limite dos coeficientes da secante, isso foi na hora, define né?! Quem é a inclinação? Foi assim uma coisa que me deixou até alegre, que eles falaram: olha, a inclinação da secante, da tangente, né?!

E aquele limite... você tira, tem dois pontos, nas verticais, aí o coeficiente angular você tira né?! Tá certo?!

O _ Eles sabem...

Joi _ Isso aí sabem, então surge naturalmente esse limite aqui. Aí você fala: ó, definição, esse limite eu vou chamar de derivada.

(...)

(12ª Parte)

O _ Como que por exemplo, na hora que você fala prá eles, você fala isso daqui? Como que você lê isso daqui?

Joi _ Ah! Eu leio como está escrito.

O _ Como?

Joi _ Limite de h quando vai prá zero de f (x + p) - f (p) sobre h.

O _ E quem é esse h?

Joi _ O h é um número real, diferente de zero.

O _ Um número real diferente de zero, e tá tendendo a zero?!

Joi _ Tendendo a zero. É o limite quando h tende a zero daquele quociente. Então, aí a fórmula de lê é a fórmula usual.

(...)

O _ Então a reta tangente com limite de uma reta secante, a reta tangente pode não existir, não é isso?!

Joi _ ... a existência da reta tangente, ela não está garantida. A definição não garante, lá é condicional, né?! Se a reta secante se aproximar de uma única reta, esta reta eu vou anotar como reta tangente. Mas... o interessante é que muitas vezes eles não percebem. Então que... É um condicional, repara?! Se existir essa, essa... o limite, a reta limite, né?!

Então é bom, é sempre bom destacar que pode não existir a reta limite. Ou, depois...

O _ E aí muda também um pouco a conotação de limite né?! Por que estava falando de limite como sendo um número real e agora você fala de limite como sendo...

Joi _ Uma... uma... uma entidade geométrica, né?! Certo?! Muda também, né?! Mas, a mente humana, nesse ponto a gente aaa... O elemento mudou, primeiro era função, e agora você está trabalhando com retas, mas a idéia, o curioso é que a idéia permanece, né?!

O _ Qual é a idéia que permanece? O que que você acha?!

Joi _ A idéia de você ter uma identidade, uma identidade, um elemento né?! Um ente matemático que não necessariamente é uma função, ele pode se aproximar de um outro, tá certo?! Que no caso aí são retas secantes se aproximando de uma reta fixa né?! Tá certo?! Quer dizer, nesse ponto você pode observar que não há nenhuma dificuldade dos alunos em, em aceitar também essa aproximação através de retas. De uma reta se aproximando da outra. Sério. Como que se define a reta tangente sem se saber o que é? Você vai adotar que é aquela?! Que é aquela...

(...)

2 - É uma questão de se chamar de derivada, mas né?! Porque... só da licença um pouquinho, os alunos ficam tão assim preocupados com derivada, derivada, porque até fiz de propósito, nós trabalhamos bastante com esses limites lá no começo, e falamos: ó, isso aqui vocês vão lembrar lá na frente, né?! Porque quando você chega pro aluno e fala: o que é derivada?

Eles vêm e falam isso aqui: é a f '(a).

O _ Isso é o que fica de derivada.

Joi _ Ou às vezes você, nan... o que que é derivada de uma função? Ele vai falar que é o f '(a).

Eu falo: ó gente, se você disser isso, você não disse nada, isso aqui é um símbolo. Agora, que significado que ele tem, né?! Se você já assimilou a idéia de limite, então esse símbolo ele reflete... é este limite aqui. Tá certo?! Então por isso que às vezes se você insiste, olha a derivada f ', aí você passa..., você esquece a idéia e fica com o símbolo. Esse é o problema que às vezes...

xxxxxxxx

Entrevista nº 3 (transcrição de gravação - "audio")

Turma de CÁLCULO I -
52 alunos

O _ Entrevistadora (pesquisadora)

Assai _ Professor entrevistado

(1ª Parte)

O _ Que tipo de turma de cálculo você trabalha este semestre?

Assai _ Neste período estou trabalhando com uma turma de Cálculo I da Engenharia Mecânica; 1º período do curso.

O _ Cálculo I, Engenharia Mecânica. Quantos alunos em média?

Assai _ É... Hoje eu apliquei uma prova, apareceram 53 alunos. Normalmente a média é de 45 a 50 alunos diariamente.

O _ Você adota algum livro?

Assai _ Eu tenho adotado alguns textos básicos, mas não especificamente um livro. É... eu costumo inclusive dizer aos alunos que estes textos são bastante similares (...)

(...)

Assai _ ...É quase sempre eu sigo uma ordem que eu acho mais funcional. (...)

O _ Mas você tem uma determinada seqüência? Assim, por exemplo, números reais, funções...alguma seqüência que você costuma seguir?

Assai _ Tenho. Eu costumo seguir a parte de números reais, intervalos, e tal, funções e gráficos, e daí entra para as noções...sobre tudo noções...é...geométricas de limite, derivada, né?!? e... quer dizer, a continuidade...Mas eu trabalho bastante nessa fase, sobretudo inicial do curso, com uma noção mais geométrica, sobretudo, porque o aluno não está muito acostumado com esse linguajar mais sofisticado, mais formal da universidade como um todo. Ele vem de um segundo grau onde ele era amparado muito pelo professor, vivia mais perto do professor, e, dentro da universidade, os professores só aparecem na sala de aula, quando aparecem...(riso).

O _ Ah, é?! E...em termos de seqüência você acha assim...uma necessidade muito grande os alunos verem números reais como parte dos...,sendo o conjunto que compõe-se dos inteiros, racionais... e depois completar os reais...e depois passar para função? primeiro...ou eles já vêm com uma noção básica disto, que você pode trabalhar a partir dela?

Assai _ Normalmente eles já vêm com uma noção. O que eu faço em sala de aula é sondar os pontos onde eu vejo mais problemas é...sobretudo no que diz respeito a números irracionais, por exemplo, a noção que eles trazem errada de raiz com "+" ou "-" tanto, raiz de 4 igual a $\pm$ 2, quer dizer, são alguns conceitos que não estão bem formalizados na cabeça deles. Mas a...o todo, número real e números...

O _ Você acha que eles têm idéia do que é um número real?

Assai _ Não sei se eles têm uma idéia, mas geometricamente eles sabem como é que funciona...em geral.

O _ Como funciona?

Assai _ Na reta ele sabe que, existem pontos que não são racionais...pelo menos isto eu tenho notado nos cursos da engenharia que eu tenho dado. Então eles têm conhecimento de números irracionais, da existência de números irracionais, né!?, embora não usem isso no dia a dia de 2º grau, mesmo porque muitos professores, até mesmo de Matemática, toda vez que aparece uma raiz ou qualquer outro número irracional, eles acabam trocando isso por um número...decimal, aproximado.

O _ E...*você fala dos números reais como sendo a união dos irracionais e racionais?*

Assai _ É, normalmente sim. Quer dizer, mostro a existência de números que não são racionais, né!?, normalmente eu chamo a atenção pra isso, como $\sqrt{2}$ que em geral é mais simples, e...coloco números reais, porque não dá para fazer um trabalho mais aprofundado. Qualquer coisa ali, teria que ser dentro de um curso de análise ou algo parecido, em termos de números reais, de conjunto de números reais, a estrutura e ta

(...)

.... então, precisa conhecer talvez com um pouco mais de segurança alguma coisa sobre os números reais, mas o conceito propriamente de número real ele não tem muita necessidade disso durante o curso.

(2ª Parte)

Assai _ É funções é...de primeiro grau, do segundo grau, funções tipo escada, função módulo, as funções trigonométricas e algumas variações: *sen(ax), a senx, cos (bx)...*

O _ Aí você acha que quando fala, na frente, de alguma dessas funções, ele já tem condições de lembrar porque viu há pouco tempo.

Assai _ É. Exato. Isso...trabalha com os gráficos dessas funções, então ele já tem na cabeça essa função, é mais simples.

O _ Porque algumas delas, de primeiro e segundo grau, por exemplo, de equações lineares e quadráticas, eles vêem um pouco no 2º grau.

Assai _ Vêem. São as que eles mais vêem na verdade. Eles vêem as funções trigonométricas também, mas de uma forma talvez mais decorada do que entendida. Eles sabem, a função de segundo grau sabem que é uma parábola, mas eles não têm muito bem o domínio de como é o gráfico dessa parábola ou como são os gráficos. Então eu acho que essa visão é importante. A função escada ajuda muito quando você está trabalhando com limites laterais e tal...Então é uma função simplesinha que já te dá uma idéia de...de limites laterais diferentes, né!? Então ele já vê geometricamente encima daquilo. Então eu acho que estas funções elementares trabalhadas antes, te propiciam uma série de exemplos, já conhecidos pelos alunos, quando você vai trabalhar com as noções de limite.

O _ Aí você vê essa seqüência: números, funções, limite, derivada... Você acha que esta seqüência é quase que uma seqüência obrigatória no Cálculo?

Assai _ Não sei se seria obrigatória. Eu acho que pra mim é bastante confortável. E para o aluno não é ruim. Né!? Eu...pelo menos a experiência que eu tenho com aluno de 1º período, nessa parte, essa seqüência tem se mostrado bastante boa. Eu vejo inclusive alguns textos que antecipam a noção de declividade de curva genérica sem ter falado em derivada e coisas deste tipo. Eu ainda não sei se isso é bom ou é ruim. Mas eu prefiro ir do mais concreto para o mais complicado. Né!?

O _ Você acha que...limite é menos complicado do que derivada, pra eles?

Assai _ Não. Eu, a noção de limite é muito mais complicada do que a idéia geométrica de derivada. A idéia geométrica é muito mais simples, a de derivada. Só que, na hora que ele vai calcular, ele precisa saber calcular limites!

O _ Ele não faz derivada sem limite? É isso?

Assai _ Eu acho que não. Quer dizer... fica difícil para o aluno fazer uma derivada sem limite. Mesmo porque, quando você define a derivada, você define como limite de declividades. Né!?

(...)

(3ª Parte)

O _ Como que você trabalha, como que você me explicaria essa "noção de limite"? Que você está falando, a noção intuitiva...

Assai _ A noção intuitiva é uma noção de proximidade, muito embora isto seja uma coisa muito relativa, porque o que é próximo pra eles não é próximo para a matemática, né!? Pro aluno, você fala próximo, ele acha que próximo é é...basta tá pertinho, né!? Mas matematicamente, o que visualmente está próximo pra ele, matematicamente pode não estar próximo ou suficientemente próximo. Então é uma noção complicada, mas é encima disso que eu particularmente trabalho; com essa noção de proximidade. Quer dizer, f(x) estará próximo de alguma coisa quando x está próximo de algum valor. Então essa idéia é uma idéia bastante intuitiva, que é por onde eu começo na verdade, pra depois fechar essa noção intuitiva com a definição mais sofisticada de limite, embora eu não trabalhe com ela dentro do Cálculo. Pessoalmente, eu acho que não é o lugar para se trabalhar a definição de limite com ε e δ, e outras coisas.

O _ Então você passa o limite para o algoritmico, para as propriedades logo e só trabalha com elas? Praticamente; ao fazer derivada.

Assai _ E sobretudo, é...talvez até mais! Eu talvez seja um professor muito simplista nessa história. Porque... de fato, de fato, após definida, após trabalhado um pouquinho esse conceito de limite, eu vou pra... continuidade de funções e já trabalhando com uma série de funções contínuas como que listadas, né!? Quer dizer, algumas a gente mostra que são contínuas, mas outras são realmente dadas, essas são contínuas. Porque o que acontece normalmente é que os problemas tanto de limite como de derivada, que não deixa de ser problema de limite, acabam é...se transformando num problema de você pegar uma indeterminação, de uma maneira geral, e transformar pra uma expressão que seja uma expressão contínua, através de algebrismos. Então, quer dizer, uma vez que ele percebe que, através dessas operações algébricas, ele acaba transformando ou saindo de uma indeterminação e obtendo uma expressão que é uma expressão contínua, ele já sabe que o limite daquela expressão é o valor da expressão no ponto, e daí ele vai. É...o que é complicado é você falar em derivada ou em limite, eu acho, sem chamar atenção para esses pontos. Quer dizer, por que que em um determinado ponto eu tenho que fazer um conjunto de algebrismos e, a partir de um certo ponto, eu simplesmente substituo o valor...que se propôs?

O _ Se você não fala nada para o aluno e ele vê, por exemplo, lá $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, ele tem que chegar a uma resposta, disso daí você acha que ele não simplifica? Sem olhar para o denominador onde ele é zero?

Assai _ Não sei se simplifica. Realmente não sei. Porque a tendência normal é fazer o quê? É pegar e substituir lá o valor, né!? Então aí deu zero sobre zero, ele fica atrapalhado na frente daquilo.

O _ Você acha que ele fica atrapalhado. E a saída dele então é perguntar se pode simplificar...ou... ?

Assai _ É, normalmente eles perguntam: "por que que pode simplificar se o "negócio" tá valendo zero...como é que eu posso simplificar?" Né!? Então aí é que vem aquela noção, talvez mais refinada, que a gente tá se aproximando do ponto mas é sempre diferente do ponto, né!? Então na verdade você está simplificando por valores que não são zero. Então essas coisas a gente chama a atenção deles, né!?

(...)

O _ Ele sabe que a coisa funciona assim. Mas o que...o que você acha que ele pensa... que é limite pra ele? É um número...? O que é o limite? Limite é "algo"? Como é que ele pensa limite, né!? Porque a idéia intuitiva de que *x* tá se aproximando de *a* então o f(*x*) vai se aproximar de algo...

Assai _ Hum-hum!

O _ Que algo é esse? Que seria então o limite, pra ele? Você acha que eles pensam isso ou não, nestes termos? Se preocupam com isso?

Assai _ Não, acho que não. Quer dizer...ver de fato...quer dizer, acho que eles calculam o limite, eles têm a idéia do que é que eles estão fazendo, porque eles aprenderam por aí , né!? É...vendo geometricamente como é que a coisa funciona, encima de gráficos...

O _ Pois é, daí eles calculam, encontram lá um número, por exemplo.

Assai _ É, mas daí eles não fazem, em geral não fazem...a volta, quer dizer, eles não vão verificar realmente _ essa função está se aproximando? _ Eles não estão vendo isso. Eu acho que não vêem.

O _ Quer dizer, fazem os cálculos assim meio... imediatos.

Assai _ Automaticamente.

O _ Aí encontram um número, o número é o limite pra eles?

Assai _ O número é o limite pra ele, e acabou. Quer dizer, eles não vão pesquisar o que que isso significa em termos daquela expressão; isto eu acho que eles não voltam para saber, a preocupação maior é calcular o limite.

(...)

(4ª Parte)

O _ Como é que você costuma falar : o limite é...

Assai _ É, normalmente eu digo que a função tem limite se aquela expressão se aproxima de um número real, finito portanto. Então sempre que a função vai pra mais ou pra menos infinito então não tem limite. Então essa é a conceituação básica. Então é...daí um pouquinho aparecem aquelas descontinuidades removíveis, então a idéia de a função estar se aproximando de algum valor quando *x* se aproxima do ponto, ela entra ali com bastante...quer dizer, muitos alunos percebem que eles podem usar essa idéia de limite, da função estar se aproximando (...)

(...)

O _ E, por exemplo, se você está dando aula pra alunos de matemática, ou alunos de engenharia, ou alunos de arquitetura, ou de administração, a sua maneira de agir, de tocar nestes problemas é sempre o mesmo? Não?

Assai _ Não, normalmente varia e varia relativamente bem até. Né!?

O _ Por que?

Assai _ É muito em função da... do próprio nível de conhecimento envolvido nas turmas. Eu já dei aula pra ciências biológicas, já dei aula pra matemática, já dei aula pra administração, ...pra ciências contáveis e pra engenharia da computação, quer dizer, a gente nota o nível de conhecimento bem diferenciado entre estas turmas. Então você precisa adequar muito, não só em termos de exemplos, embora isso não seja muito relevante _ exemplos especificos _ eu não vejo como muito relevantes, aplicações específicas; mas o palavreado é fundamental nisso daí, a bagagem de conhecimento que o aluno traz, ela é muito diferente de um curso pra outro. Sobretudo se você pega um curso de alta competição no vestibular, que provoca uma seleção muito grande, eles vêm com um nível de cultura diferente porque eles pertencem a status sociais diferentes.

O _ Você acha que isso faz uma diferença, considerável.

Assai _ Faz uma diferença muito grande. E a gente nota inclusive é...a maneira do aluno se relacionar com o professor é diferente.

(...)

O _ E, esse aluno quando você diz pra ele, esses alunos talvez, que você considere que tenham um conhecimento mais heterogêneo no vestibular, na entrada do vestibular, um pouco "menor", você acha que eles têm mais dificuldade de entender o nosso linguajar enquanto professores de matemática, do tipo "se aproxima de", "é vizinho", "tende a", do que os outros? ou não?

Assai _ Não. Eu acho que não, desde que seja um linguajar, vamos dizer, comum. Porque quando você fala " se aproxima de", na cabeça dele ele tem um entendimento, mas na hora que você começa a complicar as coisas e começa a colocar uns buraquinhos no meio, né!? De modo que o "se aproximar de" já não, começa a não bater com a idéia de estar perto que ele tinha lá, aí você começa a complicar; entre dois racio...entre dois reais você tem, entre dois irracionais você tem um racional, e entre dois..., isso aí não bate muito bem pra eles. Então esses conceitos mais refinados não se encaixam, eu acho que de uma maneira geral, pra nenhum aluno que está ingressando dentro da universidade.

(...)

O _ E essa idéia fundamental você acha que cobra da mesma forma pras turmas de matemática e administração, por exemplo, ou é de maneira diferenciada?

Assai _ Não, eu acho que basicamente é a mesma. Porque a idéia fundamental por idéia fundamental você tem que cobrar a mesma coisa; talvez o tipo de exercício que você use para cobrar estas idéias seja um pouco diferente, você pode usar um modelo mais simples numa turma de...éé...vamos dizer assim, de um nível mais baixo, né!? e um modelo mais sofisticado pra uma turma mais esperta; mas o que você vai cobrar, essencialmente é a mesma coisa.

O _ Por exemplo, num final de curso de Cálculo I, se você pegar um aluno de...lá de administração e pegar um aluno de matemática e perguntar o que que é limite para um, o que que é limite para o outro, você acha que as respostas vão ser parecidas, iguais, diferentes, ou eles podem se entender ou não se entender?

Assai _ Não, pra eu considerar que esses alunos tivessem feito um curso e tivessem chegado ao final do curso com um conceito é...bem feito, eles teriam que responder essencialmente a mesma coisa. Tá!? Porque no final o conceito é basicamente o mesmo, pelo menos a idéia é a mesma.

O _ O conceito que você fala aí seria aquela idéia intuitiva?

Assai _ É, de proximidade, de uma visão bem geométrica. Pelo menos essa tem que ser exatamente a mesma. Agora, a sofisticação dessa idéia é que vai depender de cada... de cada grupo; mas a idéia fundamental tem que ser a mesma.

(...)

(5ª Parte)

O _ Aí, você dá limite, dá derivada baseada em limite...e depois você fala em diferencial?

Assai _ Falo em diferencial. Falo diferencial é...usando o conceito de... forma bilinear, até, mostro ao aluno que existe isso, mas o que aparece em termos de diferenciais, dentro dos livros de Cálculo I, não é nada daquilo, de maneira que é outra coisa, pra mim não faz sentido eu ficar ensinando uma coisa que eles não vão, no dia a dia deles ali, eles não vão ver nada daquilo.

O _ Como assim?

Assai _ Porque é a ...a diferencial na verdade acaba sendo uma função, de duas variáveis né!? Tá certo!? Do ponto e da variação; então, *quer dizer, já começa que essa idéia não é* uma idéia...(*interrupção da fita de gravação*)

...Então, a idéia de diferencial, como função de duas variáveis, é uma idéia que não se pode...é é ou pelo menos a gente não tem condições de trabalhar, porque o aluno está trabalhando com função apenas de uma variável e, além disso, também ainda não trabalhou com funções bilineares, ou com funcional linear ou coisa desse tipo, então não dá pra você ir muito longe, mas eu sempre chamo atenção do aluno de que diferencial não é nada daquilo que a gente vai fazer, porque o que se usa de diferencial, na verdade, é definir dy/dx como variação de y sobre a reta tangente, ou seja, é um valor aproximado de Δy, da variação da função, então é isso que ele vai usar ali, e nada mais que isso, na verdade. Ele pode depois, voltar com a expressão diferencial de uma função como $f'(x)\,dx$, pra a parte de integração. Mas...

(...)

Assai _ É, exato. Na verdade o que acontece é que eles [referindo-se aos livros de Cálculo] acabam fazendo com que o limite de "Δ" seja o "d", basicamente é isso. O limite de um Δy é um dy, o limite de ΔA é dA, eles quase que... intuem ao aluno essa idéia, obrigam o aluno a pensar assim, onde você tem "Δ", e vai calcular o limite, você substitui por "d"; que é a história do limite de $\Delta y/\Delta x$ ser dy/dx que é a derivada da função.

(...)

(6ª Parte)

O _ Você nunca tentou jogar limite mais pra frente depois que você deu derivada? Deixar ele calcular derivada só aproximando pela secante, quando a secante tende para a tangente?

Assai _ Não.

O _ Sem usar a idéia de limite!?

Assai _ Nunca.

O _ E...nunca pensou em inverter a ordem, por exemplo, dar primeiro a parte de integração, Teorema Fundamental, cálculo de áreas, para depois vir a dar limite e derivada? Ou seja, fazer uma inversão de ordem!?

Assai _ Não, também não. Eu acho que inclusive isso é conseqüência do ... como é que eu vou dizer!? ...da cristalização das coisas. Você aprendeu assim, os textos normalmente trazem as coisas assim e a gente acaba se acomodando a essa situação. Né!?

O _ Mas você vê com bons olhos uma tentativa dessas?

Assai _ Eu não sei se trocar integral e não sei que lá, né!? porque de repente fica meio complicado se ele não tem idéia. É...quer dizer, sem fazer referência à função inversa, derivada e tal...Não sei, eu nunca tentei, realmente fica complicado; e nunca pensei em tentar, então eu não sei se funcionaria também. Mas alguns textos já trazem, por exemplo, a idéia de derivada, declividade de curva, antes da idéia de limite. Então, ela não é uma idéia... totalmente maluca, pelo menos.

O _ Você já deu uma olhadinha, neste tipo de texto?

Assai _ Já, mas normalmente eu preferi seguir os...

O _ Outros.

Assai _É.

XXXXX

Entrevista nº 4 (transcrição de gravação "audio-visual")

Turma de Cálculo

O _ Entrevistadora (pesquisadora)

Alp _ Professor entrevistado

(1ª Parte)

O _ Esta turma de Geologia em relação a esta disciplina que tem como base o Cálculo Diferencial e Integral, você acha que tem diferença em relação a outras turmas que você já teve? Você nunca tinha dado aulas antes para a Geologia?

Alp _ Sim. Eu havia dado aula o ano passado, mas somente no segundo semestre. Esta é uma disciplina anual de 3h por semana, e o ano passado eu peguei o curso andando. Mas percebi que os alunos tinham uma certa aversão pela disciplina e dificuldades.

Esse ano, dando aula o ano todo, eu me propus a pensar mais criticamente sobre o curso deles.

(...)

O _ É. Eu também tenho observado a classe e noto que tem horas que eles se engajam bem, e em outras parece que não. Eu fico pensando qual seria o motivo.

Alp _ Também percebo isso. Tem dias que até os parabenizo pela participação e há outros que não se consegue trabalhar. Não tenho todas as respostas a isso. Conversando um pouco com eles, agora ao final, eles disseram que acham o Cálculo importante, mas que o primeiro ano deles é muito puxado em termos de horas/aulas. Eles têm uma carga horária muito grande. Eles só têm livre, sem aulas, às quintas pela manhã. Isso é muito pesado. Se eles têm que estudar, eles acabam tendo que optar por faltar à alguma aula. Há pontos do próprio curso que teriam que ser repensados.

(...)

(2ª Parte)

Alp _ Eu comentei com eles da minha preocupação em ligar mais a disciplina com a Geologia, embora não conheça a fundo a Geologia para poder fazer isso. É uma disposição que eu estou tendo neste sentido, mas com certa limitação. Inclusive como você disse os livros apresentam gráficos. Mas também eu nunca tinha pego um livro de Geologia para ver como são estes gráficos.

Este ano eu pedi para eles um trabalho que vão apresentar, no qual eles devem procurar dois gráficos relacionados à Geologia, às outras disciplinas que estão cursando..., e que analisem estes gráficos em termos de toda a matéria que a gente discutiu. O que eles poderiam falar em termos dos gráficos.

Estão se dedicando muito, trabalhando em grupos, e estão aparecendo coisas assim... difíceis de explicar geologicamente. Está sendo muito bom.

O _ Em termos de conteúdo, você adotou algum livro texto?

Alp _ Adotei o Swokowski como texto básico.

O _ Os exercícios e a seqüência você segue como está lá?

Alp _ Não necessariamente. Bom... , os temas básicos são funções, limites, derivadas e integrais, mas... o livro traz muitas coisas que, por opção minha, não tenho discutido com eles, porque tenho pensado assim: em termos de carga horária que a gente tem e dos conceitos que são essenciais para eles. Pensando nos conceitos e nas idéias que são fundamentais para eles, mas não tanto nos detalhes de demonstração.

O _ Quantas horas são?

Alp _ São três horas por semana, todas num dia só. Se você dá aula direto eles se cansam e o professor também. Se você dá intervalo, o intervalo se prolonga sempre mais do que deve...

Este também foi um fato que a gente discutiu, em termos da estrutura, em termos de departamento.

(...)

(3ª Parte)

O _ Por exemplo, quando você falou em limite, você falou para eles como?

Alp _ Mais em termos intuitivos, dando idéia de limite, não dando a definição formal por épsilons e deltas..., mas isso acontece na matemática também, isso não é diferença. Em termos intuitivos, com algumas técnicas, mas sem a pretensão de gastar muito tempo com isso.

O _ Como pré-requisito para derivada?

Alp _ Isso. Mas sem muita ênfase para a Matemática.

O _ Por exemplo, você chegou a abordar questões como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$?

Alp _ Sim.

O _ Como você acha que eles enxergam?

Alp _ Eles têm muitas dificuldades. Mesmo as idéias de limite trabalhadas de forma intuitiva, eles ainda falam muito: *"isso é muito abstrato professora!"*. E se você pensar a fundo, é mesmo!

O _ Como você se expressava para falar isso para eles?

Alp _ $1/n$, o que acontece quando n torna-se muito, muito grande? O que vai acontecer com $1/n$? Alguns aceitaram que se aproxima de zero. Discutíamos esta questão também, não é que é igual... mas no limite... a gente fala em Matemática que é zero. Não é que o valor 1 dividido por aquele número vá ser zero, mas...a gente pensa: aquilo aumenta cada vez mais...e em matemática a gente acha um jeito para conversar sobre estas coisas, a gente define como sendo o limite e fala que ele é zero.

(...)

(4ª Parte)

[Foi apresentada à entrevistada a seguinte questão:

Pensem e discutam sobre $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, digam quais das frases abaixo se adequa melhor e porquê?

(a) à medida que n tender a infinito, $1/n$ tende a zero;

(b) quando n for infinito, $1/n$ será zero;

(c) $1/n$ pode se aproximar cada vez mais de zero se tomarmos n cada vez maior;

(d) o inverso de um valor infinitamente grande é um valor infinitamente pequeno, logo o inverso de infinito é zero.]

[Foi perguntado:]

O _ Em termos de suas *explicações, como vê essas frases?*

Alp _ Posso dizer assim: as frases vão e voltam. Mas isso não garante que eles estejam entendendo assim. Surgem alguns absurdos, com outros significados para eles, ou não têm nenhum. Enfatizamos a frase (c), porque estamos sempre repetindo isso.

O _ Esse *n* com "flexinha" e infinito na frente, você acha que eles entendem que é *n* cada vez maior?

Alp _ Bom, trabalhamos isso, quer dizer...que é uma linguagem matemática, e a gente fala assim, usa isso.

O _ Quando você diz que eles não formam significado nenhum, são pelas respostas absurdas?

Alp _ É porque surgem algumas respostas que a gente não espera.

O _ Pode me dar um exemplo?

(...)

Alp _ Eu estou lembrando de outra coisa, não com respeito a isso [aponta a questão que lhe foi apresentada].

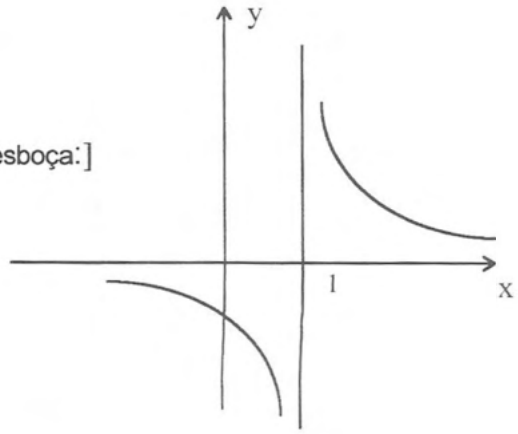
O _ Tá, tudo bem.

Alp _ Com respeito a isso... Por exemplo, $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$, então... ou olham no gráfico da função ou pensam aqui... [aponta o limite escrito].

O _ Inclusive faziam gráficos na calculadora, não é?

Alp _ Também, também.

Mas aqui... o $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$ e o $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}$, e [esboça:]



O _ E eles olham para o gráfico?

Alp _ É... às vezes colocam um valor qualquer aqui. Para nós

$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ e $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$.

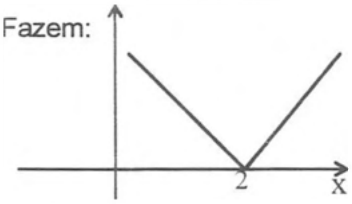
O _ Aonde eles põem outro valor?

Alp _ Aqui [aponta os limites laterais escritos]. Ou então até colocam estes, mas quando se pede o $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ . ... Anh!... Vou dar outro exemplo: $\lim_{x \to 2} |x-2|$, nós falamos: [escreve e lê]

$\lim_{x \to 2^+} |x-2| = 0$ e $\lim_{x \to 2^-} |x-2| = 0$ e $\therefore$ o $\lim_{x \to 2} |x-2| = 0$.

y

Fazem:



$$\lim_{x \to 2^+} |x-2| = 2$$

e

$$\lim_{x \to 2^-} |x-2| = 2$$

Mas escrevem $\lim_{x \to 2} |x-2| = 0$. Coisas que parecem não ter ligação.

Não têm sentido. Ou tem prá ele, né?!

(...)

(5ª Parte):

O _ E quando você explorou derivadas, como é que você falou de derivadas para eles? O que foi que você mais destacou?

Alp _ Derivada foi... em termos de limite mesmo, né?!

1- Limite que você fala é definição pelo quociente de Newton?

2- É. Agora, é claro que não foi simplesmente colocar a definição lá. A gente primeiro discutiu reta secante e... reta tangente, o que seria isso ... e analisamos em um gráfico vendo o que acontecia, variação no eixo x, variação no eixo y, analisando o coeficiente angular.

O _ Então, a derivada você viu como coeficiente angular da reta tangente em um ponto, paralelamente com limite do quociente de Newton... Essas duas coisas você explorou?

E você acha que eles usam mais qual? Ou, você tem uma noção a respeito do que eles mais falam de derivada?

Alp _ Eles falam muito, a gente falou muito mesmo, em coeficiente angular da reta tangente... e muitos deles usavam mesmo o limite por definição, para demonstrar a derivada de algumas funções, não de todas. Ou, resolvendo problemas onde foi pedido que usassem a definição.

Até quando tínhamos umas regras... muitos deles não se tocavam e queriam usar o limite que definia.

O _ Você acha que esta parte de intuição geométrica, pelo coeficiente angular, eles usam em outra parte que não ali no Cálculo?

Alp _ Eles estão usando na interpretação dos gráficos em Geologia, eles estão falando... Essa foi a ênfase maior no começo. Depois a gente resolveu alguns problemas de taxa de variação, de aumento de bactérias, até surgiram equações diferenciais...

O objetivo não era discutir profundamente isso, mas que eles tivessem problemas onde aparecesse taxa de variação, aumento e redução. E, a necessidade de estudar integrais.

(...)

(6ª Parte):

O _ Você chegou a explorar alguma coisa de integração a respeito de área, não?!

Alp _ Sim. Integral definida. Mas... tudo assim... eu acho que deveríamos trabalhar mais. A gente viu assim... noções do que seria uma integral definida, quando ela ia representar área, quando ela é positiva. E nem todos entenderam a definição mesmo, quando se faz as partições e ... tudo isso foi feito.

O _ Você fez.

Alp _ Fiz. Fazer, eu fiz!

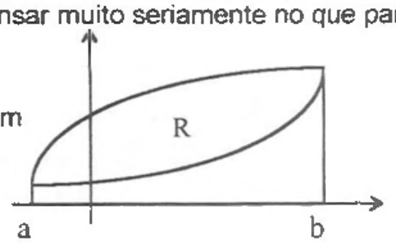
O _ *Como você falava aqui na partição?* [Mostrando numa figura que ela fazia] falava nela.

Alp _Primeiro falamos em área. Antes de falar em integral definida, conversamos sobre área de *figura plana, eles deram mil idéias. A gente precisa realmente, se quer fazer* o ensino através de atividades em sala de aula, você tem que pensar muito seriamente no que parte deles.

No plano uma região R [desenha]

eles deram a idéia de quadricular, de dividir em

triângulos..., então é natural para eles.



[**Alp** conta que os alunos foram falando, discutindo com ela a idéia de partição da área por retângulos, tomando como altura o máximo e o mínimo, por excesso e por falta, até chegarem à definição por limite de uma integral definida].

Alp _ Você define integral definida como ela é, por limite. Aí depois, o que se faz na prática? Existe o Teorema Fundamental do Cálculo, aí você tem um resultado forte, que permite calcular integral definida de uma forma bastante simples, que é através da integral não definida. Então...

Antes de falar no Teorema Fundamental do Cálculo, eles vieram me falar: "Ah! professora! A senhora não vai repetir um pouco mais aquilo, falar um pouco mais? Eu não entendi nada!"

Então você percebe que em termos de conceito... embora eles tivessem participado... Achei normal e natural.

O _ Em termos de conceito o que ficou depois foi o Teorema Fundamental?

Alp _ É.

(...) O que eu quero dizer para você é que, pela carga horária, eu deixei de trabalhar melhor esta parte aqui [aponta para as áreas calculadas por soma de partições], fui logo para o Teorema Fundamental do Cálculo, para eles terem a oportunidade de ver o que era este teorema, resolver alguns exercícios, e ligar a integral definida com área quando a função é positiva... Mas o semestre vai parar por aí.

xxxxx

Entrevista nº 5 (transcrição de gravação "audiovisual")

Turma de Cálculo I - Matemática

40 alunos

O - Entrevistadora (pesquisadora)

Su - Professor Entrevistado

(...)

(1ª Parte):

O _ E o texto que você adota?

Su _ para os alunos eu digo que qualquer livro de Cálculo dá para acompanhar, mas basicamente eu adoto o Swokowski. Só que quando eu vou preparar minha aula eu dou uma olhada geral no Ávila, no Guidorizzi. O Guidorizzi tem uma colocação interessante dos assuntos.

O _ Em termos de seqüência?

Su _ Não, a comunicação do assunto novo. A maneira como ele coloca. Por exemplo, quando ele introduz equações diferenciais... Antes de falar em equações diferenciais, só usando integral e derivada, ele introduz de uma maneira bem sutil e interessante...

O _ Posso ver?

Su _ Se você quer ver... [pega o livro, começa a procurar]

O Teorema Fundamental do Cálculo ele dá de uma maneira bem simples, e ele faz a demonstração do teorema ao longo do texto, sem chamar de teorema... Então quando você enuncia o teorema, você já passou para o aluno aquele resultado sem assustar o launo que aquele é um teorema importante!

(...) [Continua a procurar no livro algo para mostrar]

Su _ Por exemplo, aqui... [mostra no livro]: "determine y tal que $dy/dx = x^2$ ". Então aqui ele está induzindo o aluno a pensar simplesmente em primitiva, mas já é uma equação.

O _ Aí ele já falou em primitiva antes.

Su _ Sim já. Mas ele dá uma equação diferencial, ele não chamou de equação diferencial, e o único raciocínio que o aluno vai ter aqui é primitiva.

(...)

(2ª Parte)

Su _ Também na maneira como ele introduz a área. Olha, ele começa aqui [mostra no livro],

ele falou simplesmente em área, se a função for positiva podemos falar em área, divisão tomando partição... Aí ele começa a trabalhar com a primitiva F, usa a partição, ele faz partição genérica, faz um somatório... depois... Aí no final da história, ele já consegue que $F(b) - F(a)$ é esta soma... E, com essa introdução, ele quase que já provou o Teorema Fundamental do Cálculo.

(...)

O _ E estas demonstrações, eles vêem todas, ou... você deixa por conta de quem quiser olhar...

Su _ É, os principais como esses você tem que demonstrar, e principalmente porque é um raciocínio claro. Então aí eu demonstro. Agora, se eu vejo que a demonstração é muito trabalhada, aquela demonstração em que o autor tem que achar uma função que dê certo ali... fica muito... para o aluno parece uma situação forçada, então eu prefiro omitir do que ele não entender. É lógico que uma minoria entenderia. Mas a grande massa... ficaria mais perdida ainda.

(...)

(3ª Parte).

O _ E lá no início do curso então, quando você falou de limite, você falou pela definição formal...

Su _ Não. Nós, já há vários anos, resolvemos não falar na definição formal de limite por épsilon e delta, e eu vou introduzir essa notação agora que eu vou dar seqüências e séries. Agora, nas próximas aulas, final de novembro.

O _ Você acha que eles esbarram em que?

Su _ Bom, eu só acho que se der no início, quando eu der limite, eles não vão assimilar bem a idéia de intervalo... Até eu tento. Às vezes eu tô dentro de um exercício... eu sem querer eu falo um pouquinho... faço um desenho, mas muito pouco.

O _ E, como você introduz para eles essa noção de limite? Como você faz?

Su _ Aí eu sigo bem o Swokowski, a idéia de: quando x se aproxima de a, f(x) se aproxima de um valor fixo L. É bem na base de aproximação.

O _ O f(x) como sendo o valor funcional?

Su _ Isso. Função.

O _ E eles têm uma tendência em achar que este valor sempre existe...? Ou...porque quando eles trabalham com funções, você fala f(x), isso é sempre um valor?

Su _ Não sei... O que eu acho é que não dá tempo de você reparar certas coisas. A não ser que você faça uma pergunta já com essa intenção. Em geral, o que acontece? Seu tempo é geralmente curto para tudo.

O _ E você explora a idéia de limite por gráfico?

Su _ Sim. Então, é aí que às vezes eu passo a idéia do 'delta e épsilon' sem dar muitos detalhes...

O _ Mais a questão intuitiva... visual.

Su _ É. Intuitiva.

O _ Você acha, por exemplo, que quando adota uma certa seqüência do livro, ou uma outra, porque a cada ano a gente faz umas modificações... Você acha que o aluno percebe isso, questiona a respeito disso? Ou não ?

Su _ Questiona. E eu até gosto. Quando eu vou introduzir um assunto e vou pelo Guidorizzi, alguns alunos reclamam: "você não está seguindo o Swokowski!" Então de repente eu sinto que para ele, ele se sente meio perdido. Mas eu acho interessante porque ele vai ver o conceito de duas maneiras diferentes, e às vezes ele vem me perguntar o porquê das diferenças. E tem.

O _ E quais as diferenças? Em algum conceito que você vê...

Su _ Olha, eu não sei bem se é neste livro, mas só para citar, por exemplo, ponto crítico. Tem livro que define: se a derivada no ponto for zero ou não existir derivada no ponto. Eu já vi em algum livro, ponto crítico é só se a derivada for zero.

Outra diferença básica...acho que no Swokowski e Guidorizzi, e a função sobrejetora, para eles tal função não existe.

O _ Ah! Sim. Eles atacam na imagem.

Su _ Isso! Quando você vai achar domínio e contradomínio...e não é só Swokowski não, varios livros fazem isso. O contradominio já é o conjunto imagem. Ele não faz distinção. Então aí não existe função sobrejetora. Aí, eu saio totalmente do livro e dou: contradominio, conjunto imagem, exemplos *onde são diferentes, porque os livros básicos de Análise... É bem claro que o conjunto imagem é* diferene do contradomínio. Então eu me preocupo com um aluno que vai chegar no curso de Análise, ou vai fazer bacharelado...

O _ Falando em curso de Análise, nessa idéia de limite, alguns professores têm essa idéia de que mesmo o aluno não compreendendo totalmente, ou não estando um pouco aí, para essa definição por 'épsilon e delta', sempre é bom dar a definição no Cálculo, porque quando chega em Análise pelo menos ele já viu. Que você acha disso?

Su _ Sem dúvida. Eu acho que ele devia chegar ao curso de Análise já sabendo. Eu acho que o curso de Análise é um reforço. Agora, se você não dá no Cálculo I, fatalmente ele vai ver no Cálculo II, dificilmente ele passa pelo Cálculo II sem a teoria.

(...)

(4ª Parte):

O _ Mas lá no inicio do Cálculo...

Su _ Você diz no Cálculo I ?

O _ É, no início.

Su _ Olha, antigamente eu entrava com 'épsilon e delta' mas ... o aproveitamento era minimo. E nesse tempo eu não dava aula para outros cursos. Quando eu vim para a Matemática, já tinha a idéia de outros professores de não entrar com a definição formal no primeiro ano. Já a alguns anos é feito isso.

O _ Como você inicia, por exemplo, a questão da continuidade? Porque geralmente se fala em função, limite, continuidade... os livros têm uma certa ordem. Você acha que poderia haver uma inversão dessa ordem? Por exemplo, você chegar e dar integral primeiro, antes de derivada... ou dar...

Su _ Olha, eu admiro quem faça isso! Eu não consigo inverter a ordem a esse ponto. Eu prefiro ir aos poucos...

(...)

(5ª Parte):

O _ quando você inicia um assunto como derivada ou essa parte de integração... quando você dá alguma explicação geométrica... Você se refere a algum outro modo de pensar a não ser esse por limite?

Su _ Não... na integral definida...?

O _ Por exemplo quando você fala nessas partições... Como é que eles enxergam que vai dar a área?

(...)

Su _ Eu forcei bastante a situação. Eu deixei bastante tempo para ver o que eles iam falar, mas eu não me lembro se eles tinham a idéia de limite. Mas eu me lembro que eles tinham a idéia de que cada vez que eu tomasse a partição com mais elementos eu ia me aproximando da área.

(...)

O _ Por exemplo, em Cálculo I ainda, quando você faz comprimento de curva, que você integra ds... Como é que você fala para eles isso?

Su _ Integro ds...

(...)

Su _ Eu deduzo a fórmula...

O _ Explorando limite mesmo.

Su _ Explorando limite.

O _ Estou perguntando isso, porque tem professores que exploram nesta parte e na parte de Física, a noção de infinitésimos. Por exemplo, na turma de Matemática você não fala nisto?

Su _ Eu, particularmente, não.

O _ Você acha que não é necessário.

Su _ Não, olha, tudo que você introduzir de novidade, de maneira diferente de colocar o problema, é super interessante, mas é o que eu falo prá você, você tem que fazer uma escolha. Se de cada assunto você for dar o enfoque de duas ou três maneiras diferentes, você não vai... nunca completar o programa.

O _ E nunca aconteceu de surgirem outros enfoques, e para aquele aluno, ou para aqueles alunos, ter que falar alguma coisa? Ou não?

Su _ Ah! É raro! É raro.

Eles não conseguem nem questionar a teoria mais simples, que você fica esperando que eles questionem, eles não questionam.

(...)

(6ª Parte):

O _ Em relação a limite, derivada e integral...,você este ano tem uma turma de Matemática, mas você já deu isso para outros cursos, você vê diferença, em relação à sua postura, quando você está ensinando esses conteúdos em um ou em outro curso?

Su _ O que eu mudo minha postura no curso de Cálculo, por exemplo, no curso de Biologia e Ecologia, eu fujo muito mais da parte teórica. Eu sempre procuro entrar mais na parte teórica nos cursos de Matemática e Física, até Computação.

O _ Na parte teórica... você diz formalizar os resultados?

Su _ Isso. Por exemplo, um teorema importante você demonstrar em detalhes...

(...)

O _ Então você acha que: o que o aluno sai sabendo do curso de Cálculo na Biologia é diferente do que o aluno sai sabendo do curso de matemática? Ou é o mesmo a menos de ...

Su _ É o mesmo, mas eu diria menos aprofundado no curso de Biologia.

O _ Se você perguntar para um aluno da Biologia, você acha que ele vai ter a mesma resposta de um aluno da matemática...

Su _ Não. Porque o trabalho que você tem com um aluno de Matemática, Física ou Computação, por exemplo, você trabalha um ano, seis horas por semana, e então você tem tempo de amadurecer os conceitos. Enquanto que na Biologia e Ecologia isso é impossível, porque você dá em seis meses o curso de diferencial e integral.

O _ Então o objeto derivada, é um pouco diferente...

Su _ Sem dúvida. O que eu diria: o aluno de biologia, provavelmente saberia dizer a você talvez que a integral positiva representa uma área e calcular; derivada...talvez calcular. Agora, o conceito de derivada, a derivada como limite, a secante se aproximando da reta tangente, dificilmente ele vai ter este conceito bem formado!

(...)

(7ª Parte):

O _ Quando é que você agora, no final do curso para os alunos de Matemática, vai falar da definição formal de limite?

Su _ Eu vou aproveitar a deixa quando eu der seqüências e séries, quando eu disser: quando é que uma seqüência converge? Aí eu vou entrar com épsilon, no caso aí não é delta, é um índice n_0 ... Mas aí eu vou aproveitar e... Isso aí é meu, não existe no programa... não tá claro...

O _ Inclusive já pensei em um curso de Cálculo começando por seqüências e séries...

Su _ Eu quando fiz Cálculo, eu fiz assim, o curso inteirinho montado em cima de seqüências, é um outro caminho... E aí, quando eu der convergência de seqüências, eu vou aproveitar para voltar um pouquinho.

O _ Em limite.

Su _ Isso, o que é que está aqui por trás? Limite! Então o que seria com esse enfoque a noção de continuidade? Vamos pensar um pouqinho numa maneira formal de dizer que a função é contínua num ponto.

O _ Você que já deu essa definição... em Análise também, você acha que o aluno esbarra nos quantificadores, em relação a intervalos? Ou na definição de módulo?

Su _ Eu acho que é a relação com os quantificadores. Tipo: dado um épsilon, existe um delta, eu acho que esta relação é difícil para eles. Aí eu acho que o importante é você fazer bastante exercício prático mesmo. Tome uma função e mostre... É só escolher uma função legal... volte lá no domínio, veja qual é o delta que serve, diminua o épsilon para eles notarem como o delta está variando... isso é muito importante.

O _ Você acha que eles esbarram nestas dificuldades...

Su _ *Ah! Eu acho. Porque naquela parte* $|f(x) - L| < \varepsilon$, *como eles já trabalham no comecinho do* Cálculo com desigualdade.. Você dá valor absoluto... Até você ensina que isso significa que

$f(x - L)$ está entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$. Você trabalha com módulo.

O _ Essa parte de módulo, você achou que para eles...

Su _ É difícil para eles, é difícil! Falou em valor absoluto, eles se perdem um pouco!

O _ Por que será ?

Su _ Olha, eu tive uma experiência com um aluno que... eu pensei: "vou ficar a manhã toda com este aluno, mas vou tirar essa dúvida". A dúvida dele era: "por que que se o x for negativo, aqui [mostra a definição: $|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$] fica $-x$, e como é que aqui aparece "menos" se o valor absoluto é sempre positivo? " Na cabeça deles "menos alguém" é negativo.

O _ Sim, claro. Notei por várias vezes este problema da variável.

Você trabalha também a definição de módulo como potência?

Su _ Como assim?

O _ $|x| = \sqrt{x^2}$? [escreve].

Su _ Sim, sim. E isso...

O _ E eles têm dificuldades?

Su _ Sim, têm. O porquê que sai o módulo. *Você tem que trabalhar muito. Eles simplesmente vão* dizer que $\sqrt{x^2}$ é x. Eles esquecem...Eles não se preocupam com o sinal *da raiz*. É a velha história, se x não carrega nenhum sinal, para eles é positivo.

(...)

Su _ Por exemplo, se você tem $\lim\limits_{t \to +\infty} t^n$, e você não sabe quem é n, eles ignoram se n é positivo ou negativo. Eles simplesmente não conseguem perceber que ali pode ter um "jogo" de sinal.

O _ Ou seja, o sinal da variável é uma coisa que para eles parece escondida.

Su _ Fica. Nossa!

O _ Você acha importante então esses modos diferentes de falar ? [referindo-se aos três modos de *tratar módulo: como desigualdade (distância), como função ou como* $\sqrt{x^2}$] Ou você acha que deve centrar em algum...?

Su _ Não, você precisa de todos. Ao longo do curso você explora todos.

(...)

(8ª Parte):

O _ E quando você introduz e explora os assuntos de limite, continuidade... Você faz bem pelo lado gráfico..., ou você acha melhor dar a definição e depois fazer um gráfico de suporte?

Su _ Não. Eu uso demais... desenhos. Acho importantíssimo. Se você vai, por exemplo, dar a idéia por 'épsilon e delta', se você não for num desenho e mostrar... Como ele vai perceber o que está acontecendo?

(...)

Su _ Eles [referindo-se aos alunos] têm que sentir as dificuldades. Enquanto você está falando eles não sentem dificuldades com nada.

O _ Eles estão quietos, ouvindo.

Su _ Ouvindo, aceitando... Não se preocupam em que é fixo, que é variável... Você tá dando tudo de graça. A partir do momento em que você dá o exercício para eles fazerem, eles vão ter que se encaixar na teoria... Aí você vai ver quais as dificuldades.

Por exemplo, eu estou dando Fórmula de Taylor, $f(x) = p(a) + r$ [escreve e fala]. Eu notei isso, eles não sabiam quem era o $\underline{a}$, como tomar o $\underline{a}$. ...

O _ E você já havia falado nisso ?

Su _ Falei, demonstrei, fiz exercício.

O _ Como você detectou isso?

Su _ Passei o exercício e fui de passando de carteira em carteira.

(...)

Su _ Enquanto você está explicando eles não perguntam, e olha que é final do ano, eu já cansei de pedir para eles questionarem! Mas não perguntam quase nada, e, na hora do exercício você vê que ... [mexe a cabeça negativamente] Quem é o ponto fixo... Quem é o ponto próximo... [torna a mexer a cabeça negativamente de um lado para outro].

O _ Você já inverteu alguma vez? Dar o exercício e depois a explicação? Poderia tentar ao contrário?

Su _ Depende da teoria...

O _ Você acha que mesmo assim valeu...

Su _ Não, mas antes disso eu faço passo a passo, tipo, eu induzo eles a pensarem: "qual é o polinômio de menor grau que você possa imaginar que se aproxima da função? Ai eu dou um tempo... E..., é minoria, mas eles dizem.

(...)

O _ E, uma maneira de notar as dificuldades dos alunos é quando eles estão fazendo uma atividade...? Ou nas provas?

Su _ Bom... nas provas é fatal, mas quando eu vejo muito é quando eu passo de carteira em carteira. Passando na carteira eu acho que funciona, passando um exercício e dando dez minutos, eu vou ter a chance de passar por muitos alunos.

O _ Questioná-los ?

Su _ É... eu passo e olho o que eles estão fazendo, para não atrapalhar. E, nisso eu vejo, que às vezes eles comentem erros que jamais passou pela minha cabeça...chamar a atenção para aquilo.

(...)

Su _ O problema do Cálculo, para terminar, é que em geral você tem muito aluno em sala.

O _ Em que você acha que menos aluno ajudaria?

Su _ Ajudaria?! Pôxa! Eu, por exemplo, no meio do curso daria um tópico para cada um... Eu não daria o curso todo, eu não faria assim. Acho que o professor na lousa... colocando a teoria pela primeira vez que eles... acho importante. Porque ler, pegar um livro e abrir e entender... acho que um aluno do primeiro ano não vai conseguir muito bem. Talvez no final do ano, talvez. Então o papel do professor na lousa é importante.

Agora, com pouco aluno, eu daria de vez em quando um texto para cada um expor na lousa. Nem que fosse por quinze minutos para ele colocar. Mas ele teria o trabalho de entender aquilo na íntegra... Porque ele não tem esse trabalho enquanto você está expondo na lousa, ele é passivo e não percebe se entendeu ou não. Ele vai perceber, talvez, na hora de fazer o exercício. Agora, se ele fosse na lousa e fosse questionado pelos colegas sobre o que ele está falando... eu tenho a certeza que iria ter uma postura diferente de como estudar. Ele aprenderia de certa forma como estudar. Ele ia ser questionado de uma maneira diferente, ali na hora. Acho que o aluno aprende muito.

O _ Você acha que ele aprenderia mais com isso?

Su _ Sem dúvida.

O _ Obrigada. ______________ XXXXX ______________

ANEXO 2

Transcrição de gravações ('audio') durante algumas das atividades dos alunos em sala de aula.

2.1 - UNESP- Rio Claro

Disciplina de Cálculo I — **O** - Observadora (pesquisadora)

Turma de Física — **A_1, A_2, A_3** - Alunos (trabalho em grupo).

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Os alunos tinham por atividade um exercício do livro texto que pedia a equação da reta tangente à curva em um ponto dado, e também os pontos onde a reta tangente é horizontal].

O- Como é que vocês fizeram? como é que vocês encaminhaream o raciocínio na letra (d) ?

A_2 - Na letra (d)? A gente repetiu o da letra (a). O que a gente fez na letra (a)? A gente pegou... dada a equação... ele deu aqui a funçaõ da trajetória. A gente pegou e derivou isso aqui [apontando para a equação de 2º grau]. Achamos y'. Como ele deu as coordenadas (1,2) , x e y . Só que a gente achou y'. Então a gente substituiu o x .

O - E prá que você achou y' ?

A_2 - y' é a derivada...é a derivada desta equação, que é o coeficiente angular da reta tangente, nesse ponto dado. Aí a gente substituiu, achou y', e nessa equação [aponta a equação de reta : $y = y_0 + m(x - x_0)$] a gente substituiu e encontoru a equação da reta.

O - Que reta?

A_2 - Da reta tangente... nesse ponto [aponta (1,2), o ponto dado no enunciado]. Aí, encontrando a equação da reta...fazendo para y = 0, para encontrar o ponto em x... [perdeu-se na explicação]

A_1 - E da tangente horizontal?

A_3 - Está pedindo [olha o exercício] "os pontos".

A_1 - Eu acho que é um só. Porque se é da parábola...

A_2 - Se tá pedindo "o ponto" eu acho o x do vértice [passa o dedo no vértice da parábola esboçada, parece raciocinar gráficamente].

A_1 - Porque ele [indica o exercício] está pedindo: determine "os pontos" em que a tangente à curva é horizontal. Mas tem só esse ponto [aponta para o vértice].

O - Porque lá [aponta o vértice] a tangente é horizontal?

A_1 - Porque o coeficiente angular da tangente, a derivada, é zero.

A_3 - É...

O - Você A_2 falou que é no ponto de ma´ximo, por que? Tem que explicar porquê.

A_1 - Porque não tem inclinação. Lá não tem derivada...Então pode colocar uma resposta genérica?...Quando a derivada é zero. Ou tem que achar...

O - Ele quer que você "determine" [enfatiza a última palavra dita], o que é "determine"?

(...) [Há dispersão do assunto, conversam outras coisas]

O - E aí?! Pode ser máximo da curva...? Você falou que é o ponto de...[dirigindo o olhar a A_2].

A_2 - Vértice da parábola.

O - Por que ele vai ser o ponto máximo? Vai ser o ponto em que a reta tangente é horizontal...?

A_2 - Porque a derivada neste ponto é zero.

O - Então escreve.

[Os alunos se embaraçam para fazerem as contas algebricamente, para descobrir o ponto. Ficam em dúvida se tomam a equação da curva, da deivada ou da reta tangente encontrada.

A_1 - Temos que provar que aquele [aponta o vértice da parábola] é o ponto

O - Você não tem como determinar?

[Após algum tempo, com ajuda de todos, conseguem determinar o ponto em que y' é zero, algebricamente, manipulando as equações e igualando a derivada encontrada a zero]

O - E esse x é o x que vocês falaram...do vértice?

[O aluno A_2 checa na equação da parábola, e explica a A_1 que é só encontrar o ponto médio entre as raízes, e conclui, geometricamente "por ser parábola", sem usar derivada.]

__________xxxxxx.....xxxxxx__________

2.2 - UNESP- Rio Claro

Disciplina de Cálculo I — O - Observadora (pesquisadora)

Turma de Física — A_1 , A_2 , A_3 , A_4 - Alunos (trabalho em grupo).

[OBS: Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Os alunos tinham por atividade exercícios de calcular diferenciais *dw* onde w = g(y), y = h(z) e z = f(x), funções encadeadas] .

O - O que é dw ?

A_1 - w é sen y . Então dw é...você vai aqui e vê [mostra as fórmulas de diferenciais]: cos y dy.

[E assim vai... Faz os cálculos juntamente com os demais do grupo].

[Surge a pergunta :]

A_2 - Eu queria saber por que estamos trabalhando com isto? [aponta a ficha de atividades com uma tabela de diferencias].

O - [Reforço a pergunta] Então...!? prá quê que você trabalha com diferencial?

A_1 - Isso... Seria a mesma coisa que o Δy? Ou não?

O - [Transfiro a pergunta para A_2] Você acha que é o mesmo que Δy?

A_2 - Eu acho que é.

A_3 - Eu não.

O - Você [A_2] achou que é o mesmo. Ela [A_3] acha que não. E agora? E você A_4? O quê que é Δy? Você lembra no gráfico o quê que era?

A_2 - Prá mim Δy é a derivada.

O - Que é dy? Ela falou que é Δy.

A_1 - Mas deixa eu falar: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ num gráfico de "espaço X tempo", entre dois pontos, temos velocidade média como o coeficiente da reta secante. Mas aqui, no gráfico da função f, temos quociente de Newton.

O - E qual a relação desse quociente de Newton com a derivada?

A_1 - Com o quociente de Newton eu tenho o coeficiente da reta secante. Se eu "fizer" o coeficiente da reta tangente vou ter derivada.

O - Graficamente qual a diferença do df ou dy para o Δy?

A_1 - Nenhuma.

A_2 - Δy é $y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$.

O - E esse aqui [mostro Δy no gráfico apresentado] é igual a esse dy [aponto dy no gráfico] ?

A_1 - Não. Esse [aponta o Δy] é maior.

[Termina o tempo de trabalho em grupo, percebe-se que existem muitas dúvidas].

xxxxx......xxxxxx

2.3 - UNESP- Rio Claro

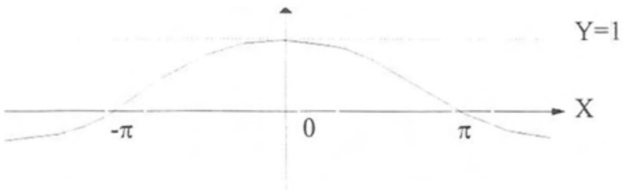
Disciplina de Cálculo I — **O** - Observadora (pesquisadora)

Turma de Física — **Jou** , **Nat** , **Raf** , **Ped** - Alunos (trabalho em grupo).

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Os alunos tinham por atividade calcular $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$] .

Jou - Fiz na calculadora e deu... Limite desse valor aí..., quanto mais zeros eu colocar mais perto vai chegar do valor no gráfico aqui [e aponta para a imagem no zero do gráfico que fez da função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$].



Raf - Mas nunca vai ser 1.

Nat. Mais aí você está justificando por infinitésimos. Encaminhamento 3 [dado pelo prof. na folha de atividades].

(...)

[este aluno já havia tentado calcular $\frac{\text{sen } 0}{0}$ e visto a mensagem de ERRO na calculadora].

Raf. Prá ser pelo gráfico tem que justificar porque vai ser 1.

Jou - Eu tentei provar, eu juro que tentei com valores próximos de zero. Como vou provar?! Vou dizer que fiz na calculadora?

(...)

[Após algumas tentativas pelo gráfico e pela calculadora]

O - S(0) é igual a quanto? Já têm um valor? [Onde S(Δx) = $f(x)$ = $\frac{\text{sen} x}{x}$].

Raf - S(0) é igual a 1(um) [fala olhando o gráfico esboçado]

Nat - Deixa eu ver então... substitui aqui por zero [fala apontando o Δx na função S] e faço $\frac{\text{sen} 0}{0}$?

O - Então?

Nat - mas aí não dá um.

O - Dá quanto?

Nat - [Olha para o gráfico e para a calculadora] Dá ERRO.

Jou - mas a gente pode distinguir... É porque você tá mandando a calculadora dividir por zero, aí não pode. A calculadora não sabe que você tá calculando um limite, entendeu?

(...)

Raf - Eu posso dizer que quando colocar $\Delta x = 0$ e dividir por zero, a máquina não dá 1, mas é 1. Essa é a maior discussão do Cálculo.

(...)

Jou - Que dá 1 eu sei que dá 1. Mas, por que?

[O aluno **Raf** não estava contente com a justificativa da aproximação pelo gráfico ou pela calculadora. Os outros três alunos do grupo tentam convencê-lo e a si mesmos.]

Raf - Bom por exemplo eu vou jogar o valor Δx = 0,0001, e calcular $\frac{\text{sen}\, 0{,}0001}{0{,}0001}$, é igual a

0, 9999998

[E continua a fazer cálculos com valores menores que 0,0001].

Raf - Aí. Deu quase 1, cara!

Jou - E, se a gente jogar um valor menor vai dar mais aproximado ainda.

Raf - Vai dar mais noves ainda.

O - E, onde você está aqui? [Aponto para o gráfico de $S(x) = \frac{\text{sen}\, \Delta x}{\Delta x}$]

Raf - Me aproximando... quase em cima do zero, não dá nem para marcar aí o ponto. Conclusão: _ Dá 1. Dá 1 cara!

(...)

[**Jou** diz de outro modo]

Jou - Porque o seno de um ângulo pequeno é o próprio ângulo.

Raf - É... Tem essa também.

Raf - Vamos seguir o encaminhamento? A sugestão de **Jou** ?

[O prof. chega neste momento ao grupo, observa, e diz: "Se você fizer tudo bem pequenininho (aponta a figura do encaminhamento 3) você vai chegar a isso..." (aponta figura desenhada na mônada onde o seno do arco é o próprio arco)].

Raf - Vamos dar esta explicação então.

(...)

Jou - [Lê o que escreveu] Quando *x* é muito próximo de zero - infinitésimos -, *sen* Δx é igual a Δx e um divido pelo outro é igual a 1.

(...)

xxxxxx.......xxxxxx

2.4 - UNESP- Rio Claro

Disciplina de Cálculo I — **O** - Observadora (pesquisadora)

Turma de Física — **A₁** , **A₂** , **A₃** - Alunos (trabalho em grupo).

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Os alunos tinham por atividade calcular integrais indefinidas pelo método de substituição] .

A_1 - [Escreve: $\int \frac{x}{(x^2+5)^3}dx$]

A_2 - Foi o que a gente fez. [Com referência a aula anterior. E escreve:]

$$\int \frac{x}{(x^2+5)^3}dx = \int \frac{1}{v^3}.\frac{1}{2}dv$$

A_1 - [Que escreveu $\int \frac{x}{(x^2+5)^3}dx = \int \frac{x}{z^3}dx$, fala olhando para o que **A_2** fez:] Então, foi o que fiz!

A_2 - [Olhando para o que **A_1** fez. Não. Eu não coloquei z aqui.

A_1 - Mas eu coloquei.

A_2 - Não, mas não pode. Como pode ser z e x?

A_1 - Estou trabalhando z, é isso daqui [aponta para a expressão (x^2 + 5) no denominador.

A_4 - então ...z é isso, tudo bem. Seu dx você vai ter que trocar por dz.

A_2 - Olha aqui ...óoo! [aponta para a mistura de variáveis de **A_1**]

A_1 - Ah é! Não pode mais ter esse x.

(...)

A_1 - [Escreve:] z = x^2 + 5, [diz:] meu z.

A_4 - Qual é seu dz?

A_1 - Ah..!! Tá! dz é a derivada de z. [Escreve:] dz = 2x dx.

(...)

A_1 - Ah...!! "Saquei! Saquei!" Isso eu coloco aqui. [Escreve:]

$$\int \frac{x}{(x^2+5)^3}dx = \int \frac{1}{z^3}2dz.$$

A_4 - Não. Seu "2" passou prá baixo.

(...) [Passo a passo, seguido pelos colegas do grupo, **A_1** finalmente escreve:]

$$\int \frac{x}{(x^2+5)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^3}dz$$

[e depois de algumas discussões conseguem resolver o exercício proposto].

[Os alunos resolvem as integrais por cálculo de primitivas, sem se peocuparem muito com o método, mas falando e constiuindo as justificativas através da operação inversa da diferenciação, usando o tempo todo o fato de que $\int dw = w + C$].

__________xxxxxx.....xxxxxx__________

2.5 - UNESP- Rio Claro

Disciplina de Cálculo I — **O** - Observadora (pesquisadora)

Turma de Física — **A_1** , **A_2** , **A_3** - Alunos (trabalho em grupo).

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Os alunos tinham por atividade esboçar gráficos, por exemplo de

$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1}$, sem usar só tabela, empregando "soma" dos gráficos de: $y_1 = x^2$, $y_2 = x - 6$, e $y_3 = x^2 - 1$, e também informações obtidas através das derivadas primeiras das funções escolhidas].

[Primeiro fazem os gráficos de y_1, y_2, e y_3 em um mesmo par de eixos. Depois combinam o que fazer].

A_1 - Agora temos que "juntar", não podem ficar separados.

A_2 - Exatamente.

A_1 - Então vai, **A_2**, primeiro trace os gráficos.

[**A_1** discute com os outros. Resolvem traçar as parábolas

$y_1 + y_2 = x^2 + x - 6$ e y_3 para depois tomarem o quociente delas].

[Após muitas discussões de como somar e qual o resultado da soma em alguns pontos, bem como o que fazer para terem o quociente, eles conseguem um "esboço razoável". Então se dão conta de que não usaram derivada, e começam a fazer os cálculos utilizando regras de derivação diretamente, mas a aula termina].

__________xxxxx......xxxxx__________

ANEXO 3

Transcrição de gravações ('vídeo') de atividades de grupos de alunos em sala de aula.

2.1 - UNESP- Rio Claro

Disciplina de Cálculo I **O** _ Pesquisadora

Turma de Física **Dan** , **Gib** , **Nor** _ Estudantes (em grupo A, GA).

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema em voz alta]:
1º Problema gerador:
Comentem entre si e escrevam o que vem mais de imediato em seus pensamentos se peço a vocês para pensarem no que aprenderam de importante a respeito de derivada de uma função.
OBS: Se for mais de uma referência, e se acharem que há ordem de importância, favor mencioná-la. Também ao contrário, se acharem que não há.

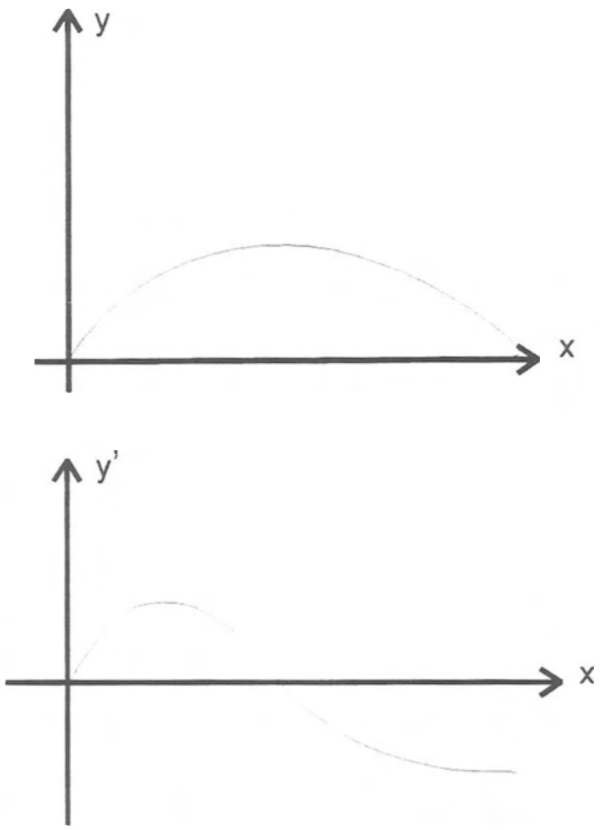
Dan - O que que vem de imediato?

Gib - Derivada é o coeficiente angular da reta tangente. Isso vem de imediato.
Se você tiver um gráfico espaço por tempo e você vai calcular a derivada você vai ter velocidade, e se for de velocidade por tempo e você calcular a derivada você vai ter aceleração.
Dan - O mais imediato eu acho que é a derivada como coeficiente da reta tangente que o professor fixou mais com a gente e ..."insiste" em mencionar. Escreve ai ... [fala para **Gib**].

[O aluno **Gib** escreve a frase: "A derivada é o coeficiente angular da reta tangente", como podemos observar também na folha que entregaram e no vídeo].

Nor - Depois vem a interpretação de gráfico.
Gib - Então. A gente pode fazer um gráfico aqui e tentar interpretar.
[**Nor** desenha um gráfico de espaço por tempo, **Dan** e **Gib** também, só que **Dan** coloca as letras x e y nos eixos em vez de s e t como **Gib**].

[Ao traçar seu esboço gráfico, **Dan** já toma um segundo par de eixos logo abaixo do primeiro, transferindo as abcissas, valores de x do gráfico anterior, e tomando como valores para as ordenadas as "inclinações" que dizem ser: mais positivas, nulas ou negativas dependendo dos pontos tomados].



[Só falam em reta tangente e na interpretação física como velocidade instantânea].

Gib - No meu gráfico tomei um ponto P e queria saber a velocidade instantânea no ponto P. A velocidade instantânea neste ponto é dada pela derivada.

Tomando uma paralela a partir do ponto P, ao eixo x, e traçando uma perpendicular a essa última reta, encontrando a reta que tangencia em P, eu vou ter um Δy, um número, e um Δx um número também. E a derivada vai ser $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, no caso seria a velocidade instantânea no ponto P.

Dan . Que é a própria derivada.

Gib - Que é o coeficiente angular da reta tangente em P.
Dan - É.

Gib - Se fosse um gráfico de velocidade por tempo, teríamos aceleração.
Dan - Na parte física, só.

Gib - É. Se eu fosse fazer uma interpretação matemática aí é o coeficiente angular da reta tangente. Prá Física é a velocidade instantânea no ponto P.

[Um dos estudantes lê o 2º problema]:

2º Problema gerador:

Sendo f uma função, como por exemplo $f(x) = x^2$, qual o modo que vocês mais usam para pensar e explicar para alguém o cálculo da derivada desta função num ponto de abcissa x_0 sabendo que ela é o "coeficiente angular da reta tangente" ao gráfico da função neste ponto?

Gib - Acho que primeiro é interessante fazer um gráfico da função, né?!

[Os estudantes fazem gráficos e tomam um ponto x_0].

Dan - A gente coloca onde quiser o ponto x_0 ?

O - E o que é a derivada em x_0 ?

Dan - Então vou colocar x_0 aqui [e aponta no gráfico, traçando a seguir a reta tangente]. Se colocar aqui vou ter uma inclinação assim da reta tangente.

[E escreve: $f'(x) = 2x$, tomando o gráfico de f ' como uma reta].

O - Qual seria a expressão da derivada? Como é que calculariam?

[Os alunos continuam a fazer gráficos e a pensar a partir deles].

Dan - Graficamente eu vou ter uma reta. Agora...se eu derivar isso daí, x^2, dá 2x.

(...)

O - Por que a derivada é 2x ? Eu quero que vocês tentem explicar.

Dan - Então. Porque a gente vai...Vai pegando retas tangentes ao longo desse gráfico e vai vendo a inclinação dessa reta, e assim a gente pode desenhar o próximo gráfico, da derivada já...

(...)

O - Por que que é 2x? Como você pode explicar?

Dan - Aí é complicado!

Nor - Tem derivada por Newton. [Fala para os demais].

Dan - Por limite? Virgiii...!

[**Gib** tenta encontrar algo nos apontamentos de aula, nas fichas de encaminhamentos dadas pelo professor].

Dan - Ah! Eu não consigo fazer assim. Eu acho que tem que fazer através do gráfico.

(...)

Nor - Através do gráfico você não tem como demonstrar que é 2x.

(...)

[Todos procuram nas fichas de encaminhamentos das atividades já dadas em sala de aula].

Gib - Na FT 06, aí gente. É eu acho que é por aí. Temos que aplicar o quociente de Newton prá chegar nisso aí.

Dan - Limite, né?!

Gib - Pelo quociente de Newton nós temos que aplicar $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ fazendo Δx "bem pequenininho".

[Resolvem e encontram a derivada, discutindo as substituições e algebrismos].

[Um dos estudantes lê o 3º problema]:

3º Problema gerador:

Vocês poderiam ter feito o problema anterior de outro modo? (Destaquem se houver diferença entre vocês) Se há ou não diferença com o modo que resolveu o problema anterior, vocês poderiam dar alguma(as) razão(ões) para a escolha feita anteriormente?

Dan - Outro jeito...?

Nor - Um outro modo seria geometricamente, tentear graficamente.
Gib - Concordo com **Nor** que poderia ser através do gráfico.
Dan - Mas como eu poderia descobrir o "2x" através do gráfico?

[**Gib** se enrola tentando explicar, confunde-se calculando $\Delta y/\Delta x$ para alguns pontos, confunde coeficiente angular da reta tangente à curva (que varia) com o coeficiente 2 da reta $y = 2x$, porém diz que é possivel de ser feito em cada ponto e provar que o coeficiente é o mesmo].
Dan - Podemos então fazer só geometricamente, através de tangentes.

O- E na FT 06, tem mais alguma coisa a respeito?
Gib - Eu não observei.
[Pega a ficha de trabalho para olhar].
Dan - Tem a parte de infinitésimos.

O - Como assim?
Dan - É...quando a gente observa o ponto que a reta tangente está... em cima do gráfico, você ampliando isto, você vê um infinitésimo, um dx e um dy.

(...)
O - Isso aí seria um outro modo para fazer ou não?
Gib - Seria um outro modo de pensar.
Dan - Acredito que seria a mesma coisa.

[Falam a respeito de que os dois modos são válidos, mas sempre se referindo a limite. Não falam a partir de infinitésimos em momento algum].
Dan - Pediu assim: escolha uma maneira de explicar derivada. A mais palpável, que a gente vê, é por limite. Através de infinitésimos é uma coisa meio incompreensível. E limite é uma coisa mais natural, desde o segundo grau você já vê este conceito.

(...)

[Um dos estudantes lê o 4º problema]:

4º Problema gerador:

Um depósito de farinha está furado no fundo, por onde estão escapando, durante cada minuto, 1/200 avos da quantidade de farinha existente no depósito. Inicialmente a quantidade de farinha era de 800 kg.

(a) Quantos quilos de farinha escaparão em 5 minutos?
(b) faça um gráfico da quantidade de farinha no depósito em função do tempo.
(c) Vocês acham que é possível prever que o depósito se esvaziará, ou não? Tente escrever uma justificação.

Nor - Isso é problema de taxa.
Dan - Taxa de variação. Na verdade uma exponencialzinha.

Gib - Mas, não dá para resolver de modo mais simples isso aqui?
Dan - Não sei, vamos tentar.

[Fazem as contas minuto a minuto até o quinto, e a seguir um gráfico contínuo de t (tempo) por m (kilos) de farinha, marcando valores de t=0 a t=5. **Dan** chega a se referir a um outro modo de fazer, por taxa novamente, mas não se lembra como. Dão por encerrado.]

2.2 - UNESP- Rio Claro

Disciplina de Cálculo I **O** _ Pesquisadora

Turma de Física **Ton** , **Lia** , **Lis** - Estudantes (em grupo B, GB).

[OBS: Os parênteses (...), entre linhas, indicam que houve corte na transcrição. Os escritos entre colchetes são elucidações da observadora sobre as ocorrências que as falas não traduzem ou deixam não muito esclarecidas].

[Um dos estudantes lê o problema em voz alta]:
1º Problema gerador:
Comentem entre si e escrevam o que vem mais de imediato em seus pensamentos se peço a vocês para pensarem no que aprenderam de importante a respeito de derivada de uma função.
OBS: Se for mais de uma referência, e se acharem que há ordem de importância, favor mencioná-la. Também ao contrário, se acharem que não há.

Lia - Em primeiro lugar...derivada de uma função é o coeficiente angular da tangente no ponto.
Ton - Da reta tangente ao ponto.
[**Ton** torna a ler a pergunta do problema. "O que vem de mais imediato a seus pensamentos sobre derivada?..."].
Lis - Coeficiente angular.
Lia - Isso quando se trata de um gráfico, né?!
[**Ton** e **Lia** desenham um gráfico e uma reta tangente num dos pontos].
Lia - Tem uma função. Tem um gráfico.
[Desenham].
Lia - Essa reta tangente expressaria a derivada nesse ponto. Se...
Ton - Mais que isso. Você pode pegar uma posição x e seu correspondente f(x) . Uma x+h e f(x+h) . Por Newton.
Lis - Limite do quociente de Newton.
Ton - Isso. Limite do quociente de Newton.
[Escreve:]

$$\text{Coef. Newt.} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (*)$$

Lia - Quociente de Newton.

Ton - Isso aqui [aponta (*)] é o coeficiente angular de uma reta secante. Na verdade você tem uma reta secante pegando dois pontos.

Lia - Isso. Dois pontos do gráfico.

Ton - Aí quando você fizer h tender a zero, h diminuindo, você vai ter a derivada que é o coeficiente angular da reta tangente no ponto.

Lis - É isso aqui. [Exibe seu desenho]

Lia - dh no caso. Você tá entendendo o "h"... Ele vai se tornar uma coisa infinitesimalmente pequena.

E para derivada de uma função, por exemplo $y = x^2$, você diferencia $dy = 2x.dx$ ... então derivada vai ser $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Lis - A derivada de x^2 é $2x$, a diferencial de x^2 é $2x.dx$.

[Escreve:] $Dx^2 = 2x$ $\quad f'(x)$

$dx^2 = 2x\,\boxed{dx}$

Ton - [Indica o dx no quadradinho] esse é o diferencial.

O - Qual é a diferença?

Ton - Trata-se de coisas muito pequenas, infinitésimos, por isso que tem esse dx aqui.

Lia - Um incremento. Um incremento de x .

[Passam ao 2° problema, e um dos estudantes o lê em voz alta].

<u>2° Problema gerador</u>:

Sendo f uma função, como por exemplo $f(x) = x^2$, qual o modo que vocês mais usam para pensar e explicar para alguém o cálculo da derivada desta função num ponto de abcissa x_0 sabendo que ela é o "<u>coeficiente angular da reta tangente</u>" ao gráfico da função neste ponto?

Lia - Desenvolver isso aqui [e aponta para o quociente de Newton que Ton havia escrito no 1° problema].

Ton - No caso vai ficar [E escreve discutindo com os outros dois:]

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x = D(x^2) = f'(x) = 2x$$

Lia - E 2x ... Seria a equação da...

Ton - No nosso caso...

Lia - 2 é o coeficiente angular ...2x.

Lis - 2x. E, respondendo à pergunta então..."o modo que a gente ia usar é pelo quociente de Newton.

Ton - É. Praticamente, acho mais fácil de ver e explicar para alguém.

O - Mas teria outro?

Ton - Na verdade eu já ouvi algumas explicações... Isso é por Newton, mas você também poderia imaginar...na verdade aqui v. está fazendo h se aproximando [mostra dois dedos se aproximando do ponto x_0], v. poderia imaginar ao contrário como se fosse uma "bolota",

crescendo, ou alguma coisa crescendo isso aqui [mostra a curva em trono do ponto], se expandindo...
O - E aí?
Ton - Eu não saberia como equacionar isso.
O - Seria o que ele [referindo a **Lia**] falou de infinitésimos?
Ton - Acredito que sim, seria por infinitésimos. Eu consigo visualizar os infinitésimos melhor na integração, mas nas derivadas...
(...)
O - O que vocês entendem por infinitésimos?
Ton - Como assim?
O - Quando você fala: "é um infinitésimo", que vem na sua cabeça?
Lia - Uma coisa infinitamente pequena, que dá para somar e ter um valor exato [refere-se a uma área que desenha, com soma de retângulos infinitesimais. Não falam mais nada].

[Um dos estudantes lê o 3º problema]:

<u>3º Problema gerador</u>:

Pensem e discutam sobre $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, digam quais das frases abaixo se adequa melhor e porquê?

(a) à medida que *n* tender a infinito, 1/*n* tende a zero;
(b) quando *n* for infinito, 1/*n* será zero;
(c) 1/*n* pode se aproximar cada vez mais de zero se tomarmos *n* cada vez maior;
(d) o inverso de um valor infinitamente grande é um valor infinitamente pequeno, logo o inverso de infinito é zero.

Ton - 1/*n* quando *n* tende a zero...
Lis - Eu entenderia se fosse *n* tendendo a infinito.
O - Então pense assim.
Ton - Reformou então?... *n* tá tendendo ao infinito?
Lia - Isso.
Ton - Tá, então *n* tá tendendo ao infinito.
[Falam e comentam entre si sobre o enunciado]
Lis - Você nunca vai ter infinito.
O - Como?
Lis - Você nunca vai poder falar: "esse número é infinito, então o inverso dele é zero".
[**Lis** e **Lia** apontam algumas das frases do enunciado do problema concordando e outras rejeitando]
O - Vocês poderiam dar uma razão porque escolheram algumas e jogaram outras fora?
Lia - Sim. Aqui ele fala de valor... [Aponta (d), e passa o dedo para a resposta (b)] No (b), no (b).
Lis - Como na letra (b) ele fala "quando *n* for infinito 1/*n* será zero"..., *n* nunca será infinito.
Ton - Ele vai tender a infinito. Não dá para usar o conceito de infinito como algo estático, parado. Tem que ser uma coisa...que está tendendo.
Lia e **Ton** - Eu acho a (c) mais clara.
[Dão por respondido.]

[Um dos estudantes lê o 4º problema]:

4º Problema gerador:
Um depósito de farinha está furado no fundo, por onde estão escapando, durante cada minuto, 1/200 avos da quantidade de farinha existente no depósito. Inicialmente a quantidade de farinha era de 800 kg.

(a) Quantos quilos de farinha escaparão em 5 minutos?
(b) faça um gráfico da quantidade de farinha no depósito em função do tempo.
(c) Vocês acham que é possível prever que o depósito se esvaziará, ou não? Tente escrever uma justificação.

Lia - É uma taxa de 800 kg por minuto. É uma taxa de vazão da...farinha.
Ton - Num tempo.
Lia - Quer o volume exato, dQ/dt [escreve] naquele momento. Seria isso. [Fazem cálculos]
Lia - 4 kg é a taxa de vazão da farinha do depósito por minuto.
O - A cada minuto vaza 4?
Ton - Seria isso.
Lis - Acho que tá estranho porque vaza 1/200 avos da quantidade de farinha que está no depósito e após o primeiro minuto não vai ter mais 800 kg.
Ton - É verdade... Então 4 kg é no primeiro momento.
Lia - Depois vai vazar menos.
(...)[pensam]
Lis - Um segundo depois já não vai ser mais...
[Discutem]
Lia - Então que função poderia expressar isso?
Peso por uma quantidade... alguma coisa em função de t . Exponencial?
[Escrevem:]
Lia - $\frac{dQ}{dt} = \frac{-1}{200}Q(t)$, uma taxa.
(...)

O - Mas Q é uma quantidade?
Lis - Q é uma variável.
O - Que variável é essa?
Lia - Quantidade de farinha no depósito.
O - Então que quer dizer dQ/dt ?
Lia - A taxa de variação é 1/200 de Q_0.
O - De Q_0, inicial?
Lia - Não, de Q.
(...)

Ton - Acho que inicialmente vaza devagar.
Lia - Não, inicialmente...
Lis - Vaza 4 kg por minuto, **Lia**. Só que 1 segundo depois, diminue.
Lis - Vaza menos, cada vez menos.
[**Lis** explica para **Ton**, com ajuda de **Lia**]
Lia - Qual é a função?
[Escreve:] $\frac{dQ}{dt} = \frac{-1}{200}Q(t)$ [Continua a escrever:]

$$Q = \int_0^5 -\frac{Q(t)}{200}dt \quad , \quad Q = \frac{-1}{200}\int_0^5 Q(t).dt$$

Se f é 5t então [escreve:] $Q = \frac{-1}{200}\int_0^5 5t.dt$, $Q = \frac{-5}{200}.\frac{t^2}{2}$

O - Quem é função do tempo?
Lia - A massa, a quantidade Q.
O - Vocês têm condição de encontrar Q?
Lis - Era para ter.
Lia - Se desse a massa em função de t ...
O - E a taxa? O que é uma taxa?
Lis - Uma derivada.
O - Então vocês têm a derivada de Q. Podem achar Q?
Ton - Integra.

[Discutem o que escreveram e os cálculos. Depois, com alguma interferência da observadora, escrevem:] $\frac{dQ}{Q} = \frac{-dt}{200}$, $\int \frac{1}{Q}dQ = \int \frac{-dt}{200}$

$$\ln Q = \frac{-1}{200}t \quad , \quad Q = e^{-\frac{1}{200}t}\Big|_0^5 \quad , \quad Q_{saiu} = 800 - \left[e^{\frac{-1}{200}t}\Big|_0^5 \right]$$

Ton - O gráfico seria de uma exponencial.

[Discutem e acabam por traçar, ainda que confusamente e de modo errado]
(...)

Lia - Queremos achar, por exemplo, onde Q = 0.

[Fazem cálculos para alguns valores utilizando calculadoras, escrevem esquecendo do sinal negativo:]

$e^{\frac{1}{200}t} = 800$, $\frac{1}{200}.t = \ln(800)$, $t = 200.\ln(800)$.

[Olham os gráficos e as contas (com seus erros) e concluem que o depósito se esvazia em um certo tempo.]
(...)