INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAIO LOPES RODRIGUES

PADRÕES MATEMÁTICOS EM OBRAS DE LEONARDO DA VINCI

Vitória
2015

CAIO LOPES RODRIGUES

PADRÕES MATEMÁTICOS EM OBRAS DE LEONARDO DA VINCI

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenadoria do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Rodolfo Chaves

Vitória
2015

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

R696p Rodrigues, Caio Lopes.
Padrões matemáticos em obras de Leonardo Da Vinci / Caio Lopes Rodrigues. – 2015.
97 p. : il. ; 30 cm

Orientador: Rodolfo Chaves.

Monografia (graduação) – Instituto Federal do Espírito Santo, Coordenadoria do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Vitória, 2015.

1. Matemática – História. 2. Geometria. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Arte – Estudo e ensino. 6. Leonardo, da Vinci, 1452-1519. I. Chaves, Rodolfo. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.
CDD 21: 510.9

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

COORDENADORIA DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAIO LOPES RODRIGUES

PADRÕES MATEMÁTICOS EM OBRAS DE LEONARDO DA VINCI

Trabalho de conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Licenciatura em Matemática, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 18 de agosto de 2015.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodolfo Chaves
Instituto Federal do Espírito Santo
Orientador

Profª Drª Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Me. Geraldo Cláudio Broetto
Instituto Federal do Espírito Santo

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Declaro, para fins de pesquisa acadêmica, didática e técnico-científica, que este Trabalho de Conclusão de Curso pode ser parcialmente utilizado, desde que se faça referência à fonte e ao autor.

Vitória, 18 de Agosto de 2015.

Caio Lopes Rodrigues

“Tu a quem tomei desde os fins da terra, e te chamei dentre os seus mais excelentes, e te disse: Tu és o meu servo a ti te escolhi e não te rejeitei. Não temas, porque eu sou contigo; não te assombres, porque eu sou teu Deus; eu te esforço e te ajudo, e te sustento com a destra da minha justiça." (Isaias 41: 9 e 10)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que me deu Seu fôlego de vida, e a Sua salvação, sendo meu socorro presente nos momentos de angústia, que me suscitou forças nos momentos de fraqueza, e que por Sua vontade elegeu-me dentre muitos para ser vitorioso.

À minha querida mãe, que me gerou, e antes mesmo do meu nascimento já me amava. Que nos momentos de consternação foi um pilar forte para não me deixar cair. Me sustentando em oração e em palavras de amor. Que nas suas dificuldades nunca deixou de dar seu inigualável amor, seu carinho, cuidado, e conselhos. É devido à ela, que hoje chego a esta vitória.

À minha tia, que não me gerou em seu ventre, mas em seu coração, dando-me todo seu amor, sendo para mim uma mãe. Seus cuidados e esforços para me ver feliz foram e são incalculáveis. De maneira especial cuidou de mim desde a minha tenra idade, e tudo que eu sou hoje eu devo à ela, por seu imenso amor inquestionável, e pelas suas orações, conselhos, e esforços para me fazer ser hoje o que sou.

À minha querida e amada avó, que sempre cuidou de mim, me deu seu grande amor de uma forma muito especial. Que deste pequeno tem me dado seus conselhos, tem me alegrado, quando caia me levantava, e quando triste suas orações eram incessantes pela minha vida. Acompanhando de perto a minha causa e abraçando-a carinhosamente.

Ao meu irmão que sempre esteve ao meu lado, que passou pelas mesmas dificuldades, mas nunca deixou de ser meu auxílio na vida e em oração à Deus. Sempre com palavras de ânimo e me alegrando nos momentos de tristeza.

À minha digníssima e amada namorada Fabiana, que em tão pouco tempo esteve ao meu lado me apoiando nos meus momentos de dificuldade, alegrando meu coração e me encorajando.

Em especial, em lembrança, quero agradecer ao meu avô Sebastião, minha avó Nery e minha bisavó Rosa (*in memorian*) que durante suas estadias aqui na Terra

nunca deixaram de cuidar de mim e sempre estiveram presentes dando-me seu amor de uma maneira muito especial.

Ao meu pai que me gerou e por momentos esteve ao meu lado e tem orado pela minha vida, que apesar de sua ausência em determinados momentos, nunca deixou de me amar.

À todos os meus familiares (Bravim, Pereira, Lopes, Módulo, Rodrigues e Corrêa) que sempre estiveram acompanhando o meu caminhar e abraçando minha causa.

Aos irmãos da Igreja Cristã Maranata (em especial os pastores Adaísio, Wertes, Juarez, Renato e Wanderson) e de outras denominações que sempre estiveram incessantemente orando pelo meu sucesso e pela minha saúde.

Ao estimado mestre e amigo Professor e Doutor Rodolfo Chaves, que me acompanhou durante todo o curso, que foi, além de um professor, um mestre que lecionou de maneira maravilhosa diversas disciplinas as quais eu tive o prazer de ser seu aluno. Por ser meu companheiro de trabalho durante a construção dos trabalhos, aos quais muito nos orgulhamos, ao longo dessa jornada. Pela sua orientação desde quando me emprestou para ler o "Livro do Ábaco" em inglês de Leonardo de Pisa, que a partir deste instante as ideias começaram a surgir para chegar à este trabalho final que muito me trouxe alegria em construirmos juntos. E por todas as manhãs e tardes que fui recebido no LPEI, juntamente com demais amigos de curso e para o restante da vida, de forma aconchegante, descontraída e com fraterno amor.

Aos meus amigos de curso, todos sem exceção, que puderam acompanhar minha jornada. Não é Isaias Amorim, Weverton Augusto, Geoneci Lucas, José André, Raimundo Nonato, Verônica, Luanda, Priscilla, Aline, Taís, Camila, Alessandro, Lurdinha, Patrick, Talita, Delita, Ivonildo, Bea Carla, Estevão, Denis, Felipe, Gracy, Grazzielly, Jean, João Paulo (JP)? Se faltou alguém a ser citado perdoe-me pela falta de memória, mas guardo a todos com quem estudei em meu coração.

Aos professores da COMAT e das demais coordenadorias, que além do prazer de poder tê-los como mestres, pude ter uma relação de amizade com cada um, e que acompanharam esta longa jornada e de maneira carinhosa e compreensiva me ajudaram a chegar até onde estou. Não é Alex Jordane, Sandra Fraga (grandes momentos passamos juntos no PIBID não é professora? Foi com a senhora, na disciplina de Geometria III, que aprendi pela primeira vez a demonstração por absurdo!!!), Márcia Cade, Dilza Côco, Lourenço Gonçalves, Oscar Rezende, Fernanda Cezane, Gelson Freire (amigo de velhos temos do ensino médio), Hélio Rossetti, André Salazar, Antônio Henrique (que me acompanhou desde o ensino médio, e tornou-se, além de um mestre, um amigo), Paula Baião (pelo carinho e amizade), Geraldo Broetto (fazer a disciplina de História da Matemática com o senhor foi um dos fatores decisivos para a escolha da área deste trabalho) Luana, Rôny, Cláudia, Michel, Luciano, Paulo Roberto, Maria José e Dalva? Pois foi através de seus ensinamentos, conselhos, e a construção do conhecimento que estou a um patamar diferente no que se refere passar de aluno à professor neste momento tão especial. E ao pedagógico, principalmente ao Francisco, que sempre me acolheu e me ouviu nos momentos de lutas. Guardo todos e tudo que fizeram por mim em meu coração.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar, observar e relacionar, através de um estudo bibliográfico, os padrões matemáticos existentes em cinco obras de Leonardo Da Vinci. Fazendo-se necessário discorrer um pouco da história da relação primitiva entre a Matemática e a Arte e a gênese da ruptura entre elas, mostrando, assim, a Matemática como uma ciência e instrumento de leitura do universo em diversas áreas do conhecimento. Além de percorrer um pouco no momento histórico em que viveu Da Vinci, o Renascimento, evidenciando algumas características dessa época que influenciaram o então protagonista a ser um notório inventor que revelou-se ser. Deste modo é de importância, e aqui disposto um pouco de sua biografia, e alguns de seus conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo de sua vida. Para tal discussão este trabalho divide em dois momentos o pensamento matemático dele: antes do encontro com o matemático Luca Paccioli e após seu encontro com este. Mostrando suas conclusões próprias, alcançadas a partir de estudos autodidatas e empíricos, e após sua relação de estudo com Luca Paccioli. Notoriedade faz, neste estudo, um passeio pela Matemática e sua história a alguns princípios desta, que serviram de embasamento para alcançar o objetivo aqui desejado. São, assim, estudados os seguintes princípios: a Razão Áurea, o Número de Ouro, o Retângulo Áureo, e o Triângulo Áureo. Sendo mostradas algumas construções feitas passo a passo utilizando o software GeoGebra, com a finalidade de entendermos estes princípios dentro da Matemática e suas recorrências em algumas outras áreas da ciência, e principalmente em obras de Leonardo. Por final, através de estudos bibliográficos e testes com o software, são analisadas a finco tais padrões dentro das obras escolhidas: o Homem Vitruviano, a Dama com Arminho, a Dama do Ramalhete, a Mona Lisa e a Última Ceia. Tal estudo desses padrões revelam a confluência entre a Matemática e a Arte de forma que é discutida a questão da inter, pluri e transdisciplinaridade entre tais disciplinas.

Palavras-Chave: Matemática. Arte. História da Matemática. Leonardo Da Vinci. Padrões geométricos. Padrões numéricos.

ABSTRACT

This work aims to analyze, observe and relate, through a bibliographic study, existing mathematical patterns in five works of Leonardo Da Vinci. Making it necessary to discuss some of the history of the early relationship between Mathematics and Art and the genesis of the rift between them, showing thus mathematics as a science and reading instrument of the universe in various areas of knowledge. In addition to go a little in the historical moment in which he lived Da Vinci, the Renaissance, highlighting some characteristics of this era that influenced the then protagonist being a notorious inventor who turned out to be. Thus it is of importance, and here arranged a bit of his biography and some of his mathematical knowledge acquired throughout his life. For this discussion this work is divided in two stages mathematical thinking of him, before the meeting with the mathematician Luca Paccioli and after his encounter with this. Showing their own conclusions reached from self-taught and empirical studies, and after his study relationship with Luca Paccioli. Notoriety is, in this study, a walk in mathematics and its history to some principles of which were the basis for achieving the desired goal here. They are thus studied the following principles: the Golden Ratio, the number of gold, the Golden Rectangle and Golden Triangle. It is shown some buildings made step by step using the Geogebra software, in order to understand these principles within the Mathematics and its recurrence in some other areas of science, and especially in Leonardo's works. By the end, through bibliographic studies and tests with the software are analyzed to nail these standards within the works chosen: the Vitruvian Man, the Lady with an Ermine, the bouquet of the Queen, the Mona Lisa and the Last Supper. This study these patterns reveal the confluence between mathematics and art so that we discuss the issue of inter, multi and transdisciplinary between these disciplines.

Keywords: Mathematics. Art. History of Mathematics. Leonardo Da Vinci. Geometric patterns. Numerical patterns.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Entendemos a Matemática como um discurso com diversas ramificações, principalmente no que se refere à pesquisa e este se entrelaça com vários outros discursos denominados científicos – Física, Química, Biologia, História, Filosofia, Geografia, Língua pátria (no nosso caso o Português), Artes, Astronomia e demais formas do discurso - tendo um importante papel coadjuvante nos estudos da ciência como um todo. Seu auxílio, ao longo dos tempos, tem sido relevante à construção e transformação de sociedades, desde a pré-história há relatos de sua utilização. Foi estudada por babilônios, chineses e gregos, por exemplo. Foi base de pensamentos de grandes vultos na História da humanidade. Platão colocou na inscrição da porta de entrada de sua academia: *"Que ninguém ignorante em Geometria entre aqui.".* Aristóteles, Pitágoras e muitos outros pensadores gregos da época, direta ou indiretamente, apoiaram o estudo da Matemática, tanto na sua forma abstrata como no auxílio de resolução de problemas práticos do dia a dia. O que leva a concluir que a Matemática foi de suma importância na base da formação das sociedades antigas.

O estudo da Matemática não era somente para resolver problemas, mas a mesma, como todo discurso, foi motivo de admiração e fascínio de povos antigos, ou seja, Matemática era Arte e Filosofia, técnica e ciência. Desde a antiguidade clássica, na Arte grega observamos a preocupação, logo a busca exacerbada pela simetria; na Arte romana, por exemplo, mosaicos eram construídos a partir de soluções daquilo que hoje designamos por matrizes − para arcos, distribuição de cores, ocupação espacial. A precisão e marcação juntavam-se a todos os anseios e desejos do artista, em chegar ao ápice de sua obra prima, sendo a Matemática o desenrolar dos carretéis para o aperfeiçoamento das obras artísticas.

Perpassando o tempo, até o final do século XV e início do século XVI, nos deparamos com uma figura interessante, um artista, filósofo, físico, engenheiro, inventor, arquiteto, escultor, cartógrafo, geólogo, astrônomo, anatomista, compositor, poeta, cozinheiro e matemático. Seu nome? Leonardo Da Vinci. Nasceu na cidade de Archiano, perto de Vinci, em 15 de abril de 1452. Filho de um notório advogado, Piero de Antonio Da Vinci, e de uma camponesa, Catarina. Viveu em uma época propicia para desenvolver seus talentos, a Renascença. Em poucas linhas o pensador Giorgio Vasari (1964) define Leonardo: "Cada uma de suas ações é tão divina que, deixando atrás de si todos os outros homens, expressamente se faz conhecer como uma coisa concedida por Deus" (BAGNI; D'AMORE, 2011, p.1). E para Freud (1974) "Leonardo, um homem que acordou muito cedo da escuridão enquanto outros homens dormiam." (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 1).

Nossa sede e curiosidade por conhecimento levaram-nos a refletir diversos aspectos da vida e obras de Leonardo. Até onde estudar tal cientista me proporcionará conhecimentos ricos para minha formação acadêmica? Há padrões matemáticos em obras de Leonardo Da Vinci? Quais? Ele optou por utilizá-los ou é tão-somente uma forma de modelarmos (ou efetuarmos leituras de) suas obras? Diante de tais perguntas fica a proposta de meu estudo acadêmico: "Leonardo Da Vinci e estudo dos padrões matemáticos de suas obras".

Quando nos deparamos com tal desafio imaginamos que o mesmo seria grande, e tal imensidão seria recompensada com perguntas e respostas que preencheram e abriram novas lacunas para construção de novos conhecimentos nas ciências, em todos os seus ramos e vertentes, exatas, humanas e biomédicas.

A seguinte frase justifica um pouco do meu fascínio por adentrar a este estudo:

> O homem é único não porque produz ciência, e ele não é único porque produz Arte, mas sim porque ciência e Arte, igualmente, são expressões da maravilhosa plasticidade de sua mente. (WHITE, 2002, p. 15).

Portanto, nosso objetivo não é estudar toda a vida de Leonardo Da Vinci, mas sim relatar alguns pontos da vida desta figura ímpar, bem como analisar, identificar e apresentar a possível existência de padrões matemáticos em suas cinco obras mais conhecidas − a Mona Lisa, a Última Ceia, a Dama de arminho, o Homem Vitruviano e a Dama do ramalhete − por serem obras que aparecem com uma certa frequência em livros didáticos.

Em alguns livros didáticos, principalmente livros do 1º ano do ensino médio, é apresentada a sequência de Fibonacci de uma maneira bem simples, geralmente através do clássico problema da reprodução dos coelhos. De uma forma simples e elementar quando os alunos estudam sequência numéricas e seus padrões. Então é válido o meu comprometimento de estudar a presença ou não da Razão Áurea, do Número de Ouro, do Retângulo Áureo e do Triângulo Áureo por estarem profundamente interligados à sequência de Fibonacci. Portanto, proponho não colocar em lados opostos de uma mesma balança, mas misturar em uma mesma panela, Arte e Matemática em meu objeto de estudo de maneira clara e concisa, tendo em vista que este estudo possa proporcionar contribuições para aulas de Matemática estabelecendo relações inter ou trans ou multidisciplinares.

1.2 JUSTIFICATIVA

Chaves (2004, p.160-161) enfatiza que uma atmosfera de estudo sistematizado em um currículo enrijecido, onde o aluno é posto como um ser passivo às informações advindas do professor por intermédio de discursos homiléticos, não faz-se unicamente das sociedades modernas e pós-modernas. Arquitas, incumbido pela sucessão do legado pitagórico, colocou a Aritmética em um patamar superior à Geometria, entretanto, seu vínculo com os números não era tão esotérico como para Pitágoras ou ascético e monástico como para Filolau de Crótona.

> Arquitas parece ter dado considerável atenção ao papel da matemática no aprendizado, e foi-lhe atribuída a designação dos quatro ramos no quadrivium matemático – aritmética (ou números em repouso), geometria (ou grandezas em repouso), música (ou números em movimento) e astronomia (ou grandeza em movimento). Esses temas, juntos com o trivium consistindo de gramática, retórica e dialética (ou Aristóteles atribuía a Zeno), constituíram mais tarde as sete artes liberais, portanto o papel proeminente que a matemática desempenhou na educação se deve em não pequena medida a Arquitas. (BOYER, 1978, p. 52).

Contestando o arquétipo existente − que valida a preeminência do Ensino Tradicional de Matemática (ETM), elencado em premissas enrijecidas, que colocam a estrutura curricular em posição elevada da interlocução, da engenhosidade e da investigação como meio de aprendizagem − Chaves (2004) destaca que, após Arquitas, que prezava a música, o que observamos é uma inclinação ao que é estático onde a ideia de movimento foi gradativamente esquecida, tornando-se assim descontextualizada. Plotino, que espiritualizava a Arte, transcende Platão e defende que a réplica dos objetos visíveis é uma razão para a prática artística do qual o desígnio é sentir os conteúdos ou ideias. Para ele, a Arte, além de uma atividade produtiva, é um artifício para compreender a Verdade.

Ao percurso deste trabalho discutiremos alguns padrões; principalmente, numéricos e geométricos, uma vez que julgamos que é inerente ao ser humano, bem como a outros animais – os corvos[1], por exemplo –, avaliar, analisar e comparar padrões, porém um padrão não é um olhar absoluto. Há padrões e consignar uma perspectiva relativo a uma obra de Arte, a partir de um eixo em relação à natureza ou na leitura de um texto, é peculiar a cada indivíduo que tomará como parâmetro seu curso, sua compreensão de mundo, suas concepções e sistema de verdades com qual está envolvido ou tomado. Daí a relevância de realizarmos uma − mesmo que breve − arqueologia a respeito de padrões tomados pela História da humanidade.

Nossa vontade de construir conhecimento nos leva a cogitar a respeito de vários enfoques da vida e obras de Leonardo. Até onde estudar tal cientista nos proporcionará profícuos saberes para nossa formação acadêmica? Há padrões

---

[1]Dantizg (1970, apud: BRASIL, 2014, p.7) afirma que alguns animais também possuem senso numérico, mesmo que rudimentares e restritos, como o caso específico do corvo que consegue identificar se são retirados dois ou mais ovos de seus ninhos.

matemáticos em obras de Da Vinci? Quais? Ele optou por utilizá-los ou é tão-somente uma forma de modelarmos (ou efetuarmos leituras de) suas obras? Diante de tais perguntas motivamo-nos à esta pesquisa. Uma vez que Leonardo Da Vinci consegue reunir a Arte com a Matemática, manipulando a beleza de suas obras através de artífices científicos e, ao mesmo tempo volver seus estudos científicos em beleza aos nossos olhos, utilizando a Arte. Associando a curiosidade de aprender com o prazer de criar, convertendo, assim, seu conhecimento e destreza, em obras de significados extremamente importantes ao desenvolvimento de estudos de outros cientistas de sua e de épocas futuras, produzindo obras de significados claros e ao mesmo tempo criando objetos enigmáticos, que até aos nossos dias ludibriam e encantam, de maneira única e fantástica, mentes e mais mentes, pensadores e mais pensadores.

Desta forma, torna-se válido o estudo das obras aqui em enfoque, pois elas representam um modelo artístico embelezado por instrumentos matemáticos, O que nos traz à tona a valorização da mistura entre essas ciências, a interdisciplinaridade da Arte com a Matemática, e ao mesmo tempo, da Arte com a História, e da Matemática com a História. Levando-nos, assim, a considerar, e prezar os PCN no desenvolvimento do ensino de Matemática.

> No ensino de Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar estas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a ‘falar’ e a ‘escrever’ sobre a Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.
> O ensino da Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens),argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa (BRASIL, 1998, p. 56-57).

1.3 OBJETO DE ESTUDO

Neste trabalho são analisados como temas centrais as seguintes obras de Leonardo da Vinci: O Homem Vitruviano, a Última Ceia, a Mona Lisa, a Dama com Arminho, e a Dama do Ramalhete. Tais obras são postas em observação de um ponto de vista da Matemática, sendo colocado em evidência alguns padrões matemáticos que podem ser encontrados não unicamente nelas, mas fazem notoriedade em muitas outras ciências, e são entes matemáticos que aparecem no desenrolar da História da Matemática. Sendo eles: a razão áurea, o número de ouro, o retângulo áureo, e o triângulo áureo. Tais padrões serão abordados de forma a se revelarem suas histórias dentro da Matemática, sua recorrência em algumas ciências, e por fim servirão de alicerce para se entender, a partir de uma leitura matemática, as obras de Da Vinci, e ao mesmo tempo a possibilidade de haver a interdisciplinaridade entre a Arte e a Matemática ao fazer tal estudo.

1.4 PERCURSO METODOLÓGICO

Este trabalho foi desenvolvido nos moldes de uma pesquisa bibliográfica, exploratória e qualitativa, onde foram realizadas análises de livros a respeito do assunto problematizado em questão. As análises das bibliografias utilizadas foram feitas através de fichamentos de citação, de resumo ou conteúdo, e bibliográfico. De tais fichamentos foram feitas análises do conteúdo utilizado na pesquisa de uma forma indutiva, pois tal método obtém conclusões gerais a partir de premissas individuais, sendo feito assim uma análise minuciosa e classificação dos fatos relevantes para o meu objeto de estudo, ou seja, com a hipótese (a questão problema em estudo) chegar a uma tese através da indução, assim capítulo por capítulo da pesquisa será montado de acordo com que as bibliografias forem lidas e analisadas, dando assim um formato claro e conciso a cada um e à pesquisa como um todo.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

2.1 PANORAMA DA PESQUISA

Nosso trabalho foi desenvolvido nos moldes de uma pesquisa bibliográfica, exploratória e qualitativa, onde foram realizadas análises de livros a respeito do assunto problematizado em questão. As análises das bibliografias utilizadas foram feitas através de fichamentos de citação, de resumo ou conteúdo, e bibliográfico. De tais fichamentos foram feitas análises do conteúdo utilizado na pesquisa de uma forma indutiva, pois tal método obtém conclusões gerais a partir de premissas individuais, sendo feito assim uma análise minuciosa e classificação dos fatos relevantes para o meu objeto de estudo, ou seja, com a hipótese (a questão problema em estudo) chegar a uma tese através da indução, assim capítulo por capítulo da pesquisa será montado de acordo com que as bibliografias forem lidas e analisadas, dando assim um formato claro e conciso a cada um e à pesquisa como um todo.

2.2 OBJETIVO GERAL E PERGUNTA DIRETRIZ

Pelo exposto até então, e tomando os referenciais teóricos aqui utilizados, estabelece-se como objetivo geral:
Discutir e analisar os padrões matemáticos existentes nas seguintes obras de Leonardo Da Vinci: o Homem Vitruviano, a Mona Lisa, a Dama com o Arminho, a Dama do Ramalhete e a Última Ceia.

A partir desse objetivo foi tecida a seguinte pergunta - diretriz:
"Até onde estudar tal inventor me proporcionará conhecimentos ricos para minha formação acadêmica? Há padrões matemáticos em obras de Leonardo Da Vinci? Quais? Ele optou por utilizá-los ou é tão-somente uma forma de modelarmos (ou efetuarmos leituras de) suas obras?"

2.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Discutir e analisar o uso da razão áurea, do número de ouro, do retângulo áureo, e o triângulo áureo, como instrumentos de apoio para análise das obras selecionadas de Leonardo Da Vinci;
- Discorrer a um pouco da história das características, e de algumas recorrências, tanto na Matemática como em algumas outras áreas, da razão áurea, do número de ouro, do retângulo áureo, e do triângulo áureo, a fim de chegar ao entendimento das mesmas como alicerces para chegar ao objetivo geral deste trabalho;
- Apresentar e discutir a relação primitiva da Matemática e da Arte, e a gênese de ruptura entre as mesmas;
- Esboçar um pouco do momento histórico em que viveu Leonardo Da Vinci, sua biografia, e alguns aspectos de sua matemática antes e depois do seu encontro com o matemático Luca Paccioli, e seus dez Códigos;
- Observar e analisar a questão da relação entre a Matemática e a Arte nos dias contemporâneos no viés de se discutir a interdisciplinaridade entre as mesmas.

Tais objetivos configuram-se como ações para se atingir o objetivo geral e advêm das seguintes hipóteses:

(H_1) A Matemática e a Arte possuem relações peculiares entre si desde a antiguidade.

(H_2) Leonardo Da Vinci utilizou os padrões matemáticos intencionalmente como instrumentos na confecção de suas obras.

(H_3) A possibilidade de promover a questão da interdisciplinaridade nos dias de hoje, entre a Arte e a Matemática, e até mesmo a História (tanto geral, como a própria História da Matemática), para promover aulas de matemática fora dos moldes do ensino tradicional de matemática que tem sido utilizado nos dias atuais em sala de aula, valorizando a Matemática como uma ciência que pode ser utilizada para enriquecer o aprendizado.

3 AS RELAÇÕES ENTRE A MATEMÁTICA E A ARTE: DA ANTIGUIDADE À IDADE MODERNA[2]

Como área do conhecimento na História da humanidade, a Matemática é tomada como instrumento de leitura do universo em diversas áreas - Física, Química, Biologia, História, Filosofia, Geografia, Música, Artes, Astronomia, Linguagens etc.

> Ao retratar paisagens e animais e, mais tarde, esculpir em ossos marcas que representavam os animais capturados, o homem primitivo iniciou a busca da organização do seu entorno por meio da Arte e da Matemática. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 13)

A utilização de suas concepções, ideias e métodos, com o passar das eras, tem sido de tamanha magnitude à construção e à transformação de sociedades. A datar da pré-história, como retratado na citação antecedente, existem informações de sua utilização. O seu estudo e seu emprego deverás perpassou pela Babilônia, China e Grécia, assim exemplificando. Efetuou-se como alicerce de grandes protagonistas na História das civilizações. Platão[3] colocou na inscrição da porta de entrada de sua academia: "*Que ninguém ignorante em Geometria entre aqui".* Aristóteles[4] e Pitágoras[5], dentre outros pensadores gregos da época, direta ou indiretamente,

---

[2]Capítulo publicado originalmente em Chaves & Rodrigues (2014a, p.129-130).

[3]Platão (427–347 a.C.), aristocrata de nascimento, filósofo grego nascido em Atenas, considerado um dos principais pensadores gregos, pois influenciou profundamente a filosofia ocidental. Suas ideias baseiam-se na diferenciação do mundo entre as coisas sensíveis (mundo das ideias e a inteligência) e as coisas visíveis (seres vivos e a matéria). Teve sua obra interpretada de maneiras diversas, “[...] tanto por Aristóteles quanto por Plotino. Descartes, Kant e Hegel inspiraram-se nela. E ela nos ensina que existe um ponto de convergência de todos esses caminhos, bem além das aparências ilusórias que só levam ao ceticismo e à inadequação do espírito. Baseia-se em sua fé na autoridade da razão que, adquirida pelo homem, permite-lhe transpor as fronteiras da necessidade, e ao mesmo tempo, merecer sua própria dignidade.” (HUISMAN, 2001, p. 774)

[4]Aristóteles (Estagira, 384 a.C. — Atenas, 322 a.C.) filósofo grego, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande. Seus escritos abrangem diversos assuntos, como a física, a metafísica, as leis da poesia e do drama, a música, a lógica, a retórica, o governo, a ética, a biologia e a zoologia. Juntamente com Platão e Sócrates(professor de Platão), Aristóteles é visto como um dos fundadores da filosofia ocidental.335 a.C. funda seu Liceu em Atenas.
Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Arist%C3%B3teles>. Acesso em: 20/Mar./2015

[5]Pitágoras de Samos (580—500 a.C.), filósofo e matemático grego que teve como mestres ou interlocutores: Tales de Mileto (624—546 a.C.), precursor do raciocínio dedutivo e da Geometria Demonstrativa, um dos sete sábios da Antiguidade: Anaximandro Sonchi – sacerdote egípcio;

apoiaram o estudo da Matemática, tanto na sua forma abstrata – e até esotérica – quanto no auxílio de resolução de problemas práticos. O que leva a inferir que a Matemática foi de suma importância na base da formação das sociedades antigas e a relação entre Matemática e Arte não é fruto de modismo contemporâneo ou pós-moderno.

> Com a construção de armas e utensílios utilizando pedras, ossos e madeira, que depois de prontos eram decorados, começou a existir também a convivência entre formas, tamanhos ou dimensões com símbolos e padrões. No decorrer da história humana, a Arte e a Matemática continuaram a contribuir para organizar e explicar as aquisições culturais. (ZALESKI FILHO, 2013, P.14)

A sua pesquisa não era tão-somente com a finalidade de resolver problemas.

> A matemática foi motivo de admiração e fascínio de povos antigos, ou seja, a Matemática foi tomada como Arte e Filosofia, técnica e ciência. Desde a antiguidade clássica, na Arte grega observamos certa preocupação com a busca exacerbada pela simetria, pela beleza clássica a partir da estética que tomava as relações áureas como padrão. Na Arte romana, por exemplo, mosaicos eram construídos a partir de soluções daquilo que hoje designamos por matrizes − para arcos, distribuição de cores, ocupação espacial. A precisão e marcação juntavam-se a todos os anseios e desejos do artista, em chegar ao ápice de sua obra prima, sendo a Matemática o desenrolar dos carretéis para o aperfeiçoamento das obras artísticas. (CHAVES; RODRIGUES, 2014, p. 130)

Apesar disso, os pitagóricos, fundamentados em sua teoria de que *"Tudo é número...",* instauraram a crença de que a Matemática, por si só, seria capaz de explicar o mundo, não carecendo, para esse fim, de nenhuma outra linha do conhecimento, englobando, juntamente com as demais ciências, a Arte. Tal pensamento em conjunto com o desprezo que Platão sentia pelos artistas plásticos coloca a Matemática e a Arte em patamares distintos e pode ter contribuído para o afastamento entre a Arte e a Matemática.

> [...] em algum momento da história da humanidade, a Arte "afastou-se" da Matemática e de outros campos das ciências. Qual o motivo, ou quais são os motivos desse afastamento? Talvez uma das razões tenha sido uma herança da Filosofia Grega: a ideia de um mundo dividido em superior e inferior.(ZALESKI FILHO, 2013, p. 13)

Zaratustra, dentre outros. Viajou pelo Egito e Babilônia antes de se estabelecer em Crótona (região da Magna Grécia, atualmente Itália), onde criou a Escola Pitagórica, com forte tendência esotérica. Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras>.Acesso em: 20/Mar./2015.

Nunes (1993, p. 14 apud ZALESKI FILHO, p. 20) acrescenta que "a filosofia, desde a sua definição originária, se faz compreender como um saber sobre o homem, sobre o mundo, sobre a realidade".

> A Filosofia origina-se na Grécia há aproximadamente cinco séculos antes de Cristo. Em primeiro momento , a civilização grega era tribal. Nessa época, desenvolveu-se uma grande criatividade mitológica. Mitologia é a história fabulosa dos Deuses, semideuses e heróis da Antiguidade, cujo propósito consistia em explicar as questões da existência humana e do povo grego, além de justificar as relações sociais e políticas da Grécia. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 20)

Sob uma perspectiva primitiva, o universo e a realidade herdaram dos gregos esclarecimentos mitológicos. Tais mitos concebiam-se com atributos dessemelhantes ao mundo, como as maneiras o modo de vida e relações do cotidiano daquela época. Para tanto, esse primeiro momento grego ser reputado como primitivo, rural, tribal e mitológico. Zaleski Filho (2013) afirma que:

> A Filosofia aparece, então, com uma reação ao pensamento mitológico. Um ciclo de prosperidade faz surgir uma classe intermediária com poder e que tem a intenção de romper com as estruturas mitológicas que colocavam a aristocracia rural em situação de destaque. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 20)

Apoiando-se da razão humana, no século VI a.C. a Filosofia grega se preocupava em analisar os elementos que integravam as coisas. Segundo Benedito Nunes (2006 apud ZALESKI FILHO, 2013, p. 20):

> [...] a natureza foi investigada pelos primeiros filósofos com intuito de se buscar um princípio estável, comum a todos os seres, que explicasse a sua origem a as suas transformações. Os primeiros filósofos, de Tales a Anaxímenes, foram chamados por Aristóteles de físicos ou *physiologoi*. Eles fundaram uma tradição de estudo da natureza, a qual Heráclito e Parmênides, Pitágoras e Empédocles, Anaxágoras e Demócrito deram sequência e aprofundamento.

Em torno de 450 a.C., os sofistas, que ensinavam os jovens e adultos de Atenas motivados por causas ligadas mais à prática do que à teoria, polemizaram, entre outras ideias, o Bem, a Virtude, o Belo e a Lei da Justiça; que segundo Zaleski Filho (2013), "os levaram à formulação de teses ousadas e contraditórias".

É colocado, assim, no estudo da sociedade e da cultura, uma visão reflexiva-crítica que descreve a Filosofia. Contudo, foi simplesmente com a contribuição de Sócrates[6] que este ponto de vista reflexivo-crítico também passou a se voltar à estimar as Artes.

Após Sócrates falecer, surge Platão[7], discípulo de Sócrates, que estudou com seu mestre durante oito anos e educou-se nesse período para atuar na política de sua família.

> A família de Platão pertencia à aristocracia e afirmava descender de Codros, rei de Atenas. Segundo César Nunes (1993), Platão inaugura com seu pensamento o período vigoroso e clássico da Filosofia. Esse modo de pensar corresponde ao auge das cidades gregas e à supremacia do domínio de Atenas. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 21)

Em 487 a.C. Platão debutou a Academia, a mais prestigiada escola da Antiguidade, onde o filósofo lecionou até o findar de sua vida.

> Cortella (1998) revela que durante os primeiros cinquenta anos após a morte de Sócrates, Platão elaborou uma síntese das tendências filosóficas que já existiam, de modo a criar uma compatibilização entre a busca de explicação da realidade como um todo e o pensamento socrático voltado para o Homem; adicionando a esse fato o contemplar filosoficamente, as exigências políticas, morais e gnosiológicas (referentes a estudos do conhecimento) em torno da relação entre a mutabilidade das coisas e da verdade. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 21)

Zaleski Filho (2013) afirma que Sócrates dedicou-se maior parte de suas cogitações a um problema: "como estabelecer verdades que sejam válidas para todas as pessoas?" Como ele não conseguiu chegar a essa resposta, Platão tomou para si o estudo de seu mestre após sua morte.

---

[6] Sócrates (Atenas, 469 a.C. - Atenas, 399 a.C.) foi um filósofo ateniense do período clássico da Grécia Antiga. Creditado como um dos fundadores da filosofia ocidental, é até hoje uma figura enigmática, conhecida principalmente através dos relatos em obras de escritores que viveram mais tarde, especialmente dois de seus alunos, Platão e Xenofonte, bem como pelas peças teatrais de seu contemporâneo Aristófanes. Muitos defendem que os diálogos de Platão seriam o relato mais abrangente de Sócrates a ter perdurado da Antiguidade aos dias de hoje.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3crates>. Acesso em: 10/Set./2015.

[7] Platão (em grego antigo: Πλάτων, transl. *Plátōn*, "amplo", Atenas, 428/427 – Atenas, 348/347 a.C.) foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da Academia em Atenas, a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental. Juntamente com seu mentor, Sócrates, e seu pupilo, Aristóteles, Platão ajudou a construir os alicerces da filosofia natural, da ciência e da filosofia ocidental.[10] Acredita-se que seu nome verdadeiro tenha sido Arístocles.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%A3o>.Acesso em: 10/Set./2015.

> Para elaborar sua síntese, Platão escreve sobre a origem do mundo, a cosmologia, retomando alguns mitos antigos e reorganizando-os de um modo mais filosófico. Segundo Cortella (1998), Platão acreditava que anteriormente ao nosso mundo existia o caos (do grego *Khaos*, abismo, fenda, confusão), e este era composto de matéria sem forma. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 22)

Platão propõe, assim, a teoria dos dois mundos. No mundo inteligível, existiria um lugar habitado pelos deuses chamado de superior. Abaixo , o mundo no qual vivemos, o dos mortais, onde a vida na terra não passava de uma leve imagem do mundo superior.

A "*Teoria das Ideias*" platônica surgiu para explicar primeiramente o problema colocado por Sócrates sobre definições. Em seu desenvolvimento foi necessário estabelecer as ideias como unificadoras dos múltiplos objetos dados nas sensações (representações do olfato, paladar, visão, audição e tato), que sozinhos não são suficientes para explicar as representações desses objetos e sua essência.

Platão divide, assim, a realidade em dois universos distintos: o inteligível e o sensível. O primeiro contém as formas puras, as essências e o fundamento da existência dos seres do segundo. Assim, tanto os seres da natureza quanto os homens são cópias sensíveis de modelos originais inteligíveis.

É a partir disso que Platão faz sua crítica à arte. Cada ser particular participa das ideias (a participação é a relação entre o todo e as partes) sem se confundir com elas, que são, pois, absolutas. O mundo é uma cópia do real e esse afastamento do verdadeiro já é uma Dessemelhança, ainda que natural. Entretanto, Platão julga a arte como imitação, capaz de enganar, uma vez que a realidade sensível já é uma imitação do inteligível. A arte afasta ainda mais do real, pois imita a cópia. A imitação da cópia é o que Platão chama de *Simulacro*, que introduz uma desmedida maior do que a própria existência do mundo natural. Por isso Platão rejeita a arte em seu estado ideal, querendo, com isso, substituir a Poesia pela Filosofia.

Já para Aristóteles, esse modelo platônico é inútil e insustentável. Para ele, a realidade é o sensível e "*o ser se diz de várias maneiras*". Quer dizer que se denominam os seres sempre em relação a uma categoria e a um gênero universal abstraído dos seres particulares. A imitação, pois, torna-se até benéfica porque representa uma composição de narrativas que mostram experiências possíveis. A imitação tem um caráter pedagógico, pois que seu efeito (catarse) promove uma identificação com o personagem, criando ou despertando sentimentos que purificam e educam, caracterizando normas de ações.

Nesse sentido, diz-se que a experiência artística se apoia em situações que possuem uma verossimilhança, não com fatos ou atos reais, mas também com os que são possíveis de acontecer, ou seja, que estão em potência. Aristóteles utiliza a tragédia acima das outras formas de arte, porque ela trata dos dramas humanos em que só os melhores conseguem ser felizes resolvendo tais dramas.

Portanto, enquanto a dessemelhança, ou melhor, a sua produção, afasta cada vez mais do real, a verossimilhança (embora ontologicamente diferente) é a possibilidade de se tornar uma realidade. A primeira deseduca, enquanto a segunda prepara para a vida em comunidade, despertando sentimentos comuns e universais.

Nos voltando agora para o período de decadência da Filosofia grega, é importante destacar que tal fato levou à ascensão do cristianismo e da própria Arte voltada para tal período. Tal fato, e/ou período filosófico denominado de "decadente", coincidiu com o declínio do mundo grego. Zaleski Filho (2013) afirma que "as filosofias dessa época não podem ser comparadas às do período clássico, pois não apresentavam nada novo". Esse período inicia-se por meados do século II a.C. e segue até o século V d.C., quando, então, são estabelecidas as estruturas que sustentarão à Idade Média. Nesse momento, nasce um novo no qual a igreja produz cenário com a finalidade de obtenção de poder ideológico e político.

Um filósofo dessa época que merece ser comentado é Plotino (205-270 d.C.). César Nunes (1993 apud ZALESKI FILHO, 2013, p. 25) afirma que Plotino, retomando os ideias platônicos, insere uma estrutura mística por meio do conceito de *Nóus*, que para o filósofo tratava-se de uma inteligência que organizava o mundo e a concepção de uma libertação do divino da matéria. As teses de Plotino foram absorvidas pelo Cristianismo, em particular a de um Deus Providente. Ele é o único dos grandes filósofos gregos, e pregava a emancipação do corpo e propunha o ideal do Bem Supremo como objeto de amor e o Uno(*Nóus*) como demiurgo do Universo.

> O objetivo da "alma humana" era o de se fundir a esse "deus filosófico" pela contemplação e êxtase. Para Plotino, conceito que depois será apropriado

> por Santo Agostinho, o objeto da Filosofia já não é mais a pesquisa sobre o mundo (pré-socráticos) ou sobre o homem e a *pólis* (Sócrates), mas sim a aceitação de uma realidade divina e providente, da qual todos fomos gerados por emanação. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 26)

Nesse palco, o Cristianismo se ascende pregando uma nova ideologia com grande influência sobre o povo e, Paulo de Tarso, apregoando em grego nas grandes cidades, consolida o Cristianismo. E descrito esse cenário, conseguimos realizar uma análise da posição da Arte nesse período de transição.

> [...] Plotino foi uma figura fundamental na renovação do ideal platônico, exercendo grande influência nos primeiros pensadores cristãos, incluindo nesse grupo, Santo Agostinho. Plotino adotou a concepção de beleza suprassensível, imutável e eterna, razão de ser das coisas belas deste mundo. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 27)

Benedito Nunnes (2006) ainda nos declara que:

> [...] para Plotino, a alma - que se alegra pela sua contemplação - assemelha-se à beleza. E a beleza, manifestando o que é fácil de ser entendido no que é material e sensível, compõe a própria alma das coisas como forma interior, como unidade indivisível que nelas existe; e que as propriedades estéticas (simetria e regularidade), aspectos puramente exteriores, não podem explicar. Plotino explica que tudo que tem forma é belo e dotado da máxima realidade. Para ele, como pode ser perfeitamente determinado, o feio é identificado com a ausência de forma, a negação do real. (ZALESKI FILHO, 2013, P. 27)

Plotino, então espiritualiza a Arte, vai mais longe que Platão e chega ao entendimento de que a imitação dos objetos visíveis é um motivo para a atividade artística, que para Zaleski Filho (2013), tem como finalidade de "intuir as essências ou ideias. Para ele, a Arte, além de uma atividade produtiva, é meio de conhecimento da Verdade".

> Benedito Nunes (2006), dando sequência ao pensamento de Plotino, afirma que as obras de arte são passageiras, são materiais e representam o imaterial. São exteriores e sensíveis e possuem significados interiores e compreensíveis. Para esse filósofo o que importa é a Arte ser considerada uma obra do espírito. Os produtos artísticos representam outra forma de arte, imaterial. Acima da música que se ouve, movem-se harmonias compreensíveis, que o artista deve aprender a ouvir. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 28)

Então, a verdadeira Arte, que não tem fim em nenhuma de suas realizações exteriores, identifica-se através de um princípio espiritual que a todas vivifica e supera.

> Cada obra é apenas um filão provisório aberto no manancial inesgotável da inteligência e da beleza universais, em que a mente do artista se liga e onde se encontra com a musicalidade pura, que vem antes e serve de base para a criação musical sensível. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 28)

O engrandecimento à Beleza que a Arte concede, tendo por atividade espiritual, não difere do conhecimento intuitivo do ser e da apreciação da realidade irrefutável. Embora Plotino tenha indicado em sua Filosofia uma razão para as práticas artísticas, os pensadores cristãos compreendiam que é de Deus que é deliberado toda a beleza da criação, e assim, toda essa beleza que advém de Deus é a única que verdadeiramente interessa. Ela é a correlação entre o homem e seu criador, e não é vã.

Voltando-nos para o mundo Moderno e Contemporâneo, podemos dizer que a Renascença foi o marco transitório entre a Idade Média e Moderna.

> Gombrich (1995) escreve que "renascença" significa ressurgir ou nascer de novo, e a ideia de renascimento ganha espaço na Itália desde Giotto. Quando se queria fazer, nesse período, um elogio a uma produção artística, diziam que ela era tão boa quanto as obras antigas. Giotto era considerado um mestre líder do ressurgimento das artes e suas obras eram consideradas tão boas quanto as dos famosos mestres louvados na Grécia e na Roma antiga. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 45)

Giotto viveu por volta de 1300 d.C. Em 1453, os turcos conquistaram Constantinopla[8], o que representou um declínio no Império Bizantino[9], com o

---

[8] Constantinopla, atual Istambul, foi a capital do Império Romano (330–395), do Império Bizantino (ou Império Romano do Oriente) (395–1204 e 1261–1453), do Império Latino (1204–1261) e, após a tomada pelos turcos, do Império Otomano (1453–1922). Estrategicamente localizada entre o Corno de Ouro e o Mar de Mármara no ponto em que a Europa encontra a Ásia, a Constantinopla Bizantina havia sido a capital da Cristandade, sucessora das antigas Grécia e Roma. No decorrer da Idade Média, Constantinopla foi a maior e mais rica cidade da Europa.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Constantinopla>. Acesso em: 13/Set./2015.

[9] O Império Bizantino foi a continuação do Império Romano durante a Antiguidade Tardia e Idade Média. Sua capital foi Constantinopla (moderna Istambul), originalmente conhecida com Bizâncio. Inicialmente parte oriental do Império Romano (frequentemente chamada de Império Romano do Oriente no contexto), sobreviveu à fragmentação e ao colapso do Império Romano do

expatriamento para a Itália dos seus pensadores. Zaleski Filho (2013) afirma que esse grupo de pensadores trouxeram consigo tesouros do pensamento antigo. Era a Renascença, um novo período que se iniciava.
Refletindo a respeito das Matemáticas desse período, Taton (1960 apud ZALESKI FILHO, 2013, p. 46):

> [...] no domínio das matemáticas, ao mesmo tempo em que se revela a riqueza da herança grega, italianos e alemães rivalizam na criação de uma verdadeira álgebra. A Álgebra e a Aritmética do Renascimento jamais se utilizavam de fórmulas, ao contrário, oferecem regras e dão exemplos em analogia ao que faz a Gramática, que nos diz as regras que devemos seguir e os exemplos que devemos aceitar e aplicar às variações [...]

No que diz respeito à Arte, os artistas do Renascimento buscam reproduzir a natureza em tudo, o que, em suas considerações, ela é intrínseca e elegância. Para Benedito Nunes (2006, p. 41 apud ZALESKI FILHO, 2013, p. 47):

> A concepção que prevalece a partir dessa época, e para cujo triunfo colaboram, entre outros, um Leonardo da Vinci (1452-1519), um Giordano Bruno (1548-1600) e um Galileu (1564-1642), é que a Natureza é um todo vivo, animado e regido por leis intrínsecas que governam o curso dos astros, a queda dos corpos, a circulação do sangue, a distribuição dos elementos, o ciclo das marés e o equilíbrio das massas. Galileu dizia que o livro da Natureza está escrito em linguagem matemática, e que suas palavras são círculos e outras figuras geométricas. Essas palavras também são leis, determinando as formas dos seres existentes por certas relações constantes, de ordem geométrica, essenciais à perfeição do todo, e que definem a beleza própria das coisas naturais que a arte tem por objeto representar.

Consegue-se perceber que esses ilustres celebridades da Renascença fundamentaram uma mudança ideológica com relação à Arte e a sua harmonização com a Matemática.No Renascimento acontece uma importante mudança em relação no que era a Idade Média, de forma tal a defrontar-se a Pintura, a Escultura e a Arquitetura, que anteriormente eram vistas como artes servis. Leonardo Da Vinci, dentre outros artistas, reivindicaram para essas artes o *status* de prática intelectual, que antes era só facultado à Poesia. As belas-artes alcançam a aprovação da síntese do práxis com a imaginação, da atividade formadora com a inteligência, que

---

Ocidente no século V e continuou a prosperar, existindo por mais de mil anos até sua queda diante da expansão dos turcos otomanos em 1453.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Imp%C3%A9rio_Bizantino>. Acesso em: 13/Set./2015.

tem por finalidade registrar a beldade das formas naturais em obras que demandam, simultaneamente, o olhar sensível e a admiração de forma erudita.

> Para Leonardo da Vinci, a Pintura era um meio de analisar a natureza produzindo uma visão especulativa de suas formas regulares, que estariam sujeitas às mesmas leis que as ciências começariam a identificar e traduzir em linguagem matemática. A visão do artista realiza essa análise, sua atividade a transforma em obra e ambas se complementam na síntese do quadro que mostra em sua beleza, por meio da perspectiva geométrica, uma parte da realidade natural. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 47)

Benedito Nunes (2006, p. 42 apud ZALESKI FILHO, 2013, p. 48) faz a seguinte reflexão a despeito da Ciência e Pintura, Platão e Leonardo Da Vinci:

> Somente a Pintura é capaz de oferecer aos sentidos uma tradução sensível, sem erros, da mesma realidade perfeita que o intelecto aprende por meio de conceitos gerais e do raciocínio. A função da Pintura é paralela à da Ciência e da Filosofia. Dada a condição especulativa atribuída a essa arte, não deve causar surpresa Leonardo da Vinci ter dito que são inimigos da natureza e da Filosofia aqueles que desprezam a Pintura. Pode-se ver nesse pensamento uma réplica à desvalorização à desvalorização platônica das composições imitativas. Platão dizia ironicamente, que a propriedade da Pintura e da Escultura, para representar os mais diferentes seres - a terra, o céu, os animais e os deuses - não era diferente da propriedade dos espelhos para refletir tudo o que se opõe diante deles. Se o motivarmos em todas as direções, veremos, de pronto, refletirem na superfície polida as imagens das coisas, e só as puras imagens, que não possuem verdadeira existência. Esse poder de criar aparências é assumido pelos artistas do Renascimento, no que se refere à função da Pintura.

Leonardo Da Vinci escreveu em seu Tratado de Pintura que "o pintor há de se fazer como espelho que reflete todas as cores diante dele, parecendo converter-se numa segunda Natureza"(NUNES, 2006, p. 43 apud ZALESKI FILHO, 2013, p. 48),. A Renascença começa a resgatar a importância das Artes e da Geometria em seu contexto cultural. Assim, o século XV, passou a ser denominado como período inicial do Renascimento, foi testemunha do reaparecimento da Arte e do Saber na Europa.

4 A ERA DA VINCI

4.1 O RENASCIMENTO

O continente europeu vivenciou nos séculos XI, XII, XIII e XIV eventos diacrônicos econômicos, políticos, intelectuais, artísticos e culturais que, paulatinamente, conduziram o corpo social europeu a remodelar-se estruturalmente e a reavaliar sua perspectiva e sua essência concepcional de humanidade, tal qual "[...] o desenvolvimento do saber e do comércio se reforçavam mutuamente."(SEVCENKO, 1985, p. 12).Acima de tudo, o século XIV é apontado por fortes tensões e crises, dentre elas a proliferação da "peste negra" produzindo um montante de milhões de mortos em todo o continente, além das disputas territoriais entre França e Inglaterra, a Guerra dos Cem Anos e as revoltas camponesas consequentes da super-exploração da mão-de-obra campesina. Como sequelas imediatas destas tribulações, a fome e o declínio populacional, cooperaram para necrosar com o antigo modelo feudal.

Tais transformações advindas de sistemas históricos que se salientaram eminentemente no final da Baixa Idade Média proveram o reaparecimento da revolução urbana, produto da nova matriz econômica comercial que assegurou o surgimento de uma nova camada social: a burguesia mercantil, que foi de um papel fundamental na diplomacia de consolidação dos territórios e das monarquias patrióticas modernas e no subsídio para um todo panorama técnico científico e artístico.

> O período é de grande inventividade técnica estimulada e estimuladora do desenvolvimento econômico. Criam-se novas técnicas de exploração agrícola e mineral de fundição e metalurgia, de construção naval e navegação, de armamentos e de guerra. É o momento de invenções da imprensa e de novos tipos de papeis e de tintas. (SEVCENKO, 1985, p. 12)

Os antigos Artesãos da Idade Média aperfeiçoaram suas técnicas mediante estudo prévio, para isso convertendo suas corporações ou guildas[10] em escolas nas quais o mestre, acompanhado atenciosamente por discípulos, podiam exercitar o ofício de reproduzir com fidelidade a beleza presente na paisagem natural nas cenas cotidianas onde o homem aparece geograficamente no plano da pintura como cerne. O desejo de reproduzir o *belo* fazia-se necessário mais que simples capricho era imprescindível fazê-lo, pois:

> Todo o belo é uma manifestação do Divino. Assim sendo, a exultação, o cultivo e a criação do belo, consistem no mais elevado exercício de virtude e no gesto mais profundo de adoração a Deus. A produção do belo através da Arte é o ato mais sublime de que é capaz o homem. (SEVCENKO, 1985, p. 19).

Quando nos remetemos aos legados deixados pelos humanistas que se desdobraram nas várias áreas do conhecimento: matemáticos, arquitetos, físicos, químicos, filósofos, teólogos, juristas e literatos etc., os artistas plásticos, ou melhor seu legado artístico eternizado na pintura e na escultura melhor, evocam e sintetizam o Renascimento.

A produção plástica intensa toma a dianteira de todo o inestimável e vasto legado humanista por traduzir o momento histórico de inquestionável prosperidade econômica decorrente de práticas mercantis financiadas e encabeçadas pela burguesia.

> A ruptura dos antigos laços sociais de dependência social e das regras corporativas promovem, portanto, a liberação do indivíduo e o empurram para a luta da concorrência com outros indivíduos, conforme as condições postas pelo Estado e pelo capitalismo. (SEVCENKO, 1985, p. 11)

A Arte era, pois o mecanismo perfeito por meio do qual a burguesia se utilizou para sua auto afirmação, correlacionando direta ou indiretamente sua classe à nova

---

[10]Associações que surgiram na Idade Média, a partir do século XII, para regulamentar o processo produtivo Artesanal nas cidades que contavam com mais de 10 mil habitantes. Essas unidades de produção Artesanal eram marcadas pela hierarquia (mestres, oficiais e aprendizes) e pelo controle da técnica de produção das mercadorias pelo produtor. Entende-se por Corporação de Ofício as guildas (associações) de pessoas qualificadas para trabalhar numa determinada função, que se uniam em corporações, a fim de se defenderem e de negociarem de forma mais eficiente.
Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Corporações_de_Ofício>. Acesso em: 20/Mar./2015.

ordem econômica, política, social na qual projetar-se-ia impreterivelmente no centro, como grande patrocinadora dos inventos técnicos, científicos e artísticos estreitando suas relações com a nobreza e o Alto Clero que juntos comporiam o mecenato, instituição de vital necessidade à concretização de obras monumentais, um avanço para a época em que foram executadas e objeto de fascínio e estudo para os contemporâneos.

O espaço urbano então sofre constantes interferências plásticas, mostra do poderio financeiro em consonância com a mentalidade burguesa difusora de uma cultura do novo, propondo comportamentos, hábitos e valores condizentes com o momento histórico provando sua superioridade ante a cultura medieval constantemente apontada como inferior e retrógrada, com seu românico embrutecido e pesado dando as catedrais aparência de fortalezas militares embora também o fossem, prevalecendo na Arte da Alta Idade Média, suplantado posteriormente pelo gótico, que embora mantivesse algumas características românicas já demonstrava leveza nas ogivas e delicadeza no colorido das iluminarias e vitrais que iluminavam o sombrio interior dos templos.

Na imaginária sacra prevalecia o estilo bizantino pouco preocupado com noções de proporcionalidade, volume e perspectiva o que conferia um efeito “chapado” às imagens meticulosamente hieratizadas dentro de uma hierarquia celeste fixa. Ao contrário dessa, a Arte renascentista preocupava-se sobremaneira com a harmonia do todo, com a proporcionalidade com o volume realista obtido entre os jogos de luz e sombra e a coerente ocupação do espaço pictórico.

> Conforme verificamos, a nova camada burguesa, pretendendo impor-se socialmente, precisava combater a cultura medieval, no interior da qual ela aparecia somente como uma porção inferior e sem importância da população. Era, pois, necessário construir uma nova imagem da sociedade na qual, ela, a burguesia, ocupasse o centro e não as margens do corpo social. (SEVCENKO, 1985, p. 24).

A nova concepção artística intuía a fidelidade na reprodução da cena pintada pretendendo tocar as pessoas através dos sentidos; para tanto as técnicas de perspectiva ampliavam o campo pictórico conferindo à obra a impressão de ali estarem multiplicadas cenas da vida cotidiana. A perspectiva do *dolce stil nouvo* (doce estilo novo) representada por *Ducio* e *Giotto* evoluíram para a:

> [...] invenção da perspectiva matemática, ou a perspectiva exata", em que todos os pontos do espaço retratado obedecem a uma norma única de projeção, deveu-se com uma grande dose de certeza, a Felipo Brenelleschi, arquiteto florentino, por volta de 1420. Baseado no teorema de Euclides, que estabelece uma relação matemática proporcional entre objeto e sua representação pictórica [...] (SEVCENKO, 1985, p. 30).

O domínio da técnica levou a Arte a *status* de ciência, tornando-se desconhecida aos Artesãos populares. Esta exigência fez-se necessária para atender ao sofisticado gosto artístico que a partir de então evoluía constantemente. O artista/cientista era senhor do domínio da técnica conciliando em seu ofício, estética e cálculo, conferindo assim à obra procedente de seu ateliê alto valor econômico, acessível apenas ao clero, a nobreza e a burguesia, esta última ávida em afirmar-se ante as cortes reais e ao papado provando assim seu refinamento e poderio financeiro:

> A Arte renascentista é uma Arte de pesquisa, de invenções, inovações e aperfeiçoamentos técnicos. Ela acompanhada paralelamente as conquistas da física, da matemática, da geometria, da anatomia, da engenharia e da filosofia. Basta lembrar a invenção da perspectiva matemática por Brunelleschi, os seus instrumentos mecânicos de construção civil ou militar, ou instrumentos de engenharia civil inventados por Leonardo da Vinci, ou as pesquisas anatômicas de Michelangelo, ou o aperfeiçoamento das tintas a óleo pelos irmãos Van Eyck, ou os estudos geométricos de Albrecht Dürer, entre tantos outros... (SEVCENKO, 1985, p. 25).

4.2 UM BREVE RELATO SOBRE A BIOGRAFIA DE LEONARDO DA VINCI[11]

Leonardo Da Vinci, pintor, escultor, músico, arquiteto, engenheiro, cientista, anatomista, inventor e escritor nasceu em 15 de abril de 1452, na cidade de Anchiano[12], filho de Piero Da Vinci e de uma camponesa Catarina.

---

[11] Parte desta unidade encontra-se publicada originalmente em Chaves & Rodrigues (2014b, p.49-52).

[12]Anchiano é um vilarejo (*frazione*) da comuna de Vinci, província de Florença, Itália, onde supostamentenasceu Leonardo da Vinci (1452-1519), fato pelo qual a cidadezinha possuí fama internacional.

Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Anchiano>. Acesso em: 03/Mar./2015.

> Para alguém nascido em uma comunidade fechada, em relativo isolamento, nós sabemos como surpreendente precisão a data e a hora exatas do nascimento de Leonardo: sábado, 15 de abril de 1452, às 10:30 da noite. E devemos agradecer ao orgulhoso avô de Leonardo, Antonio, por isso. Ele registrou o evento num caderno de notas que se perdeu depois de sua morte e foi descoberto por um pesquisador de Leonardo em 1939. O registro diz: "1452: Nasceu-me um neto, o filho de Ser Piero meu filho no dia 15 de abril, um sábado, na terceira hora da noite. Ele carrega o nome de Leonardo". Talvez fosse um hábito nesse avô ser tão preciso, porquê - embora ele próprio não fosse um advogado - Antonio descendia de uma longa linhagem de advogados, e talvez fosse uma tendência familiar manter registros e fazer anotações, os quais fornecem um registro tão claro - e que sobreviveu - desse feliz acontecimento. Na verdade, o caderno de anotações que Antonio usou para registrar o evento foi o livro de tabelião de seu pai. (WHITE, 2002, p. 27).

Leonardo viveu em uma época propícia para desenvolver seus talentos, o Renascimento. Tal termo é descrito como:

> [...] o termo "Renascimento" é tão claro que não necessita de uma definição; no entanto, pode-se usá-lo em dois sentidos bem diferentes. O termo pode se referir a um período da história, do mesmo modo que por exemplo, nos referimos "ao século XV", ou então, como os adjetivos "medieval" e "vitoriano", pode descrever um conjunto de ideias e de valores culturais bastante claros. Um artista renascentista poderia ser simplesmente alguém que viveu cronologicamente durante o Renascimento, por exemplo, Hieronymus Bosch[13], apesar de suas visões mais ou menos tenebrosas serem vistas na generalidade como essencialmente "medievais"; ou poderia ser um artista que partilhou ativamente (e ajudou a formar) as crenças e os pontos de vistas da cultura do Renascimento, como Michelangelo ou Botticelli. É importante ter esta diferença bastante clara, porque foi somente num período mais avançado que o Renascimento, com as ideias a que o associamos mais concretamente, deixou de pertencer a um pequeno grupo de indivíduos e adquiriu um uso mais geral. (MANN. 2004, p. 14).

Leonardo viveu sua infância na casa paterna, em Vinci. Por volta de 1460, procedido da morte de seu avô Antônio, sua família mudou-se para Florença.

---

[13]Andrea di Francesco di Cione (Florença,1435—Veneza,1488) artista florentino que esteve ativo durante a Renascença. Trabalhou na corte de Lorenzo de Médici e é considerado um dos pintores mais influentes de seu período. Entre seus alunos incluem-se Leonardo da Vinci, Sandro Botticelli, Perugino e Ghirlandaio. Também influenciou Michelangelo e foi um escultor de primeira grandeza. Andrea começou a trabalhar como ourives na oficina de Giulio Verrocchi, de quem tomou o sobrenome. Não se sabe se foi aprendiz de Donatello. Em 1474 e 1475, pintou *O Batismo de Cristo*, agora na *Galleria degli Uffizi*, em Florença. Nesse trabalho, foi ajudado por Leonardo Da Vinci ainda jovem, que terminou a paisagem e o anjo na extrema esquerda. Segundo Giorgio Vasari, Andrea decidiu então nunca mais pintar, pois Leonardo tinha o ultrapassado em técnica e genialidade. Em 1475, Verrocchio começou a se dedicar quase inteiramente à escultura.

> Florença era um dos lugares mais liberais e de livre-pensamento do mundo durante a segunda metade do século XV. Ela exemplificava o surgimento de idéias do humanismo e uma forma de democracia que encorajava novidades e inovação. Isso se refletia parcialmente no sistema político da cidade, uma espécie de democracia primitiva, na qual os cidadãos mais ricos controlavam os negócios usando uma forma de eleição. (WHITE, 2002, p. 71).

Ali, ele se tornou aprendiz do prestigioso e renomado pintor, escultor, ourives e maestro florentino. *Andréa Del Verrocchio*[14], ao conviveu com este por 10 anos. Laborando no ateliê de *Verrochio*, instruiu-se nas Artes e, além da pintura e escultura, se encontrou disposto no estudo de uma série de ferramentas e técnicas, que posteriormente foram usadas como lugar de partida de suas ideias e invenções.

> A vida na *bottega* era sem dúvida absorvente, mas Leonardo vivia totalmente mergulhado no que fazia. Nessa época ele se dedicava à pintura e tinha um claro prazer em aprender. E nem tudo era trabalho duro; a *bottega* era também um lugar onde ele aprendeu muito, além das regras de pintura e da técnica de misturar tintas e preparar superfícies. (WHITE, 2002, p. 76).
> No estúdio de Verrocchio a vida vinha até o artista, e o verdadeiro sentimento de exploração e a ousadia do pensamento, da imaginação e do desejo de adquirir conhecimento que resumem a Renascença lá em abundância. Leonardo resumiu o espírito do tempo ao escrever mais tarde: *O desejo de saber é natural aos homens bons.*(WHITE, 2002, p. 76-77)

Em 1472, Leonardo já frequentava, a *Compagnia de San Luca*, grêmio de pintores de Florença. Quando completou 20 anos de idade, em virtude de seu talento nato, já tinha sobrelevado todos os procedimentos e métodos de seu mestre, na utilização de luzes e cores.

> Como sua reputação crescia, e seus encargos também aumentavam, ainda jovem, ele se tornou um mestre independente. Durante a Renascença, aonde a maioria das pinturas eram retratos ou cenas religiosas. Leonardo inovou em sua primeira obra, 'O Vale do Arno', que representa uma paisagem campesina.
> Contrariando a sobriedade característica do período, ele rompeu com a tradição artística e criou um novo estilo, com foco no mundo natural. Sua obra, desenhada à pena, está repleta de movimentos da natureza e, é nítida a impressão da luz que passa por sobre as montanhas, evidencia o farfalhar das folhas ou a água escorrendo.(GOMES,2006, p. 9).

Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Andrea_del_Verrocchio>. Acesso em: 14/abr./2015>. Acesso em: 20/Abr./2015.

Figura 1 - St. John in the Wilderness, (Bacchus).

Fonte: Leonardo Da Vinci, 1683-1693.

Leonardo começara a ter o sentimento de que pintar cenários de fundo para as obras de *Verrocchio*, acabou interessando-se pelas novas técnicas a óleo – uma novidade na Itália – com o intuito de criar obras próprias. Em 1474, pintou o retrato de *Ginebra de Benci*. Ainda que seguindo por caminhos paralelos aos de seu mestre, continuou vivendo com *Verrocchio* até partir para Milão.

Em 1476, além de ser reconhecido como o melhor assistente de seu mestre, por ter participação na execução da obra *O Batismo de Cristo* (cf. figura 2, a seguir), em que retratou o anjo à esquerda da tela e a paisagem de matizes negrumes, Leonardo já corroborava sua genialidade.

Figura 2 - O Batismo de Cristo.

O Batismo de Cristo

Fonte: Andrea del Verrochio; Leonardo Da Vinci; Sandro Botticelli, 1472-1475.

Referências históricas retificam que o primeiro trabalho demandado à Leonardo foi o da capela do Palácio de Vecchio (cf. figura 3 a seguir), entretanto ele não chegou a executá-lo. Dessa fase, conhecida como período imberbe do artista, sobressai-se a *Madonna Benois* (cf. figura 4), confeccionada em 1478.

Figura 3 – Palácio de Vecchio.

Fonte: Arnolfo di Cambio, 1299.

Figura 4 – *Madonna Benois* (ou Virgem *Benois*).

Fonte: Leonardo Da Vinci, 1478.

No ano de 1480 nos é relatado que por intermédio do patrocínio de Lourenço[15] o Magnífico, um novo rico que obteve lucros por meio da guerra e que, nesse ínterim do período renascentista, enxergou de maneira clara que a verdadeira imortalidade poderia se ascender pelas Artes, Leonardo ingressou na Academia[16] de *Giardino di San Marco* e se aproximou

---

[15]Lourenço de Médici(Florença,1449–1492),estadista italiano, soberano da República Florentina durante o Renascimento italiano.Conhecido como Lourenço, o Magnífico, foi um diplomata, político e patrono de acadêmicos, artistas e poetas e também mecenas. Sua vida coincidiu com alguns dos pontos altos do início do Renascimento na Itália, e sua morte marcou o fim da chamada Idade de Ouro de Florença.A paz frágil que ele ajudou a manter entre os diversos Estados italianos entrou em colapso depois de sua morte.
Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Lourenço_de_Médici>. Acesso em: 14/Abr./2015.

[16]O museu está localizado no antigo convento dominicano de San Marco (1436), um lugar que foi um importante centro da vida religiosa e cultural de Florença.Hoje, o museu é mais famoso por seus afrescos de *Fra Angelico* (Giovanne de Fiesole,nasceu em Vicchio de Mugello em 1387 e morreu em 1455 em Roma, mais conhecido como Fra Angelico, foi um pintor italiano, beatificado pela Igreja Católico, considerado o artista mais importante na época do Gótico Tardio ao início do Renascimento), feitas no século XV, e a presença de muitas pinturas do mesmo artista, recolhidos no século XX. Há também exemplos importantes da pintura do século XVI, como testemunham as numerosas obras de *Fra Bartolome* (seu nome verdadeiro era Baccio della Porta - Florensça, 1472 - Fiesole, 1517- foi um importante pintor renascentista florentino).

pela primeira vez, da escultura. Gomes (2006, p. 10) nos relata que "um ano depois, em 1481, ele iniciou, mas não terminou, a obra São Jerônimo".

Em busca de novos desafios e, principalmente de dinheiro, em 1482, Leonardo mudou-se para Milão objetivando servir o duque da cidade, *Ludovico*[17] *Sforza*, redigindo uma carta de apresentação a este. Efetivamente, essa carta era uma espécie de currículo, em que nela eram descritas suas habilidades de engenheiro civil, construtor de máquinas bélicas, pintor, escultor e arquiteto. Essa mesma carta salientava sua capacidade em construir pontes portáteis, conhecimentos em elaborar técnicas de bombardeios com canhões e a construção de navios encouraçados, entre outros prodígios.
Em sua estadia em Milão[18]:

> Leonardo desejava ver seus inventos trabalhando em prol da cidade. Ele esboçou planos militares, que incluíam catapultas, mísseis, bombas, escalar para muralhas inimigas, tanques e fortalezas. Apesar de não ter tido tempo de criar e nem testar todas as suas obras, hoje, percebe-se que elas eram bem avançadas para seu tempo. O tanque, por exemplo, que foi usado na Primeira Guerra Mundial, quase 500 anos depois de Leonardo tê-lo idealizado. Além disso, ele também planejou a reconstrução da cidade, para impedir que a Peste Negra devastasse seus habitantes, e incluiu no projeto um sistema de água e esgotos para sanear Milão.(GOMES, 2006, p. 11)

Entre os anos de 1482 e 1499, Leonardo, trabalhando para *Ludovico*, salvaguardou seu próprio atelier, onde vários de seus aprendizes trabalhavam, para os quais, provavelmente redigiu vários textos que futuramente foram agrupados com o título de Tratado de Pintura (*Trattato della Pinttura*, editorado em 1651). Desse período milanês destacam-se várias de suas obras.

Fonte: <http://www.uffizi.com/galleria-degli-uffizi/museo-di-san-marco-firenze.asp&prev=search>. Acesso em: 14/Abr./2015.

[17]Ludovico Sforza (Ludovico *Il Moro*, 1452 — 1508), foi um membro da família *Sforza* de Milão, Itália. Foi o segundo filho de Francesco Sforza. Protegeu Leonardo da Vinci e outros artistas. Foi responsável por encomendar A Última Ceia a Da Vinci, entre outras obras.
Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ludovico_Sforza>. Acesso em: 15/Abr./2015.

[18]Milão é uma comuna italiana, capital da região da Lombardia,província de Milão.Em1796, Milão foi conquistada por Napoleão I, que fez dela a capital do seu Reino de Itáliaem1805.Durante o período romântico, Milão foi um importante centro cultural na Europa, atraindo vários artistas, compositores e importantes figuras literárias.
Fonte:<http://pt.wikipedia.org/wiki/Mil%C3%A3o>. Acesso em: 14/Abr./2015.

> Entre 1483 e 1485, ele concluiu a primeira versão da *Virgem dos Rochedos* ou *Madona das Pedras,* num esquema de composição triangular, onde aparecem a Virgem, o Filho, São João e o anjo. (GOMES, 2006, p. 11).

Figura 5 - Madona das Pedras.

Fonte: Leonardo Da Vinci, 1483-1486.

Gomes (2006, p.12) ainda nos afirma que "desta mesma época, são alguns retratos femininos, como *A dama de arminho"* (obra essa, em que serão estudados seus padrões matemáticos no Capítulo VI deste trabalho). É importante lembrar que:

> Durante os 17 anos que permaneceu em Milão, ele se tornou o artista oficial da corte. Tocava flauta, cantava, recitava poesia e quando havia um festival, ainda criava e costurava trajes. Também serviu o duque durante os empreendimentos militares, como engenheiro, e como arquiteto, criando inúmeros modelos para a cúpula da catedral de Milão. Em paralelo, Leonardo estudava ótica, perspectiva, proporções e anatomia. Irrequieto, ele também ajudou o matemático italiano Luca Pacioli, em sua célebre obra *A divina proporção,* que enfocava a geometria. ... Nesse mesmo período, ele também alcançou a maturidade nos campos científicos e artísticos. Pintou, esculpiu, criou cenografias para peças teatrais, desenhou armas avançadas, incluindo veículos de guerra e submarinos, edifícios, maquinarias e se aperfeiçoou em anatomia. Produziu também sua obra mais famosa, a *La Gioconda,*mais conhecida como *Mona Lisa,* entre 1503 e 1506.(GOMES,2006, p. 12-13).

Em 1516, Leonardo foi servir o rei francês Francisco[19] I, o qual comprou a *Mona Lisa* de Leonardo, colocando-a em seu castelo em Amboise, às margens do rio Loire. Nesse meio tempo, Leonardo teve suas idas e vindas, voltando para Milão, viajando à Roma, até que deixou Roma para viver os restos de seus dias em Amboise.

> Num pequeno castelo cedido pelo rei, ele encontrou um ambiente ideal para prosseguir com a Arte e realizar seus experimentos científicos. Três anos depois, em 23 de abril de 1519, escreveu seu testamento, nomeando como herdeiros de seus bens, desenhos, manuscritos e instrumentos Francesco Melzi, um rapaz que há alguns anos havia se tornado seu discípulo, o serviçal Salai, os seus irmãos florentinos, os pobres e as igrejas de Amboise. No dia 2 de maio do mesmo ano, aos 69 anos, Leonardo faleceu em Cloux, num castelo próximo a Amboise. Segundo dizem, nos braços do rei Francisco I. Finalmente, em agosto do mesmo ano, ele foi sepultado no claustro da Igreja de São Florentino de Amboise. A lápide, que encerrava seu corpo, trazia os seguintes dizeres: *"noble millanois et premier peintre er ingénieur du Roy, meschanischien d`estat et anchien directeur de peinture du duc de Milan* (nobre milanês, primeiro pintor, engenheiro e arquiteto do Rei, mecânico do Estado e antigo diretor de pintura do duque de Milão)." (GOMES, 2006, p. 15).

4.3 A MATEMÁTICA DE LEONARDO, SEUS CÓDIGOS E ALGUMAS DE SUAS OBRAS[20]

Este capítulo reserva-se a mostrar algumas peculiaridades a respeito dos conhecimentos matemáticos produzidos por Leonardo com a finalidade de entendermos como que se deu a união entre a Matemática e a Arte, e a Matemática e seus estudos científicos (Códigos).

Primeiramente exibimos os códigos escritos por Leonardo Da Vinci, com o propósito de mostrar o uso da Matemática em seus estudos científicos, verificando assim a importância da mesma para ele em seus estudos, e ao mesmo tempo sua versatibilidade ao estudar vários ramos da ciência.

---

[19](Cognac,1494–Rambouillet,1547), também conhecido como Francisco, o Rei-Cavaleiro,o Pai e Restaurador das Cartaseo de Nariz Comprido, foi o Rei da França de 1515 até sua morte. Filho de Carlos d'Orléans, Conde de Angoulême, e Luísa de Saboia. Ele sucedeu seu primo e cunhado Luís XII, que morreu sem deixar herdeiros.
Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Francisco_I_de_Fran%C3%A7a>. Acesso em: 15/abr./2015.

[20]Parte desta sessão encontra-se originalmente em Chaves & Rodrigues (2014a).

A respeito de seus códigos é sabido que:

> Sempre se fala em "códigos"quando da referência aos escritos de Leonardo. Trata-se de cerca de cinco mil páginas de apontamentos nos quais a escrita de Leonardo, canhoto, da direita para a esquerda, é o elemento característico. Convém lembrar sua mania de escrever tudo. Após a morte de seu devoto aprendiz Francesco Melzi (1493-1570) todo esse material sofreu uma terrível dispersão, e a divisão dos manuscritos originais foi realizada pelo escultor Pompeo Loeni (1533-1608) (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 53).

No presente momento, os documentos mais importantes de Leonardo estão repartidos em dez renomadas coleções:

> **CÓDIGO ATLÂNTICO**
> (Milão, Biblioteca Ambrosiana), 1478-1518. Contém estudos e apontamentos referentes à: i) matemática; ii) astronomia; iii) mecânica; iv) botânica; v) zoologia; vi) Artes militares; vii) geografia; viii) química; ix) estudos sobre os autômatos; x) pintura e escultura, ótica, perspectiva, teoria da iluminação e das sombras - estudos para pinturas (*Adoração dos Magos, Leda, Batalha de Anghiari)*, esboços preparatórios para monumentos; xi) fábulas e meditações filosóficas.
> **CÓDIGO ARUNDEL**
> (Londres, British Library), 1478-1518. Contém estudos e apontamentos referentes à: i) matemática; ii) mecânica; iii) ótica; iv) arquitetura (entre os quais os trabalhos para a residência real de Francisco I na França); v) sistemas de respiração para o mergulhador.
> **CÓDIGO WINDSOR**
> (Castelo de Windsor, Royal Collection), 1478-1581. Contém estudos e apontamentos referentes à: i) anatomia; ii) paisagens; iii) figuras, perfis, caricaturas; iv) cavalos; v) pintura (estudos para algumas pinturas, entre as quais *A Virgem das Rochas* e a *Última Ceia*); vi) rebus, emblemas, alegorias.
> **CÓDIGO TRIVULZIANO**
> (Milão, Biblioteca Trivulziana do Castelo Sforzesco), 1487-1490. Contém estudos referentes à: i) arquitetura militar e religiosa; ii) notas sobre os estudos como autodidata.
> **CÓDIGO ASHBURNHAM**
> (Paris, Instituto de França), 1489-1492. Contém estudos e apontamentos referentes à: i) pintura; ii) assuntos variados.
> **CÓDIGOS DE MADRI**
> (Madrid, Biblioteca Nacional), 1490-1505. São dois códigos A e B. Contém estudos e apontamentos referentes à: i) geometria; ii) mecânica; perspectiva, ótica; iii) pintura (*Batalha de Abghiari*).
> **CÓDIGOS DO INSTITUTO DE FRANÇA**
> (Paris, Instituto de França), 1492-1516. Trata-se de 12 códigos, normalmente indicados de A à M. Contém estudos e apontamentos referentes à: i) geometria; ii) ótica; iii) mecânica; iv) hidráulica; v) Arte militar; vi) vôo dos pássaros; vii) assuntos variados (entre os quais, apontamentos sobre a *Última Ceia*)
> **CÓDIGOS FOSTER**
> (Londres, Victoria and Albert Museum), 1493-1505. Trata-se de 3 códigos, numerados segundo a numeração romana, de I à III. Contém estudos e apontamentos referentes à: i) geometria; ii) física; iii) arquitetura; iv)

> hidráulica; v) assuntos variados (entre os quais, apontamentos sobre a *Última Ceia*).
> **CÓDIGO LEICESTER**
> (ou código Hammer, propriedade de Bill Gates, Seatle), 1504-1506. Contém estudos e apontamentos referentes à: i) hidrodinâmica; ii) astronomia.
> **CÓDIGO SOBRE VÔO DOS PÁSSAROS**
> (Turim, Biblioteca Real), 1505. Contém estudos e apontamentos referentes à: Estudos sobre o vôo dos pássaros interpretado segundo uma abordagem mecânica (função da asa, resistência do ar, correntes, ventos) com a finalidade de construir uma máquina voadora (planador) (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 53-58).

É pertinente observarmos que dos dez códigos citados acima, cinco estão relacionados com a Matemática (dar-se a entender que Aritmética) e à Geometria.

> Os escritos mais importantes de Leonardo apontam sua relação com a Matemática. Suas coleções mais importantes são 10 *códigos*, dos quais envolvendo Matemática são: *Código Atlântico* (1478-1518); *Código Arundel* (1478-1518); *Códigos de Madri* (1490-1505); *Códigos do Instituto de França*; *Códigos Foster* (1493-1505). (CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 152).

Também é possível ver que:

> As considerações geométricas e as construções geométricas exatas que foram encontradas até agora no famoso *Código Atlântico* e nos outros manuscritos impressos não são suficientes, embora tudo que neles se leia seja original, para considerar Leonardo entre aqueles que souberam acrescentar alguma página à geometria herdada dos gregos (a única conhecida em seu tempo). Além disso, a ideia, manifestada por ele, de obter a retificação da circunferência fazendo escorregar uma roda sobre uma haste reta, confirma a opinião de que ele se interessava por geometria apenas na medida em que essa ciência resultava ser útil aos pintores e aos arquitetos. É uma conclusão que se confirma nas aplicações por ele realizadas de algumas lúnudas de Hipócrates (...) à quadratura de figuras complicadas, esteticamente admiráveis, mas carentes de valor científico (LORIA, 1929-1933, P. 263 apud. BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 62).

Com relação à Matemática ainda é possível verificar que

> [...] pelo menos em alguns aspectos da Matemática e durante boa parte de sua vida, Leonardo certamente não brilhou por suas competências nem em matemática, nem nas letras. O fato é que um dos dotes que caracterizam a aquisição de tais competências é a constância e, com certeza, Leonardo teve um caráter fortemente inconstante. (BAGNI; D´AMORE, 2011, p. 58).

Vale ressaltar, que por ser filho bastardo, Leonardo não pôde frequentar o meio acadêmico. Sendo autodidata, ele aprendeu muito, a respeito das ciências, tirando conclusões próprias através do empirismo. Isso foi um fator de extrema importância, uma vez que o conhecimento matemático de Leonardo é dividido em dois momentos de sua vida. Antes e depois dele conhecer o matemático *Luca Pacioli*[21].

No que tange à Matemática, Leonardo, amante da Geometria dedicou-se ao trabalho com figuras geométricas. Sua realização mais notável neste campo é o *poliédrico*, conjunto de ilustrações (Cf. figuras 6 a 7) nas obras “*Summa de Arithmetica, Geometrica, proportioni et proportionalita*” (1494) e “*De Divina Proportione*” (1509) de *Luca Pacioli*.

> Espalhadas entre os manuscritos de Leonardo da Vinci, junto com desenhos, anotações, rabiscos e cálculos, há também diversas criações poliédricas, fruto do que Leonardo denominava sua “recreação geométrica”. Com infinitas possibilidades de variação, esses poliedros regulares e semirregulares parecem ter fascinado Leonardo. (ATALAY, 2008, p. 144).

.

[21] Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 –1517), monge franciscano e célebre matemático italiano. Em 1475, tornou-se o primeiro professor de matemática da Universidade de Perugia. Pacioli tornou-se famoso devido a um capítulo deste livro que tratava sobre contabilidade: *Particulario de computies et scripturis*. Nesta seção do livro, Pacioli foi o primeiro a descrever a contabilidade de dupla entrada, conhecido como método veneziano (*el modo de Vinegia*) ou ainda "método das partidas dobradas", por isso é considerado o pai da contabilidade moderna. Esse sistema foi introduzido em 1494, em um tratado matemático o qual o mérito fora atribuído a Fibonacci, que por sua vez, introduzira tal metodologia 3 séculos antes, em sua obra *Summa*.

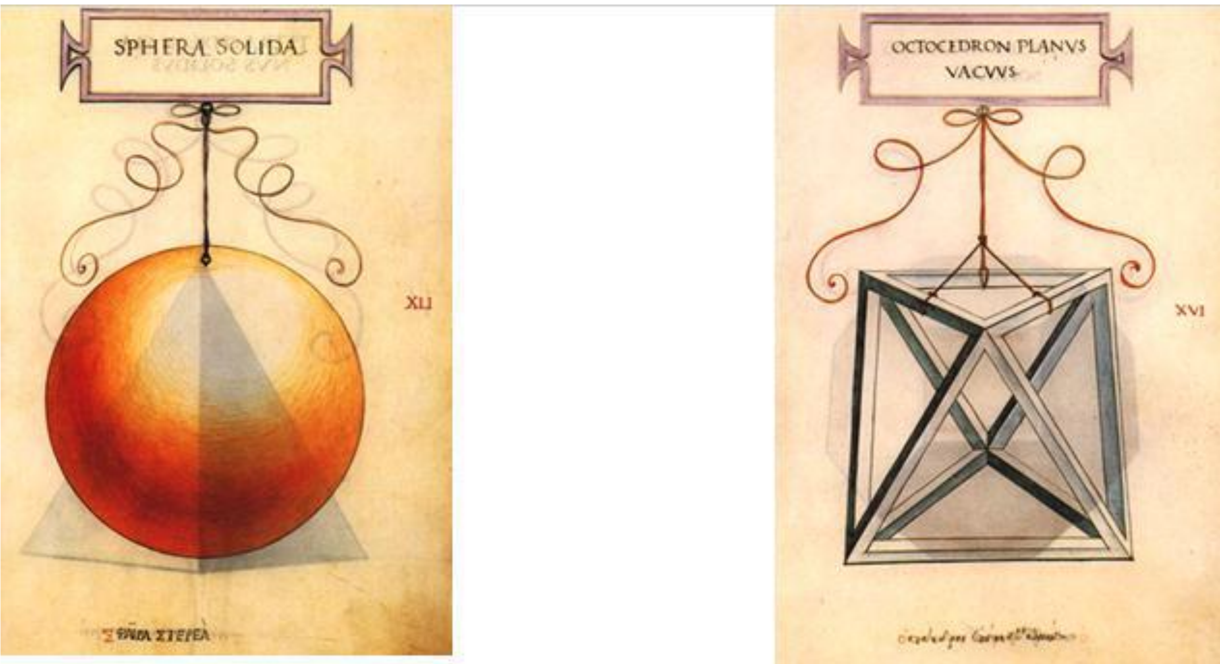
Figura 6 – O termo Ycocedron Planus Abscisus na placa título significa icosaedro truncado.

Fonte: Luca Pacioli; Leonardo Da Vinci, 1498.

A respeito da Geometria de Leonardo, antes de seu encontro com Luca Pacioli,

> [...] é necessário fazer referência aos Códigos A, B e Foster. Ele demonstra grande interesse pela construção dos polígonos regulares com régua e compasso. Leonardo divide a circunferência em 3, 4, 5, 6, 7, 8 e assim sucessivamente em muitas outras quantidades de pArtes iguais, até um máximo de 48 pArtes (Código A, Paris, folha 11 v), muito embora estas divisões se encontrem em páginas espalhadas e em diferentes Códigos. Muitas de tais construções são apenas aproximadas. São dadas duas versões distintas do pentágono regular.(BAGNI; D´AMORE, 2011, p. 66-67).

Figura 7 – Os Poliedros de Leonardo da Vinci – desenhos feitos manualmente com admirável perfeição.



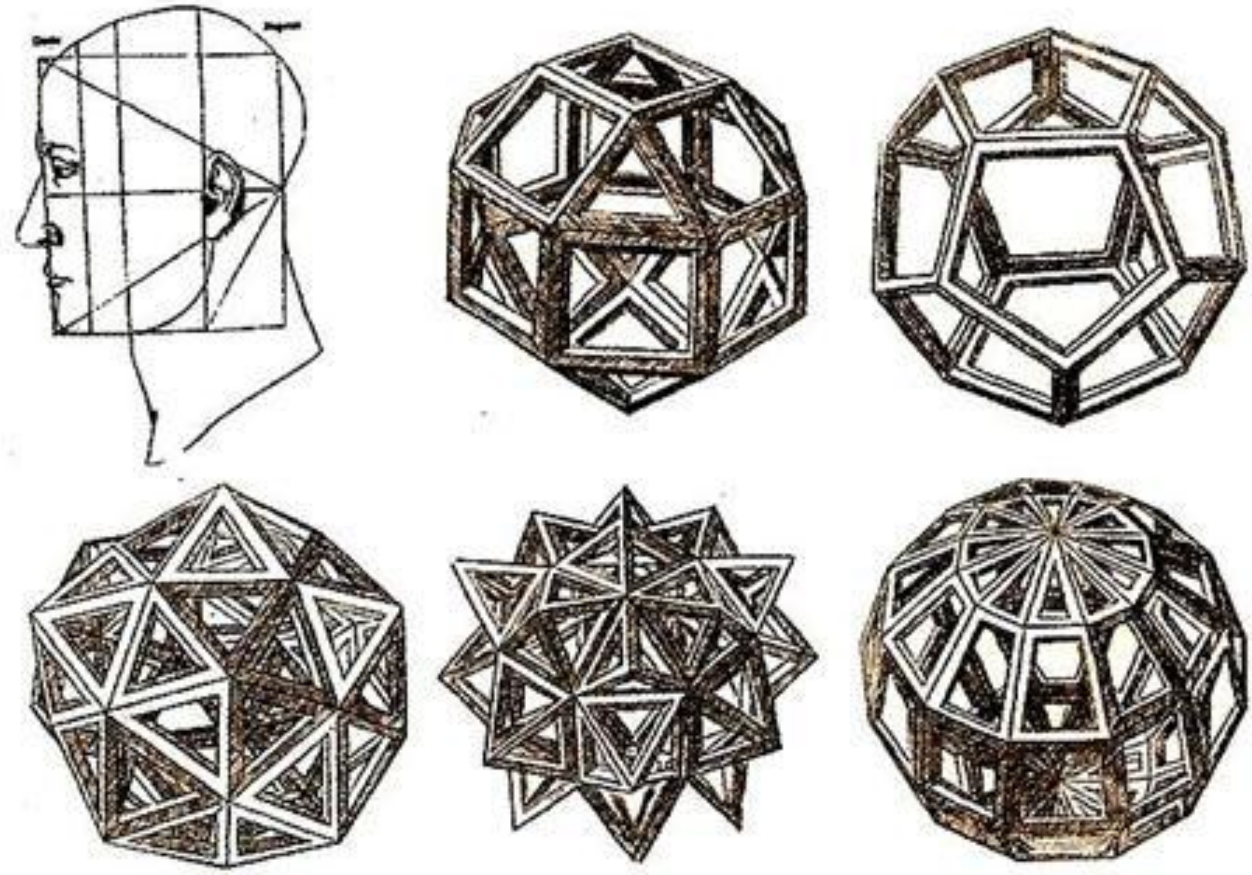
Fonte: Luca Pacioli; Leonardo Da Vinci, 1498.

Consegue-se perceber que a destreza do pintor é maior com a Geometria do que com a Aritmética, colocando-nos a crer que sua habilidade na construção geométrica advinha de sua grande habilidade como pintor, e a necessidade do uso da Geometria em suas pinturas. Pouco se sabe se Leonardo teve contato com obras antigas, como *Os Elementos* de Euclides, deveras é sabido que a sua versão italiana foi feita por Tartaglia[22], em Veneza, iniciadas em 1534, ou seja, após a morte de Leonardo.

---

[22]Nicolo Fontana (Brescia, 1499 – Veneza, 1557). Seu apelido Tartaglia (significa "gago"), tem uma história curiosa, que ele mesmo conta no seu livro "*Quesiti et inventioni diverse*". De origem bastante humilde, somente aos 14 anos aprendeu a escrever, mas isso não foi obstáculo para que viesse a ser engenheiro e a ensinar Matemática em cidades italianas como Verona, Veneza, Piacenza e Brescia. Além disso, fez trabalhos importantes onde demonstrou muitos conhecimentos de Aritmética, Geometria, Álgebra, Balística e Estática. Sendo o único professor de Matemática em Veneza, Tartaglia gradualmente foi adquirindo uma reputação como promissor matemático, devido às suas participações bem sucedidas em vários debates. Em 1537, foi impressa a sua primeira obra, "*Nova scientia inventa*" que se refere à balística. Em 1546, publicou "*Quesiti et inventioni diverse*", que tem a forma dialogada e inúmeras notas autobiográficas de caráter geral. A maioria dizia respeito a questões de engenharia e Arte militar, mas abordavam também questões matemáticas. Uma dessas questões conduzia a uma equação do 4º grau, que viria a ser mais tarde resolvida por Ferrari. Outras de suas referências historicamente importantes são quanto à resolução da equação cúbica. Figura

Figura 8 – Ilustrações de Da Vinci em De Divina Proportione.



Fonte: Luca Pacioli; Leonardo Da Vinci, 1498.

---

em sua obra a sua disputa com Fior e o seu encontro com Cardano, no qual Tartaglia entregou-lhe os “Tercetos” com a solução das cúbicas.
Fonte: <http://www.somatematica.com.br/biograf/tartaglia.php>. Acesso em: 20/Abr/2015.

Bagni & D´Amore (2011, p. 64) nos dá ciência de que "Leonardo parecia não sentir - se à vontade com as frações". No *Código Atlântico,* folha 192v há alguns exemplos de seus esforços na resolução delas:

> Leonardo escreve:
>
> (...) será $\frac{12}{12}$ isto é $\frac{1}{0}$.
>
> Pouco adiante, trabalha com os seguintes números:
>
> $1\frac{1}{12}$; $1\frac{1}{6}$; $1\frac{1}{2}$;
>
> transformando-os (corretamente) em frações impróprias:
>
> $\frac{13}{12}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{3}{2}$;
>
> soma essas três frações, obtendo $\frac{216}{78}$.
>
> O resultado está completamente errado, pois deveria ser $\frac{45}{12}$, isto é, $\frac{15}{4}$. Leonardo parece não reconhecer 12 como denominador comum e chega nesse improvável. (BAGNI; D'AMORE, 2011, P. 64).

Outro exemplo interessante é a relação que Leonardo fez das frações e raízes quadradas que estão presentes no *Código Atlântico,* folha 665 f:

> Ao multiplicar $\frac{2}{2}$ por si mesmo, Leonardo obtém $\frac{2}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{2}$, isto é, 2. A parti daí, deduz que $\sqrt{2}=\frac{2}{2}$ e daí generalizando: $\sqrt{3}=\frac{3}{3}$; $\sqrt{4}=\frac{4}{4}$;...
>
> Estas "igualdades"não parecem ser um equívoco, dado que são retomadas e confirmadas no *Código Arundel, folha 200v*, e estendidas às raízes cúbicas. (BAGNI; D´AMORE, 2011, p. 65).

Vemos, então, que Leonardo não se sente à vontade de trabalhar com as operações, proporções e instrumentos aritméticos mais elementares da Aritmética.

É explicito o quanto Luca Pacioli influenciou Leonardo em relação à Matemática. Discorremos agora a respeito da Matemática de após seu encontro com. É importante destacar que:

> [..] em 1493 em Urbino e, em 1494 em Veneza, finalmente, não em Latim, é impressa a obra enciclopédica de Luca Pacioli, *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni e proporizonalità* [...]. Leonardo adquire, sem

> titubear, um exemplar, o qual encomenda de Milão e paga 119 soldi (como anota, em sua habitual precisão, no Código Atlântico, folha 288, f). Estuda a obra e dela retira milhares de inspirações, resumindo os capítulos relativos à teoria das proporções no Código Madri 8936. Entretanto, mais do que tudo, a geometria o fascina e, em particular, a quadratura do círculo e a teoria das lúnulas. (BAGNI; D´AMORE, 2011, p. 70-71).

Na companhia de Luca, Leonardo aprende o significado da palavra *demonstração* e segundo (BAGNI; D´AMORE, 2011, p. 72) "assume a denominação de *adversária* para o enunciado a refutar em uma demonstração por absurdo".

5 PRINCÍPIOS MATEMÁTICOS PARA ANÁLISES DAS OBRAS ESCOLHIDAS

5.1 A DIVINA PROPORÇÃO E SUAS RECORRÊNCIAS NA MATEMÁTICA[23]

> *A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razões. O primeiro, podemos comparar a uma medida do áureo; ao segundo, podemos chamar de jóia preciosa.* KEPLER, (1571-1630)

O Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, na definição 3, diz: *uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor*. (BICUDO, 2009, p. 231). Frequentemente os epítomes de Desenho Geométrico, por exemplo, definem média e extrema razão (segmento áureo) como:

> Dividir um segmento em média e extrema razão consiste em dividi-lo em dois outros segmentos tais que o maior seja a média proporcional entre o segmento dado e o menor. O segmento maior denomina-se **segmento áureo** (significa 'segmento de ouro', considerado pelos antigos gregos como segmento da medida perfeita). (PINTO, 1991, p. 93 apud CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 143).

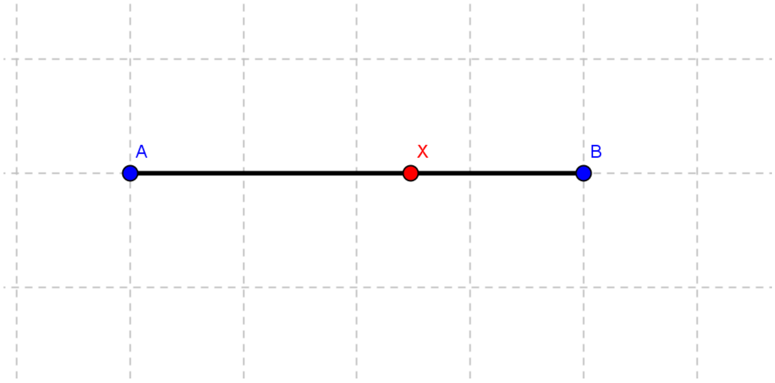
Ou seja, seja um segmento $\overline{AB}$ de extremidades em *A* e *B*, o ponto *X*, cognonimado ponto de ouro, é tal que:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \Leftrightarrow \overline{AX} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{XB}}$, onde $\overline{AX}$ é o segmento áureo (Cf. figura 9).

---

[23]Parte desta unidade foi publicada originalmente em Chaves & Rodrigues (2014a).

Figura 9 – Divisão de um segmento em média e extrema razão (segmento áureo)

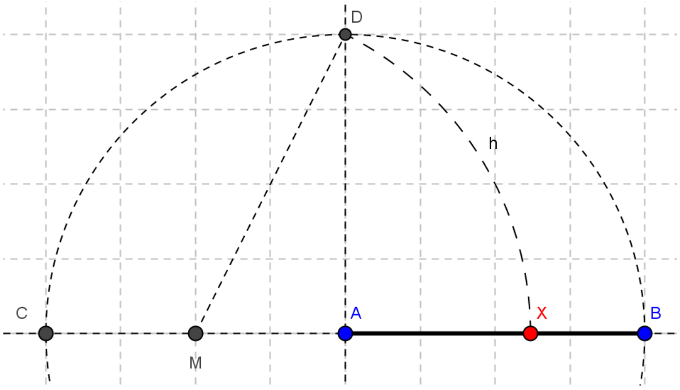


,

Fonte: Chaves & Rodrigues (2014a, p. 143)

Ainda, Pinto (1991, p. 94) evidencia, em um formato prescritível, o seguinte procedimento com a finalidade de definir um ponto *X* que reparte um segmento de extremidades $\overline{AB}$ em média e extrema razão: (i) tracejamos uma semicircunferência (Cf. figura16) de centro em *A* e extremidade em *B*; (ii) prolongamos o segmento $\overline{AB}$ e determinamos o diâmetro $\overline{CB}$; (iii) traçamos uma perpendicular a $\overline{CB}$ passando pelo ponto *A* e encontramos o raio $\overline{AD}$; (iv) determinamos *M*, ponto médio do segmento $\overline{CA}$; (v) traçamos um arco de circunferência com centro em *M* e extremidade em *D* até encontramos o segmento $\overline{AB}$ e determinamos o ponto *X* que divide o segmento $\overline{AB}$ em *média e extrema razão*; (vi) o segmento $\overline{AX}$ é o segmento áureo, visto que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$.

Figura 10 – Técnica de determinação do ponto que divide um segmento em média e extrema razão.



Fonte: Chaves & Rodrigues (2014a, p. 144)

Se minuciosamente analisarmos $\overline{AB} = \overline{AD} = r$, raio do semicírculo e $\overline{MA} = \frac{r}{2}$. Enxergamos que $\overline{MD} = R$ é o raio do arco *DMX* e, por decorrência $\overline{MX} = \overline{MA} + \overline{AX}$; deste modo,

$$R = \frac{r}{2} + x \Rightarrow x = R - \frac{r}{2} \tag{1}$$

Se tomarmos o triângulo retângulo ΔMAD e aplicarmos o teorema de Pitágoras teremos que:

$$R = \frac{r\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

De (1) e (2) podemos concluir que:

$$x = \frac{r \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2} = r \cdot 0{,}6180339887... \tag{4}$$

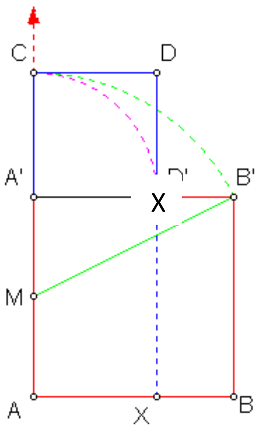
Devorante, como $\overline{MX} = \overline{MA} + \overline{AX}$ de (1) e (4), temos que

$$\overline{MX} = R = r \cdot 1{,}6180339887... = r \cdot \phi \tag{5}$$

Já Brandão (2014 apud CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 145) conjectura que os pitagóricos utilizaram um processo geométrico para determinar a *média e extrema* *razão* de um segmento; isto é, para determinar o ponto áureo em um segmento dado:

> A forma tradicional, encontrada no livro *Os elementos* de Euclides, de resolução geométrica desta proporção é a seguinte: Dado o segmento AB, constroi-se o quadrado ABA'B'; constroi-se M como o ponto médio de AA'. Prolonga-se o segmento AA' e constroi-se a circunferência de centro M e raio MB', acha-se o ponto C de interseção da circunferência com a semi-reta AA'; constrói-se o quadrado de lado A'C. O prolongamento do lado DD' determina o ponto X em AB que seciona o segmento na razão desejada.

Figura 11 - Demonstração segundo Brandão (2014).



Fonte: Chaves & Rodrigues (2014a, p. 145).

Com a finalidade de definirmos a medida do segmento áureo $\overline{AX} = x$, acataremos o segmento $\overline{AB} = a$ e $\overline{MC} = y$. Constatamos que $\overline{MC} = \overline{MB'} = y$, por ser raio do arco de circunferência MCB'. À proporção que *M* é ponto médio do lado do quadrado, dispomos $\overline{A'M} = \frac{a}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\Delta A'MB'$, obtemos:

$$y^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{5}}{2} \tag{6}$$

Não obstante, como $A'CDD'$ é um quadrado, temos que $\overline{AX} = x = y - \frac{a}{2}$. Deste modo, se considerarmos $a = 1$ e de (6):

$$\overline{AX} = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi} = 0,6180339887... \qquad (7)$$

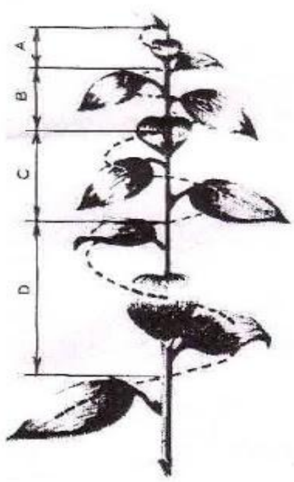
Isso denota que o segmento áureo equipara-se a aproximadamente 61,8% do comprimento total do segmento, contudo,

$$\frac{1}{\phi} = 0,6180339887... \Rightarrow \frac{1}{0,6180339887...} = \phi \Rightarrow \phi = 1,6180339887... \qquad (8)$$

denominado *número de ouro*.

Observamos a Divina Proporção nas folhas de uma planta. Elas são arranjadas de forma espiral ao longo do galho, não impedindo a luz do sol em nenhuma das folhas. A soma dos dois primeiros passos da espiral, começando do topo é igual ao tamanho do próximo passo, por exemplo, A+B=C, B+C=D, (Cf. figura 12).

Figura 12 - Razão áurea na Filotaxia.

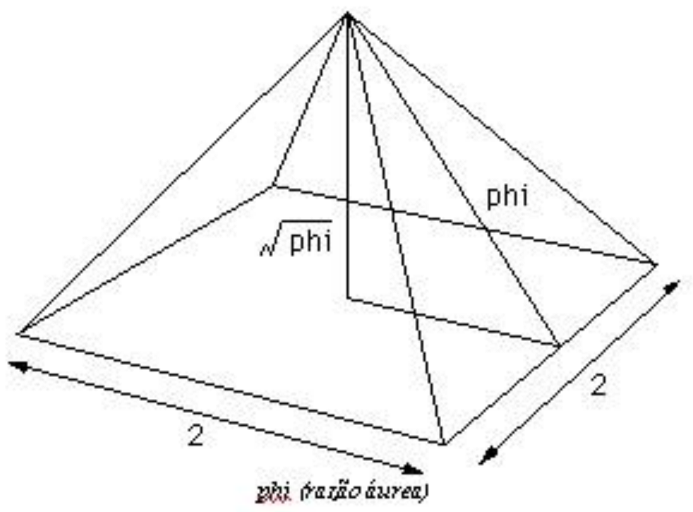


Fonte: L.Latishev e Vl. Latishev.

Consideremos que exista um padrão helicoidal (para a esquerda ou para a direita) para as folhas em torno do caule. Cada conjunto de 3 folhas consecutivas (1,2,3) nascem formando um mesmo ângulo entre 1 e 2 e entre 2 e 3, mantendo uma certa distância ao longo do caule. Na figura 12 , a folha 3 forma um mesmo ângulo com 2 da mesma forma que a folha 2 forma com 1. Admitimos o mesmo padrão para todas as folhas restantes. Podemos identificar o período p como o número de voltas necessárias até nascer uma nova folha se sobrepondo à primeira e m indicará o número de folhas por período, neste caso, p=2 e m=5. Numerosas experiências com plantas mostraram que p e m assumem mais frequentemente valores como 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., que são os números da sequência de Fibonacci.

A figura 13 mostra as proporções que os egípcios usavam nos cálculos da construção das pirâmides.

Figura 13 - Razão áurea na pirâmide.



Fonte: Blog Matemática na Veia, 2008.

No inicio da construção da grande pirâmide, foi fixado sua orientação segundo a constelação da Mão de Touro (hoje Ursa Maior) estabelecendo uma linha em ângulo reto em relação a ela por meio de um retângulo 3:4:5, a partir dele, esboçavam todo o Templo. A Seção áurea ou o número π, foi muito bem utilizada na construção da pirâmide. Ela foi edificada com uma planta baixa quase perfeita de 775 pés e com ângulos de ascensão 51° 52'. Seu volume é de 6,5 milhões de toneladas de calcário. O ângulo de ascensão dá à Grande Pirâmide uma propriedade geométrica única, que representa a quadratura mística do círculo: sua altura está para a mesma razão da sua circunferência, assim como o raio para a circunferência de um círculo. Essa razão é ½ de π. π = 3,1416, cujo número transcendental que está representado, assim está representado com uma margem de erro de apenas 0,1%.

Os egípcios consideravam o número de ouro sagrado, tendo uma importância extrema na sua religião, e chamavam-no não de número de ouro, mas sim de "número sagrado". Utilizavam-no para a construção de templos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que caso isto não acontecesse, o templo poderia não agradar os Deuses ou a alma do falecido não conseguiria chegar ao seu destino. Além disso, os Egípcios consideravam-no muito agradável esteticamente, usando-o também no seu sistema de escrita e na decoração dos seus templos.

Durante a maior parte da história do Egito, as proporções da figura humana foram relacionadas com a largura da palma da mão, e baseavam-se no "número sagrado". Os egípcios usavam medidas estabelecidas pelas proporções do corpo humano devido ao fato de estas serem proporcionais, de acordo com a razão de ouro (0.618...), tornando as suas obras esteticamente mais agradáveis. Estas ideias foram utilizadas pelos construtores e artesãos, para estabelecer as malhas quadrangulares que usavam para as proporcionalidades do seu trabalho. Muitos hieróglifos têm proporções baseadas no número de ouro. Os egípcios utilizavam o número de ouro para que fosse mais fácil que todos conseguissem escrever de acordo com as mesmas proporções.

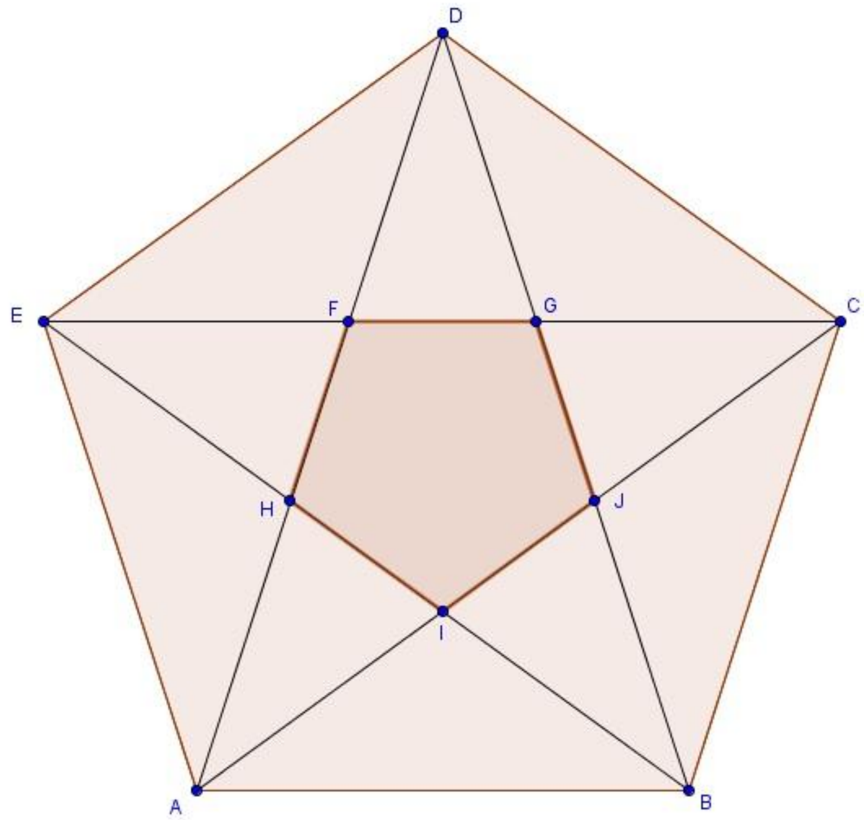
Também é possível observar o uso da razão áurea no pentagrama dos pitagóricos (Cf. Figura 14).

Figura 14 - Pentagrama pitagórico.

Fonte: Pitágoras de Samos, século VI a.C.

O Pentagrama é obtido quando trançamos as diagonais de um pentágono regular (Cf. Figura 15). O pentágono menor, formado pela interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual à ϕ^2. A razão entre a medida das áreas dos dois pentágonos é igual à ϕ^4 (Cf. Figura 15). Chamando os vértices do pentagrama de A, B, C, D e E, o triângulo isósceles formado por A, B e I tem seus lados em relação dourada com sua base (Cf. Figura 15), ou seja $\frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \phi$.

Figura 15 - Pentagrama e suas relações áureas.



Fonte: Elab. Pelo autor, 2015.

Quando os pitagóricos descobriram que as proporções no pentagrama estavam em proporção áurea, tornaram este símbolo estrelado como a representação da Irmandade[24] Pitagórica.

---

[24] Irmandade Pitagórica foi formada por Pitágoras, na qual todas as informações eram transmitidas através da fala, não sendo registrado na forma escrita, este grupo formado por discípulos de Pitágoras se estendeu por séculos após a morte de seu fundador, mantendo uma grande quantidade de conhecimento entre seus membros.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Irmandade_Pitag%C3%B3rica>. Acesso em: 03/Set./2015.

Na Literatura, encontramos a aplicação do número de ouro no poema épico grego Ilíada, de Homero[25], que narra os acontecimentos dos últimos dias da Guerra de Tróia. Ao ler o poema, através de uma análise minuciosa, consegue-se notar que a proporção entre as estrofes maiores e as menores é próxima ao número 1,618..., o número de ouro. E ainda na Literatura conseguimos verificar o uso da proporção divina por Luís de camões ao escrever Os Lusíadas. Camões colocou a chegada à Índia no ponto que divide a obra em extrema e média razão. Na ainda, conseguimos observar que o poeta Virgílio, em sua obra Eneida, construiu a razão áurea com as estrofes maiores e menores, assim como fez Homero.

O número de ouro também está presente nas famosas Sinfonia nº 5 e nº 9 de *Ludwig van Beethoven*[26] e em diversas de outras obras. Ainda na música, outro fato interessante , registrado na revista Batera, em um artigo sobre o baterista de jazz *Max Roach*[27], é que em seus solos curtos aparece tal número, se considerarmos as relações que aparecem entre tempos de bumbo e caixa.

O diretor russo *Serguei Eisenstein*[28] se utilizou do número de ouro em seu filme O Encouraçado Potemkin, com a finalidade de marcar os inícios de cenas importantes da trama, medindo a razão pelo tamanho das fitas de película.

Nos dias contemporâneos, essa maravilhosa proporção ainda é utilizada. Ao padronizar internacionalmente algumas medidas utilizadas em nosso dia-a-dia. Os projetistas procuram respeitar a divina proporção. A razão entre o comprimento e a largura de um cartão de

---

[25] Homero foi um poeta épico da Grécia Antiga, ao qual tradicionalmente se atribui a autoria dos poemas épicos *Ilíada* e *Odisseia*.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Homero>. Acesso em: 03/Set./2015.

[26] Ludwig van Beethoven (Bonn, batizado em 17 de dezembro de 1770 — Viena, 26 de março de 1827) foi um compositor alemão, do período de transição entre o Classicismo (século XVIII) e o Romantismo (século XIX). É considerado um dos pilares da música ocidental, pelo incontestável desenvolvimento, tanto da linguagem como do conteúdo musical demonstrado nas suas obras, permanecendo como um dos compositores mais respeitados e mais influentes de todos os tempos.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ludwig_van_Beethoven>, acesso: 03 de Setembro de 2015.

[27] Maxwell Lemuel Roach (New Land, Carolina do Norte, em 10 de Janeiro de 1924 - Nova York, 16 de agosto de 2007) foi um percussionista, baterista e compositor de jazz estado-unidense.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Max_Roach>. Acesso em: 03/Set./2015.

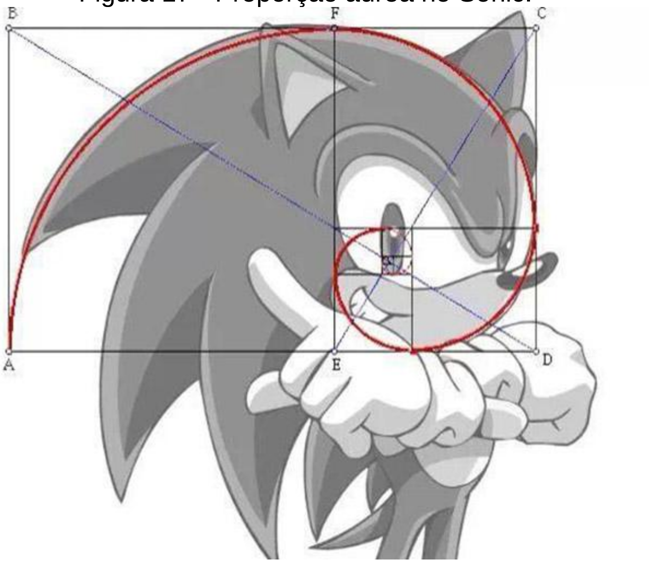
[28] *Serguei Mihailovitch Eizenshtein*, (Riga, 23 de janeiro de 1898 — Moscou, 11 de fevereiro de 1948) foi um dos mais importantes cineastas soviéticos. Foi também um filmólogo.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Serguei_Eisenstein>. Acesso em: 03/Set./2015.

crédito (Cf. Figura 16) - quando efetuamos a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ obtemos um resultado muito próximo de ϕ -, alguns livros, jornal, fotos reveladas, cartas de baralho, na área de multimídia de jogos digitais (Cf. Figura 16), em símbolos, como o símbolo da Apple (Cf. Figura 17), e na estética facial, como na ortodontia (Cf. Figura 19).

Figura 16 - O Número de ouro no cartão de crédito.

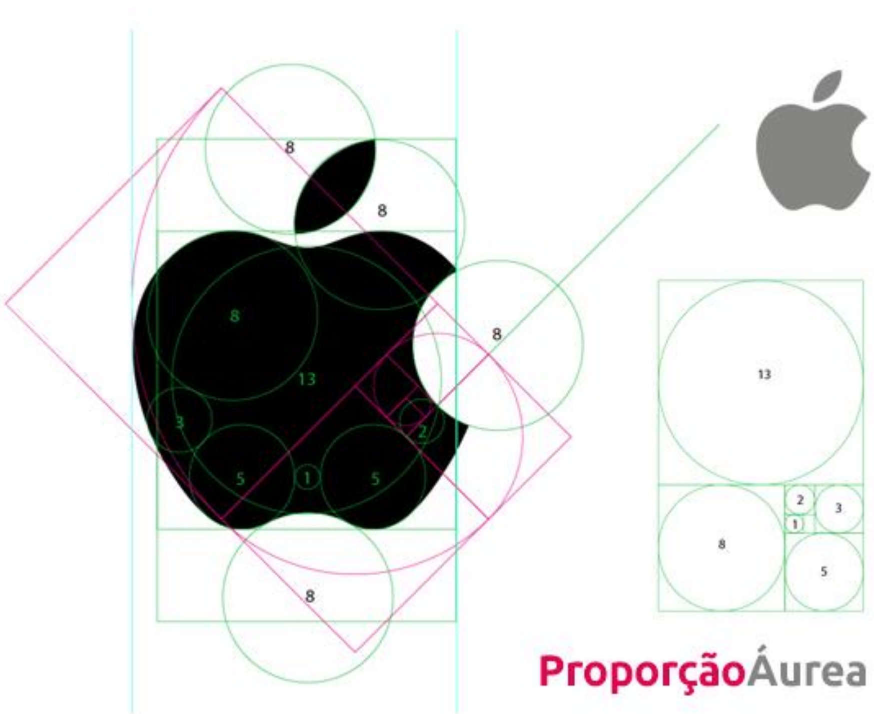
Fonte: Elab. Pelo autor, 2015.

Figura 17 - Proporção áurea no Sonic.



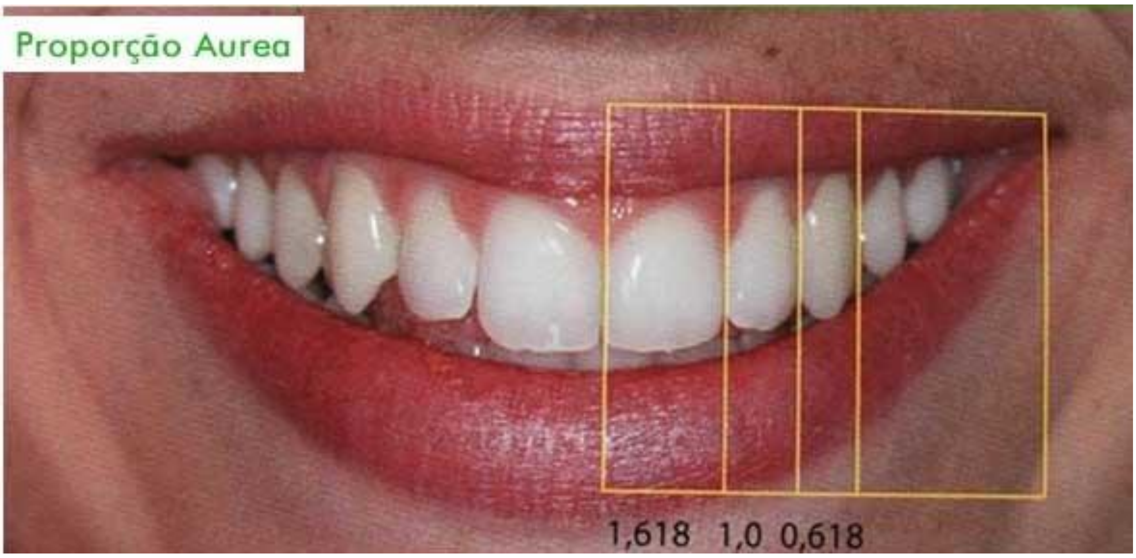
Fonte: Vicente Carvalho, 2014.

Figura 18 - Símbolo da Apple e a razão áurea.



Fonte: Daniel Fabricio, 2015.

Figura 19 - Proporção áurea na Ortodontia.

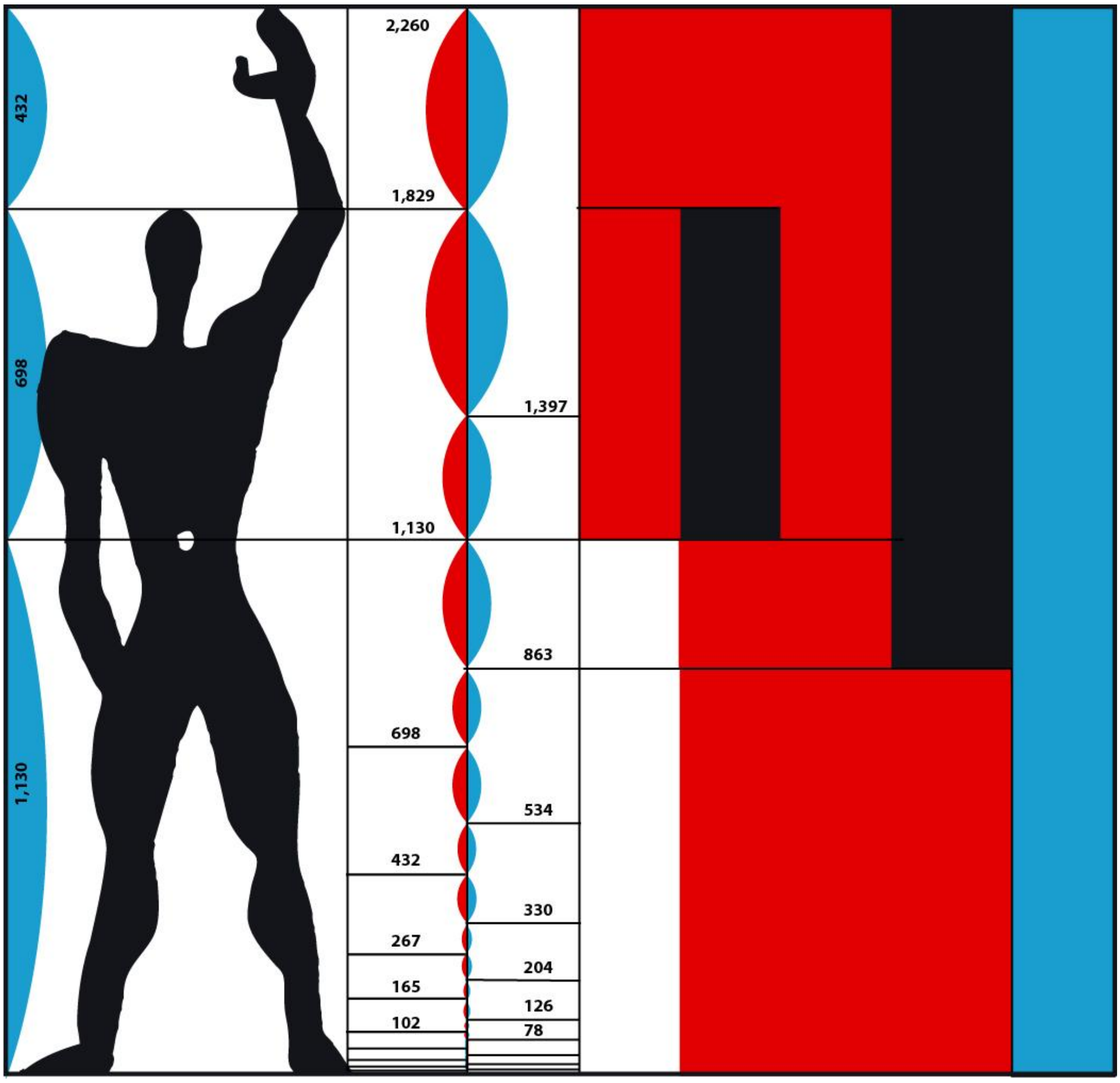


Fonte: Vicente Carvalho, 2014.

A primeira abordagem arquitetônica mais independente da tradição formal da antiguidade foi chamada de *Art Noveau* que começou a fazer uso de formas puras da geometria. A partir deste movimento alguns dos arquitetos mas hábeis do nosso século passaram a propor formas particulares de interpretar a questão da proporção. Um dos primeiros foi *LeCorbusier* que propôs um sistema de medição proporcionada denominado *Modulor* (Cf. Figura 20).

LeCorbusier acreditava que o seu sistema de medidas satisfaria tanto às exigências de beleza – porque ser derivado da seção áurea – quanto às funcionais – porque adequado às dimensões humanas. Para ele, este era um instrumento universal, fácil de empregar, e que podia ser usado no mundo inteiro para obter beleza e racionalidade nas proporções de tudo o que é produzido pelo homem”. *LeCorbusier*, inicialmente, estabeleceu como estatura média do ser humano a medida de 1,75 m. No entanto, sob pretexto de considerar a média de altura dos policiais ingleses e ciente da progressiva evolução da estatura do ser humano, ao menos na Europa, resolveu adotar 1,83 m, como ponto de partida para o *Modulor*. Embora sob o prisma científico, as conclusões possam ser consideradas questionáveis: pela inadequação na aplicação antropométrica geral; por desconsiderar variações anatômicas individuais e por idealizar situações.

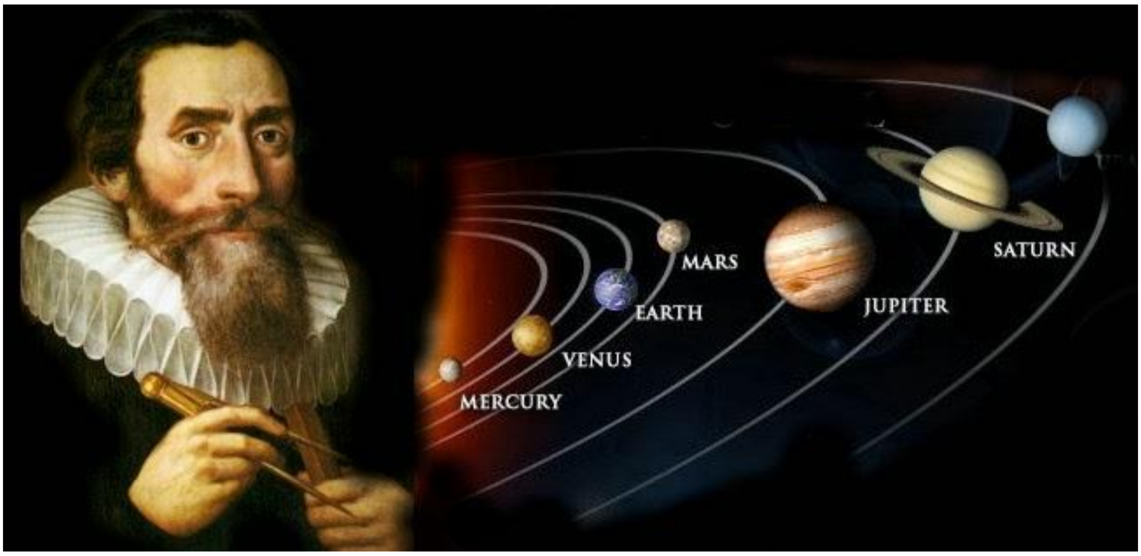
Figura 20 - *Modulor* de *LeCorbusier*.



Fonte: Neerman Fernand, 10/Set./2015

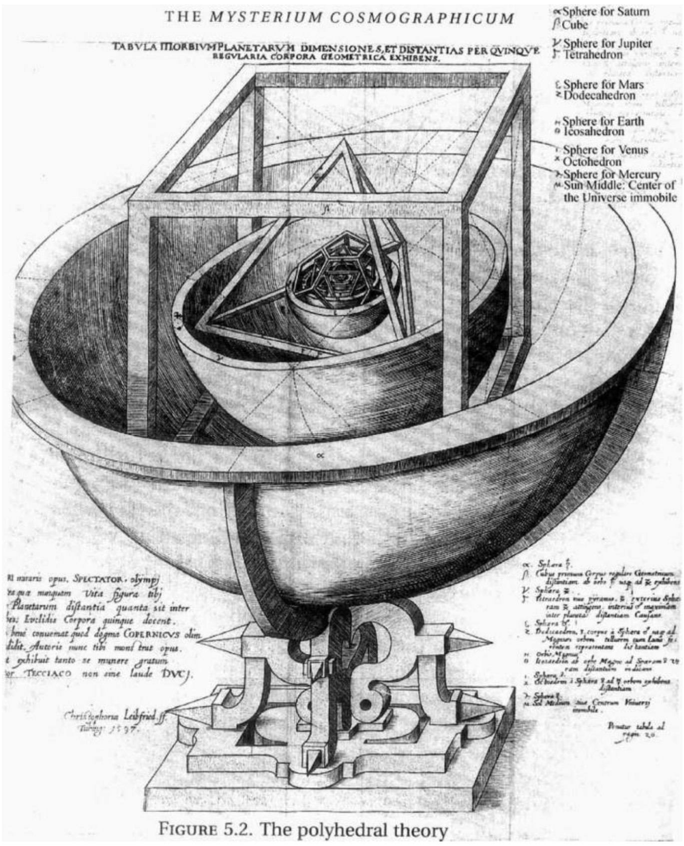
Johannes Kepler baseou a sua teoria cósmica (Cf. Figura 21) nos cinco sólidos platônicos (Cf. Figura 22) e na sua relação com a razão áurea.

Figura 21 - Teoria cósmica de Kepler e a razão áurea.



Fonte: Angelina Wittmann, 2013.

Figura 22 - Poliedros Platônicos utilizados por Kepler.

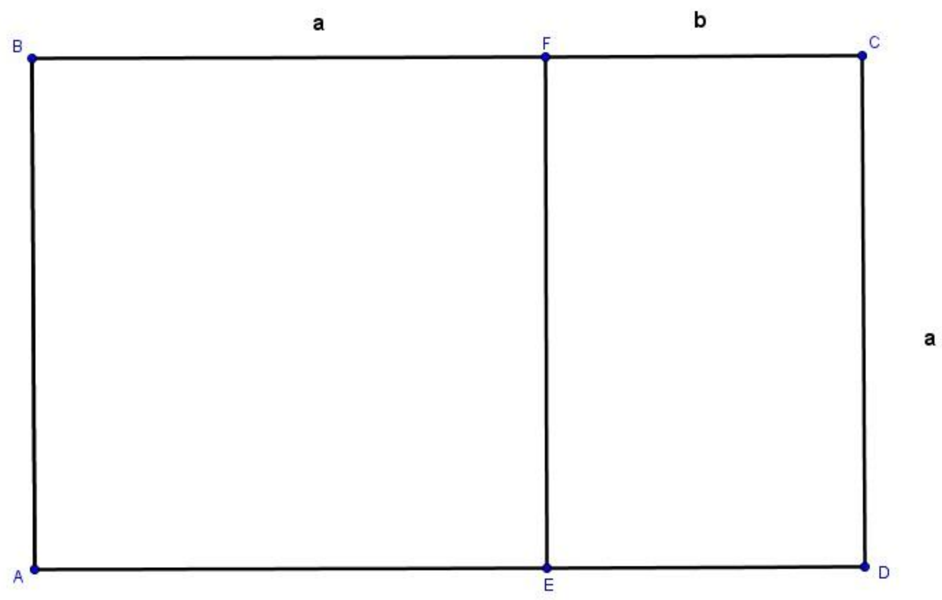


Fonte: Rita Folker, 2015.

5.2 O RETÂNGULO ÁUREO E O TRIÂNGULO ÁUREO

Um ente geométrico que é recorrência da *Razão Áurea* é o *Retângulo Áureo.* Definiremos de retângulo áureo qualquer retângulo ABCD (Cf. figura 23) que detêm as seguintes particularidades: se de tal criarmos um quadrado de lado $\overline{AB}$, originando o quadrado ABEF, o retângulo CDEF será semelhante ao retângulo original.

Figura 23 - Retângulo ABCD.



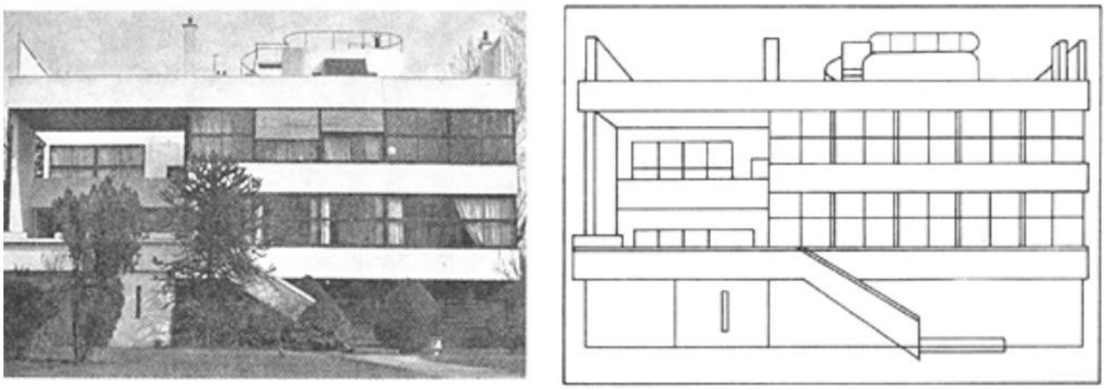
Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

Se $a+b$ e a são as medidas dos lados do retângulo ABCD a definição dada acima será reduzida à seguinte relação:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \tag{25}$$

Tal retângulo tem diversas propriedades intrigantes que comprovam a nobreza do termo *áureo*. Ele vem sendo reputado por arquitetos e artistas sendo o retângulo com mais apreço e de grandioso valor estético devido as suas qualidades recorrentes dá *razão áurea*. Um exemplo de seu uso na arquitetura nos é mostrado (Cf. figura 24) em uma foto de uma residência suburbana de Paris, esboçada pelo renomado arquiteto *Le Corbusier*, em que ele desfruta do uso do retângulo áureo. Conseguimos observar dois retângulos áureos na planta da casa (Cf. Figura 24), o primeiro exposto como o corpo inteiro da casa e o segundo, arranjado verticalmente, evidenciado pela parte da casa à esquerda da escada.

Figura 24 - Representação da planta da casa, de Le Corbusier, disposta em um retângulo áureo.



Fonte: Le Corbusier, 1923.

O Partenon[29](Cf. figura 25), ou templo da deusa Atena, uma das mais apreciadas obras da arquitetura universal, nos mostra, em seu frontispício (Cf. figura 26) aproxima-se de um retângulo áureo. No entanto não existe evidência histórica de que, ao edificar o templo no quinto século a.C., os arquitetos de Péricles tenham conscientemente utilizado o retângulo áureo.

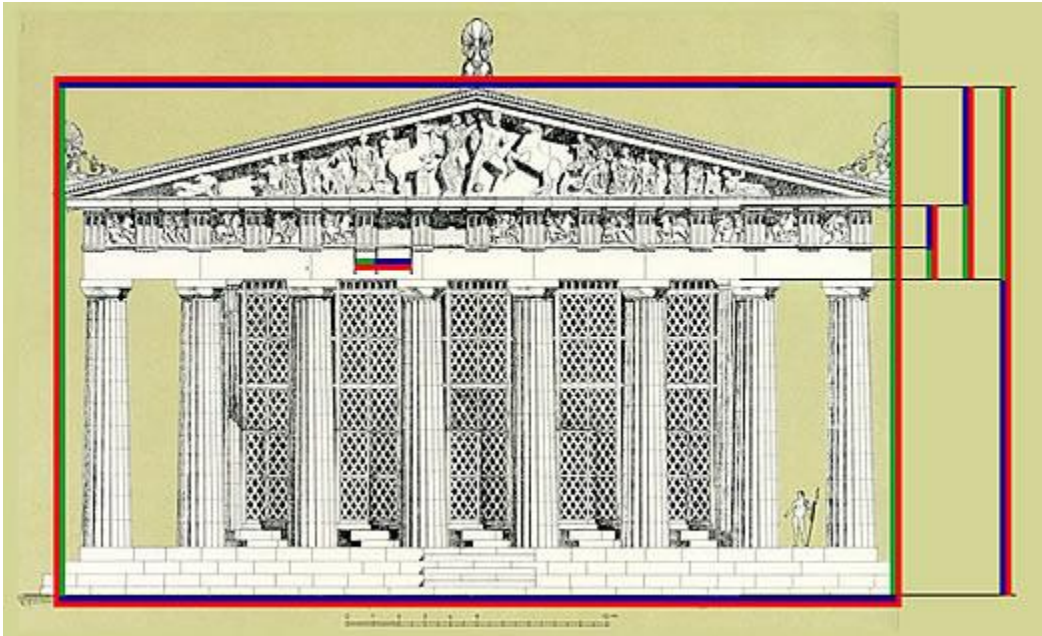
---

[29]Harmonia, simplicidade e beleza, isso define o Pártenon. Péricles indicou como supervisor das obras a serem iniciadas na acrópole em 447 a.C. o grande escultor Fídias, que também era seu amigo. Além dele, um como arquiteto e o outro construtor, atuaram Ictinus e Calicrates. O projeto do templo, concluído em 438 a.C., concretizou os ideais do iluminismo jônico: um prédio onde as formas geométricas (o retângulo, sustentado por colunas verticais, encimado pelo triângulo), excluíam qualquer artifício ornamental. O templo, que media 31,39 metros de altura por 76,82 metros de largura.
Fonte: <http://educaterra.terra.com.br/voltaire/artigos/pArtenon8.htm>. Acesso em: 14/Jul./2015.

Figura 25 - Partenon.

Fonte: Péricles, século V a.C.

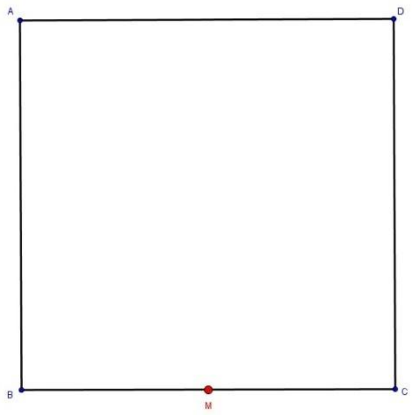
Figura 26 - Frontispício do Partenon.



Fonte: Péricles, século V a.C.

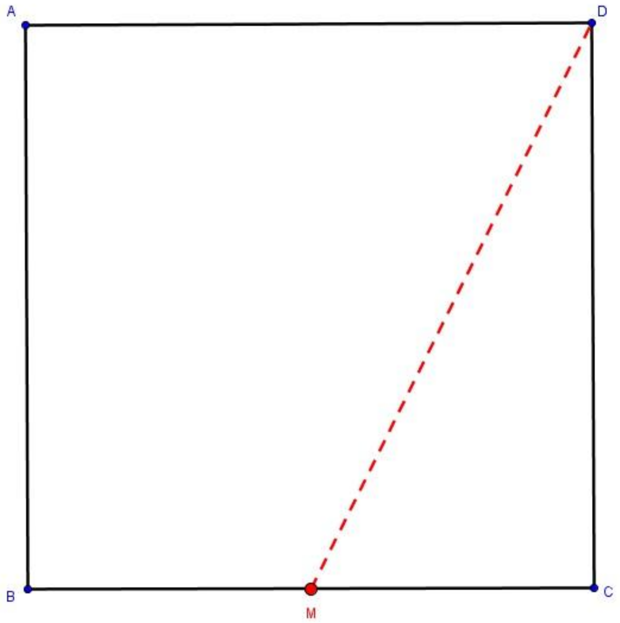
Uma maneira didática para a construção do retângulo áureo consiste nos seguintes passos: (i) Construa um quadrado ABCD qualquer e marque o ponto médio M lado BC (Cf. Figura 27); (ii) trace o segmento de reta $\overline{MD}$ (Cf. Figura 28); (iii) trace uma reta suporte *r* e depois a circunferência de raio $\overline{MD}$, marcando assim o ponto E de encontro com a reta *r* (Cf. Figura 29); (iv) construa adjacente ao quadrado ABCD o retângulo de lados CD e CE (Cf. Figura 30). O Retângulo ABEF será um retângulo áureo.

Figura 27 - Quadrado ABCD com o ponto médio M sobre o lado BC.



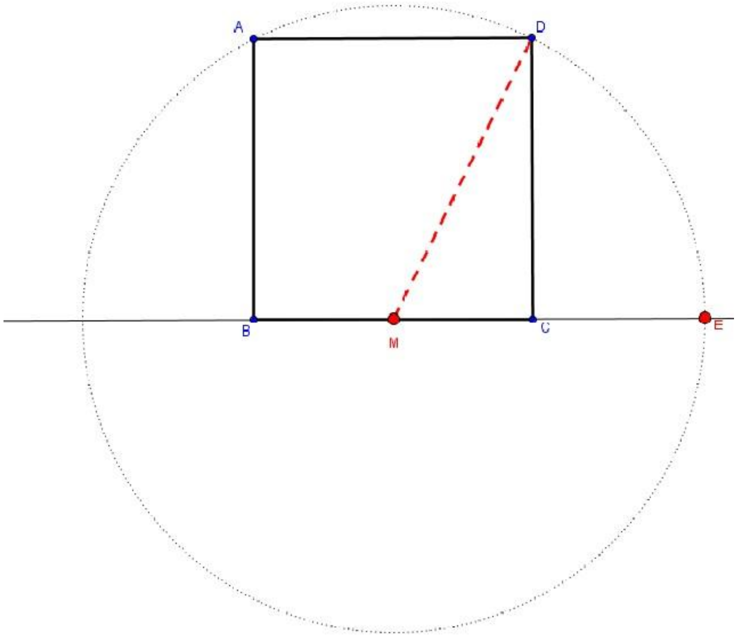
Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

Figura 28 - Quadrado ABCD com o segmento.



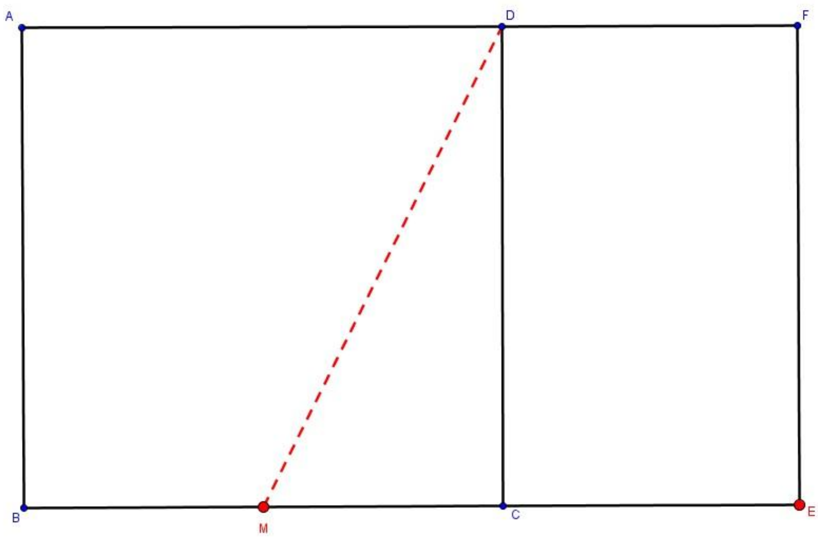
Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

Figura 29 - Construção do ponto E.



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

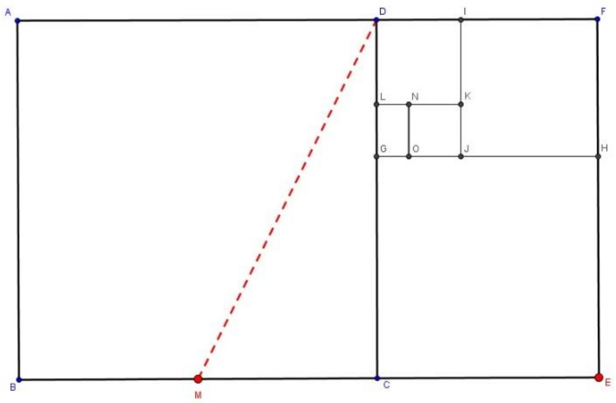
Figura 30 - Retângulo áureo ABEF.



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

É importante observarmos que temos dois retângulos áureos, o ABEF e o CEFD, contudo, se traçarmos um quadrado de lado CE na figura 30 teremos um novo retângulo áureo, e se do outro retângulo áureo retirarmos outro quadrado com o menor lado do retângulo teremos outro retângulo áureo, podendo, assim, repetirmos indefinidamente este processo, sendo retângulos áureos os retângulos ABEF, CDFE, FDGH, DIJG, GLKJ e GLNO (Cf. Figura 31). Esta é uma propriedade muito peculiar que podemos observar no retângulo áureo.

Figura 31 - Propriedade do retângulo áureo.

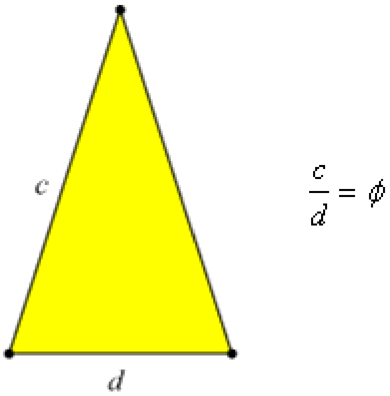


Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

Agora nos voltaremos um pouco a falar sobre o triângulo áureo, um ente geométrica com características peculiares e interessantes.

Definiremos como triângulo áureo todo triângulo isósceles cuja a razão entre um de seus lados pela base (no caso do triângulo áureo acutângulo) resulta no número de ouro (ϕ) - Cf. Figura 32.

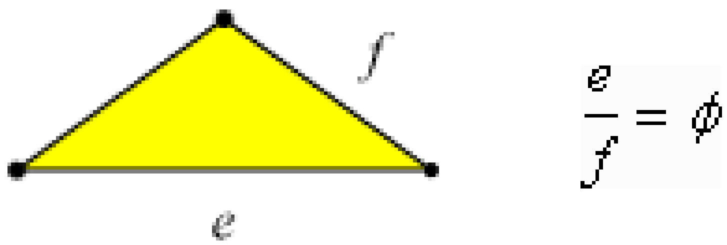
Figura 32 - Triângulo áureo acutângulo.



Fonte: Humberto José Bortolossi, 2015.

No caso do triângulo obtusângulo a razão deve ser da medida da base para a medida de um de seus lados, e, assim, resultará novamente no número de ouro (Cf. Figura 33).

Figura 33 - Triângulo áureo obtusângulo.

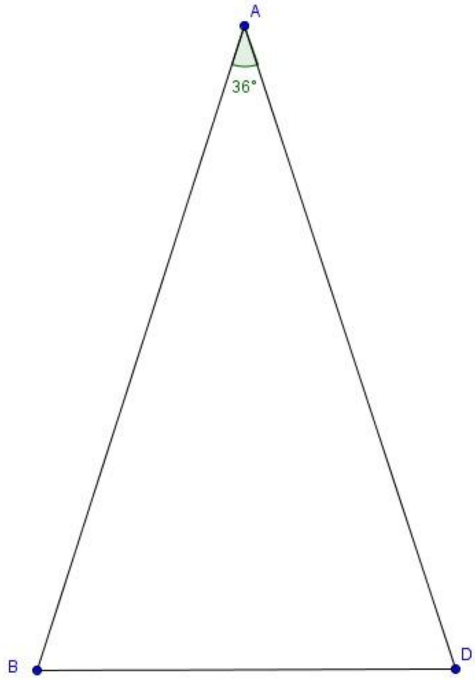


Fonte: Humberto José Bortolossi, 2015.

Uma propriedade interessante do triângulo áureo é que, semelhantemente ao retângulo áureo, conseguimos construir dentro dele outros triângulos áureos semelhantes ao primeiro, com uma proporção de $\frac{1}{\phi}$ do maior para o menor. Para maior compreensão construiremos tais triângulos, mostrando essa interessante propriedade para melhor visualizarmos.

I. Construir um triângulo isósceles ΔABD, com base BD e $med(\angle DAB) = 36°$ (Cf. Figura 34).

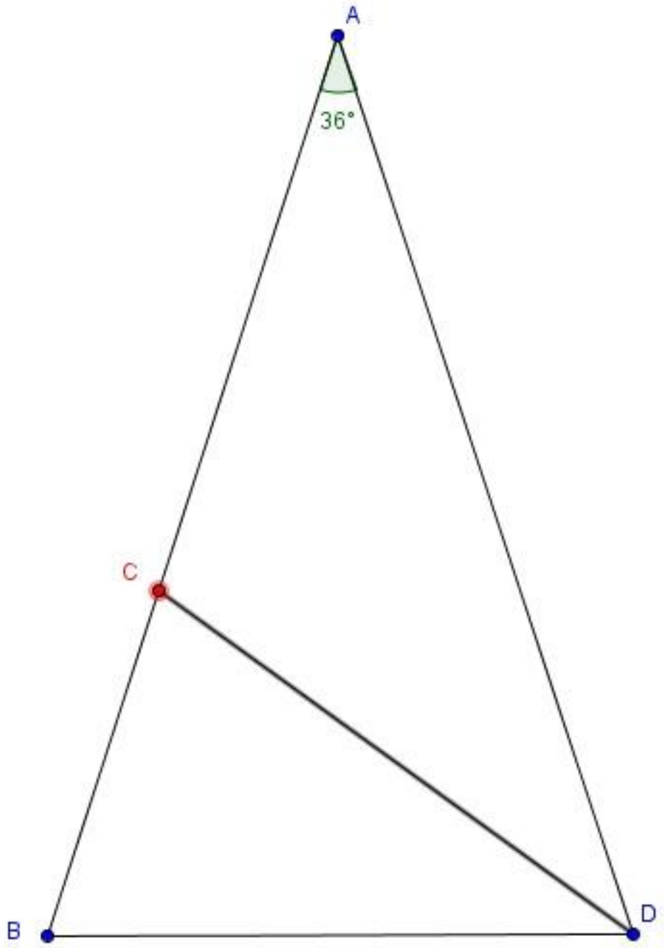
Figura 34 - Construção dos triângulos áureos semelhantes parte I.



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

II. Marcar o ponto C no segmento AB, tal que C seja interseção do segmento AB com a bissetriz de $\angle BDA$ (Cf. Figura 35).

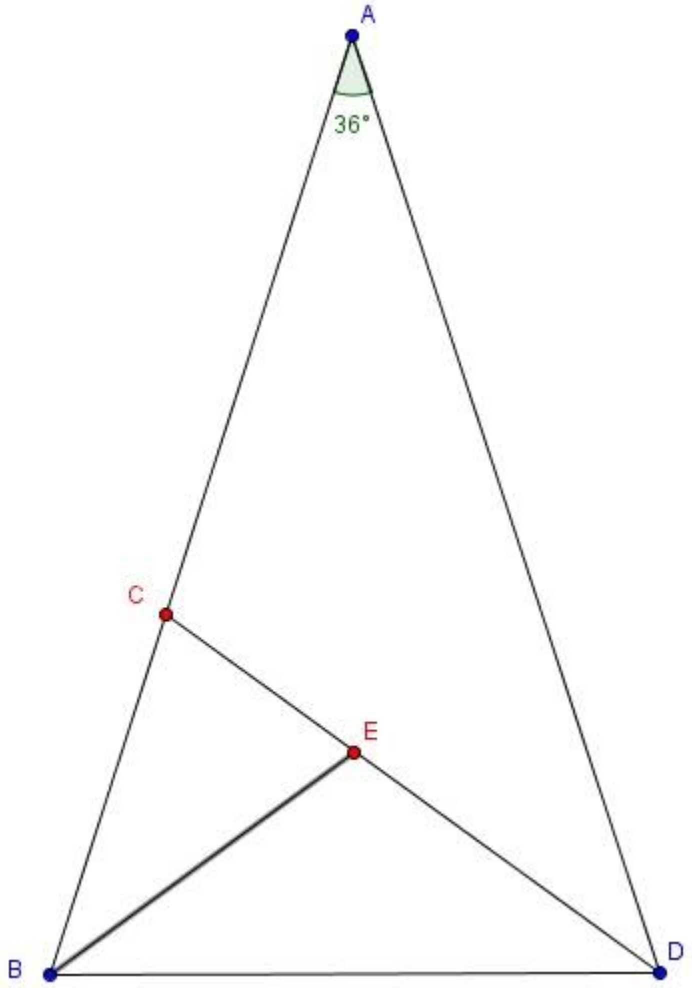
Figura 35 - Construção dos triângulos áureos semelhantes parte II.



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

III. Marcar o ponto E no segmento CD, tal que E seja a interseção do segmento CD com a bissetriz de $\angle CBD$ (Cf. Figura 36).

Figura 36 - Construção dos triângulos áureos semelhantes parte III.

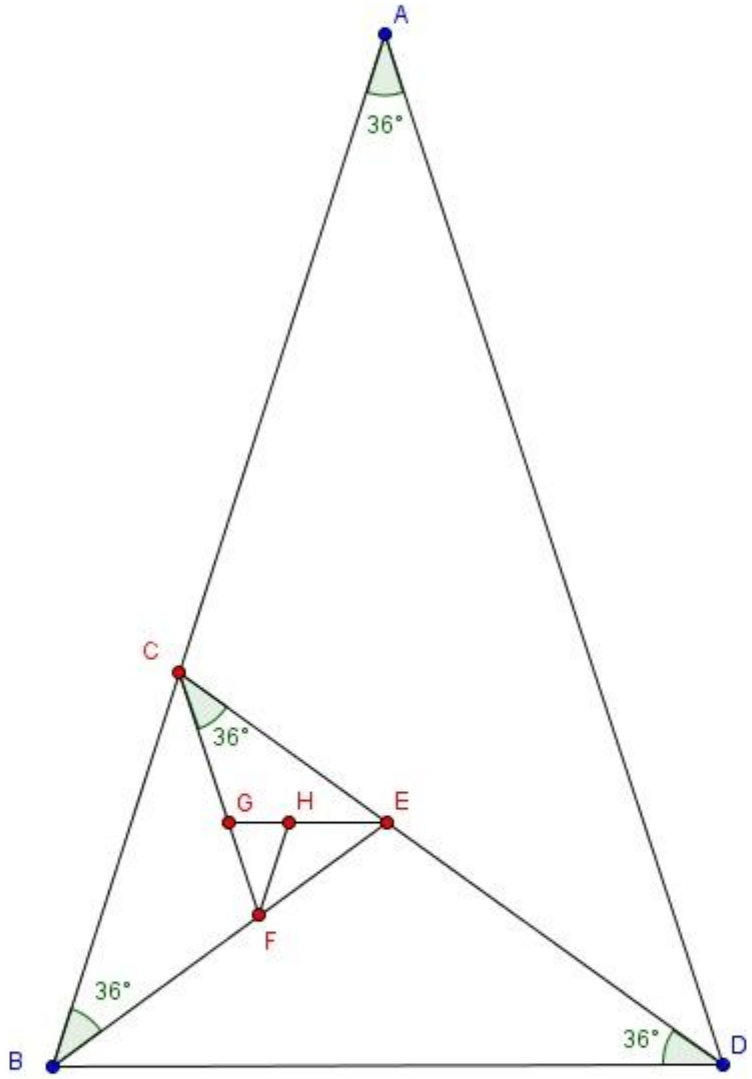


Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

IV. Repetir o processo anterior para marcar os pontos F, G e H (Cf. Figura 37).

Observação: $\Delta ABD \approx \Delta BDC \approx \Delta EBC \approx \Delta ECF \approx \Delta FEG \approx \Delta GFH$.

Figura 37 - Construção dos triângulos áureos semelhantes parte IV.



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

Outro fato importante é que os pontos C, E, F, G e H dividem os segmentos, ao qual estão inseridos, em extrema e média razão, ou seja são os pontos de outro de seus segmentos. Para demonstrarmos esta importante propriedade tomaremos como base o que Lívio (2009, APÊNDICE 4) nos fala a respeito:

> Um dos teoremas de *Os Elementos* demonstra que quando dois triângulos têm os mesmos ângulos, eles são similares. Isto é, os dois triângulos têm exatamente a mesma forma, sendo todos os seus lados proporcionais entre si. Se um lado de um triângulo é duas vezes maior que o respectivo lado do outro triângulo, então os outros dois lados também o são.

Os dois triângulos ΔADB e ΔDBC são semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos. Portanto, a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}$. Contudo os dois triângulos também são isósceles, de modo que $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{AC}$. Se chamarmos $\overline{DB} = x$ e $\overline{DC} = a$, teremos que $\overline{AB} = x + a$. Assim, substituindo na razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}$ ficaremos com o seguinte:

(26) $$\frac{x+a}{x} = \frac{x}{a}.$$

Resolvendo a proporção (26) chegaremos na seguinte equação:

(27) $$x^2 - ax - a^2 = 0.$$

Ao resolvermos a equação (27) chegaremos nas seguintes raízes:

(28) $$x^I = \frac{a(1-\sqrt{5})}{2} \text{ e } x^{II} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}.$$

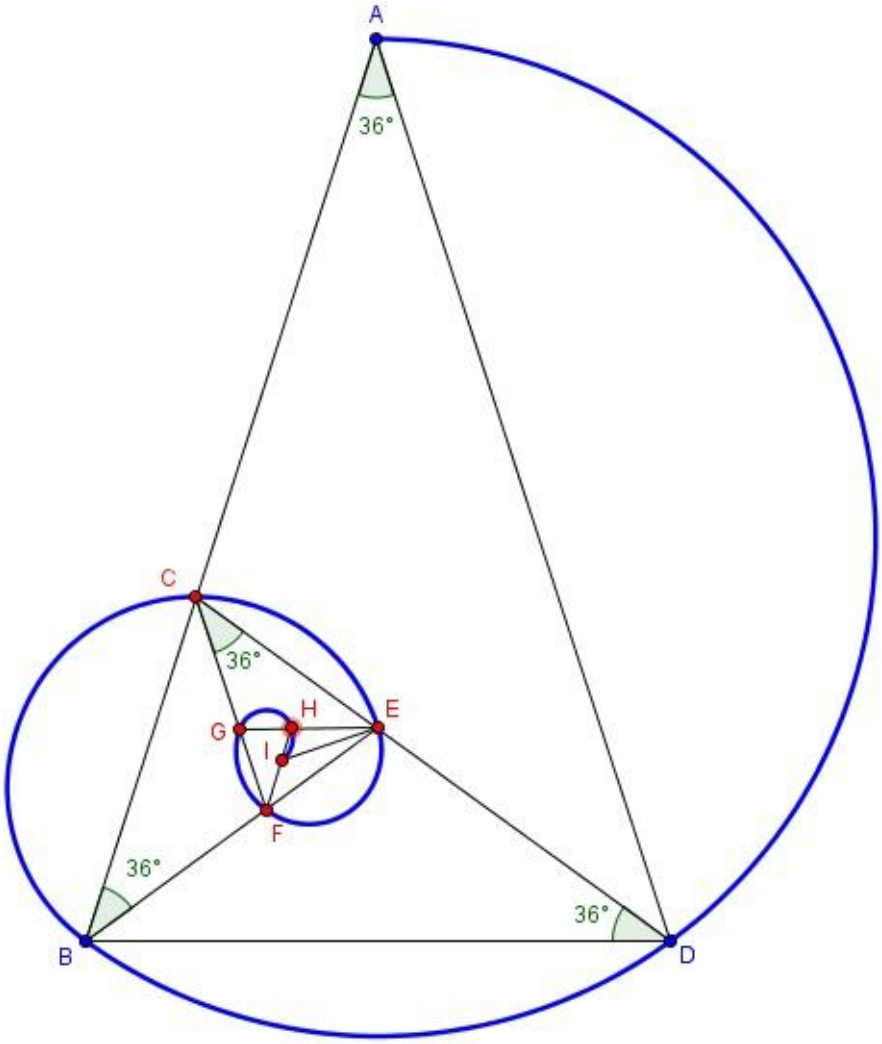
Consideremos $a = 1$, então as raízes da equação serão:

(29) $$x^I = \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \text{ e } x^{II} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Logo $x^I = \frac{(1-\sqrt{5})}{2} = -\frac{1}{\phi}$ e $x^{II} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = \phi$. Tomando a segunda raiz (x^{II}), podemos concluir que a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \phi$. Assim os ponto C divide o lado $\overline{AB}$ do triângulo áureo em extrema e média razão. Fazendo, analogamente, o mesmo processo para os triângulos menores, e semelhantes à ΔABD, chegaremos à conclusão que os pontos $E,\ F, G$ e H dividem os lados ao qual estão inseridos em extrema e média razão.

E de forma semelhante ao retângulo áureo, conseguimos desenhar a espiral logarítmica no triângulo áureo (Cf. Figura 38).

Figura 38 - Espiral Logarítmica nos triângulos áureos.



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

6 PADRÕES MATEMÁTICOS NAS OBRAS EM ANÁLISE[30]

Os escritos mais importantes de Leonardo indicam seu vínculo com a Matemática. Suas coleções mais importantes são 10 *códigos*[31], dos quais envolvendo Matemática são: *Código Atlântico*; *Código Arundel*; *Códigos de Madri*; *Códigos do Instituto de França*; *Códigos Foster*.

> As considerações geométricas e as construções geométricas exatas que foram encontradas até agora no famoso *Código Atlântico* e nos outros manuscritos impressos não são suficientes, embora tudo que neles se leia seja original, para considerar Leonardo entre aqueles que souberam acrescentar alguma página à geometria herdada dos gregos (a única conhecida em seu tempo). Além disso, a ideia, manifestada por ele, de obter a retificação da circunferência fazendo escorregar uma roda sobre uma haste reta, confirma a opinião de que ele se interessava por geometria apenas na medida em que essa ciência resultava ser útil aos pintores e aos arquitetos. É uma conclusão que se confirma nas aplicações por ele realizadas de algumas lúnudas de Hipócrates (...) à quadratura de figuras complicadas, esteticamente admiráveis, mas carentes de valor científico. (LORIA, 1929-1933, p.263 apud. BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 62).

Pelo que expusemos até então é plausível verificar se há (ou não) padrões matemáticos nas obras de Da Vinci. É indubitável o quanto Leonardo concebe Matemática e mesmo que sépticos aleguem ser aquém da Matemática que hoje se conhece, lembramos ser muito além da Matemática produzida na sua época.

Sua admiração pela razão áurea é apresentada por Bagni; D'Amore (2011):

> A geometria do nosso protagonista torna-se mais culta, os problemas propostos são quase sempre extraídos da obra de Pacioli, com frequência, por sua vez, extraídos de Euclides. Leonardo apaixona-se pela razão áurea que lhe é apresentada por Pacioli, à qual dá o nome de 'divina proporção'. (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 72).

Contudo, o próprio Leonardo proclama essa admiração pela teoria das proporções (incluindo a divina proporção) ao dissertar sobre a anatomia humana com o

---

[30]Parte desta unidade encontra-se originalmente em Chaves & Rodrigues (2014a).

[31]*Código Atlântico* (1478-1518),*Código Arundel* (1478-1518), *Código Windsor* (1478-1518), *Código Trivulziano* (1487-1490), *Código Ashburnam*.*Códigos de Madri* (1490-1505), *Códigos do Instituto de França*,*Códigos Foster* (1493-1505),*Código Leicester* (1504-1506) e *Código sobre o voo dos pássaros* (1505).

propósito de tratar suas obras. Mesmo que não tenha sido o primeiro a descrever as proporções ideais do rosto com obsessiva exatidão, escreveu mais de 800 páginas a respeito da proporcionalidade do rosto e depois passado ao resto do corpo, como pode ser observado no *Código Atlântico* e no *Código Windsor*.

> A DIVINA PROPORÇÃO E A ANATOMIA HUMANA − A distância entre a fenda da boca e base do nariz é um sétimo do rosto [...]. A distância entre a boca e abaixo do queixo será um quarto do rosto, assemelhando-se à largura da boca [...]. A distância entre o queixo e a base do nariz será metade do rosto. Se dividirmos em quatro partes iguais o comprimento total do nariz (ou seja, desde a ponta até a junção com as sobrancelhas), veremos que a parte inferior corresponde à distância entre acima das narinas e abaixo da ponta do nariz; a parte superior, à distância entre o duto lacrimal e o início das sobrancelhas; e as duas partes intermediárias, à distância entre os dois cantos de cada olho. Leonardo da Vinci (ATALAY, 2008, p. 131).

Veremos em figuras adiante que Da Vinci lançou mão de recursos que envolvem retângulos áureos. Já pudemos notar a relação entre retângulos áureos e a sequência de Fibonacci, mas é Atalay (2008) que relaciona Fibonacci a Da Vinci:

> [...] há entre a matemática, a estética e a ciência uma ligação mais ampla que nos leva a pôr os dois Leonardos (o Da Vinci e o Fibonacci) sob a mesma égide intelectual. Mas, no fim das contas, temos também a poderosa imagem de afluentes intelectuais cujas nascentes eram muito anteriores (no antigo Egito, na Índia, na Babilônia e na Grécia clássica), mas cuja confluência só se daria muito depois. (ATALAY, 2008, p. 116).

Vitrúvio[32] formulou uma teoria arquitetônica inspirada nas proporções do corpo humano.

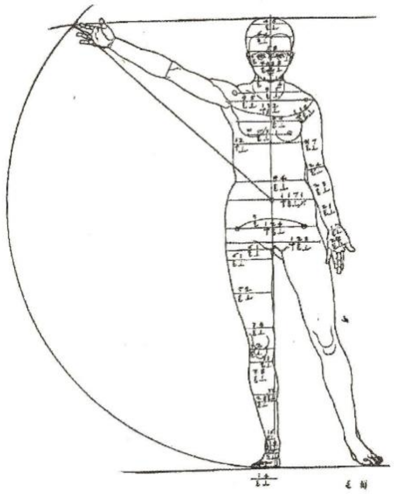
> Lembremos que Leonardo da Vinci estuda as proporções da figura humana segundo os ditames de *De architectura*, de Vitrúvio, que se baseia justamente nas relações do número áureo. **Segundo Leonardo, as proporções humanas são perfeitas quando o umbigo divide o homem**

---

[32] Marcos Vitrúvio Polião, arquiteto e engenheiro romano que viveu no século I a.C. deixou como legado a sua obra em 10 volumes, aos quais deu o nome de *De Architectura* (± 40 a.C.) que constitui o único tratado europeu do período greco-romano que chegou aos nossos dias e serviu de fonte de inspiração a diversos textos sobre construções, hidráulicas, hidrológicas e arquitetônicas desde a época do Renascimento. Os seus padrões de proporções e os seus princípios arquiteturais: *utilitas*, *venustas* e *firmitas* (utilidade, beleza e solidez), inauguraram a base da Arquitetura clássica.
Fonte: <http://www.unifra.br/professores/13970/aula/Aula%201%20RESUMO.pdf>. Acesso: 19/Jul./15.

> **de maneira áurea**. (BUSSAGLI, 1999). É necessário lembrar que Dürer realizou estudos análogos como prova a imagem ... e que é espontâneo compará-la com a do *homem Vitruviano* de Leonardo. (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 80)

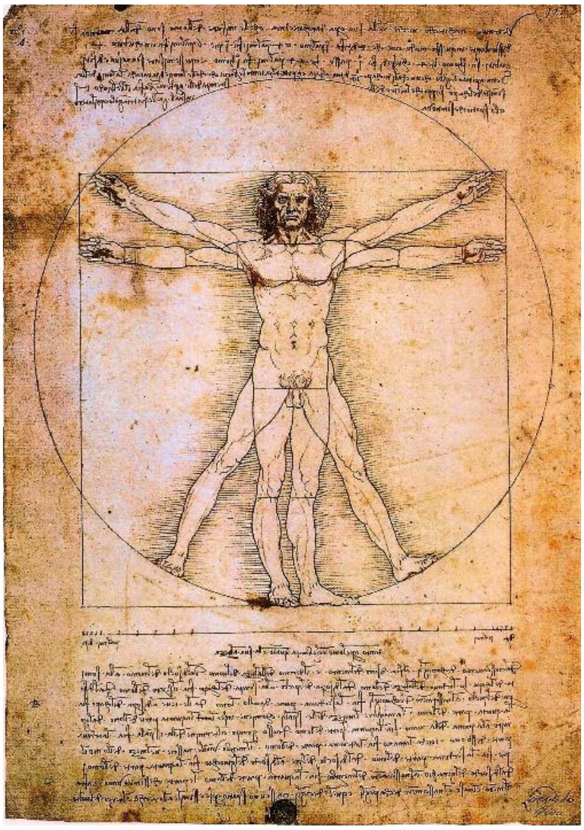
Figura 39 – As proporções do corpo humano, segundo Albrecht Dürer.



Fonte: (BAGNI; D'AMORE, 2011, p.80).

Da Vinci, não apenas sorvera tal teoria, mas reverenciou o criador desta nos brindando com o *Homem Vitruviano* (Cf. figura 40).

Figura 40 - O Homem Vitruviano de Leonardo Da Vinci



Fonte: (ANTOCCIA et al., 2004, p. 81).

No *Homem Vitruviano* a distância entre as extremidades das mãos (com os braços na perpendicular) é igual à altura do indivíduo. Quando este eleva os braços e abre as pernas, inscreve-se num círculo, cujo centro se localiza no umbigo. Aqui, mais uma vez, a razão entre a altura do indivíduo e a do umbigo é a áurea: $\phi = 1{,}618...$

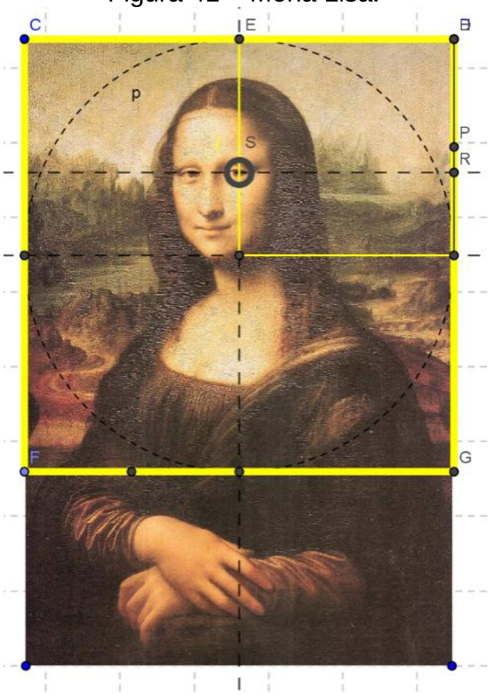
Em uma análise mais profunda podemos observar o que Atalay (2008) nos fala que os 4 dedos fazem uma palma e 4 palmas fazem 1 pé, 6 palmas fazem um cúbito; 4 cúbitos fazem a altura de um homem. 4 cúbitos fazem um passo e 24 palmas fazem um homem. Se abrir as pernas até termos descido 1/14 de altura e abrirmos os braços até os dedos estarem ao nível do topo da cabeça então o centro dos membros abertos será no umbigo. O espaço entre as pernas abertas será um triângulo eqüilátero. O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura. Desde as raízes dos cabelos até ao fundo do queixo é um décimo da altura do homem; desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é um oitavo da altura do homem; desde o topo do peito até ao topo da cabeça é um sexto da altura do homem; desde o topo do peito até às raízes do cabelo é um sétimo da altura do homem; desde os mamilos até ao topo da cabeça é um quarto da altura do homem. A maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem. Desde o cotovelo até à ponta dos dedos é um quinto da altura do homem e desde o cotovelo até ao ângulo da axila é um oitavo da altura do homem. A mão inteira será um décimo da altura do homem. O início dos órgãos genitais marca o centro do homem. O pé é um sétimo do homem. Da sola do pé até debaixo do joelho é um quarto da altura do homem. Desde debaixo do joelho até o início dos órgãos genitais é um quarto do homem. A distância entre o fundo do queixo e o nariz e entre as raízes dos cabelos e as sobrancelhas é a mesma e é, como a orelha, um terço da cara.

Tomando figuras sentadas ou eretas, com o propósito de estudar as funções assimétricas dos hemisférios cerebrais se manifestassem diferentemente em obras de artistas renomados *Christopher Tyler*, neurocientista em San Francisco, propôs uma análise estatística levando em conta 4 hipóteses: (i) a do eixo principal; (ii) a da razão áurea; (iii) a do centro na cabeça; (iv) a do centro em um dos olhos. Atalay (2008) destaca que à primeira vista, “a maioria dos observadores concordaria que, nos retratos, os olhos em geral se localizam perto do centro da tela.”. Contudo, as análises de Tyler revelaram algo mais preciso:

> “[...] um dos olhos, quer o composicionalmente denominante quer o outro, alinhava-se numa distribuição gaussiana (curva normal) com a reta central ou nas proximidades dela, havendo um estreito desvio-padrão de ± 5% da largura do quadro.” (ATALAY, 2008, p. 190).

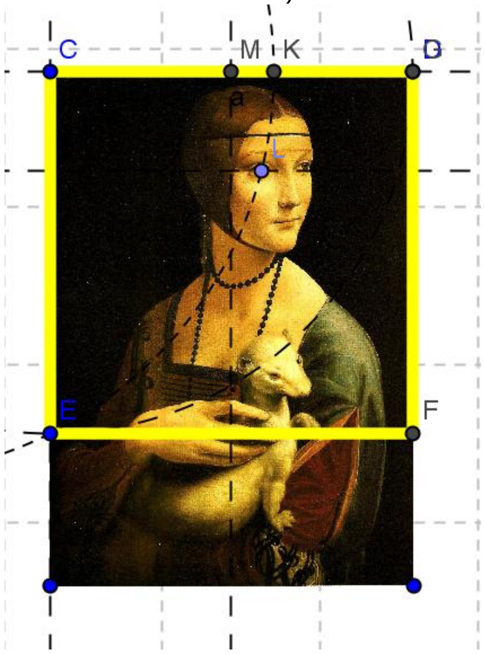
Tomando os quadros verticalmente, *Tyler* constatou que a altura dos olhos se achava no maior número de vezes não nas proximidades da reta horizontal central, mas nas proximidades do número de ouro depositado sobre a reta central vertical; isto é, a ± 61,8% da altura do quadro, como podemos constatar nas figuras 41, 42 e 43 a seguir.

Figura 41 – Mona Lisa.



Fonte: CHAVES & RODRIGUES (2014a, p.156).

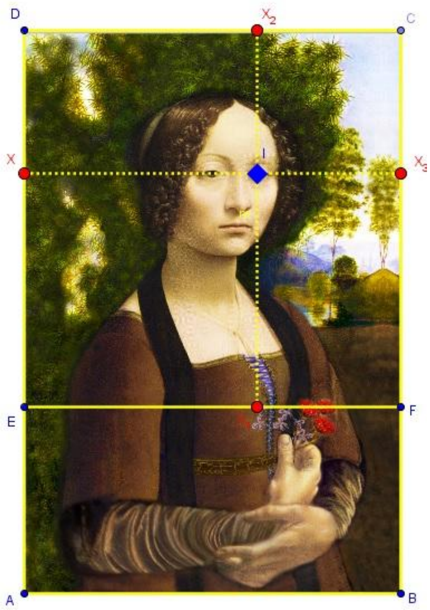
Figura 42 - Dama com o Arminho (*Cecilia Gallerani*).



Fonte: CHAVES & RODRIGUES (2014a, p.156).

Agora acompanhemos a figura a seguir, dado que os pontos $X, X_1, X_2,$ e X_3, são os pontos de ouro dos segmentos DE, EF, DC e CF respectivamente.

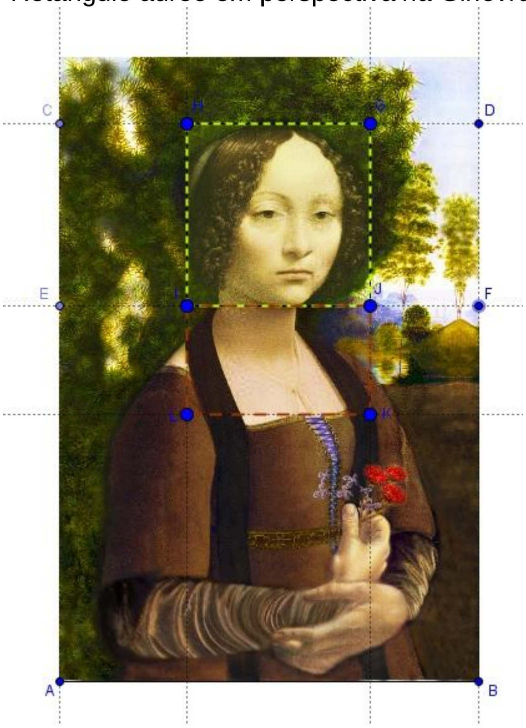
Figura 43 - Dama do Ramalhete (*Ginevra de Benci*).



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

Além do que já foi falado a despeito das três figuras femininas[33] e do que podemos observar (Cf. figura 44), a respeito da *Ginevra de Benci*, Atalay (2008) fala que a pintura foi feita em painel de choupo, medindo 38,8 por 36,7 centímetros. Em outras palavras, o formato da obra é praticamente um quadrado - ou não? Quando efetuamos um traçado geométrico simples - inscrevendo a retratada, desde o topo da cabeça até o corpo do vestido, num retângulo áureo configurado verticalmente, com a cabeça definindo um quadrado na parte superior do retângulo -, constatamos que o queixo quase diretamente no lado inferior desse quadrado.

Figura 44 - Retângulo áureo em perspectiva *na Ginevra de Benci.*



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

No tocante à *Cecilia Gallerani* é importante não deixar de perceber a seguinte característica citada na obra em curso:

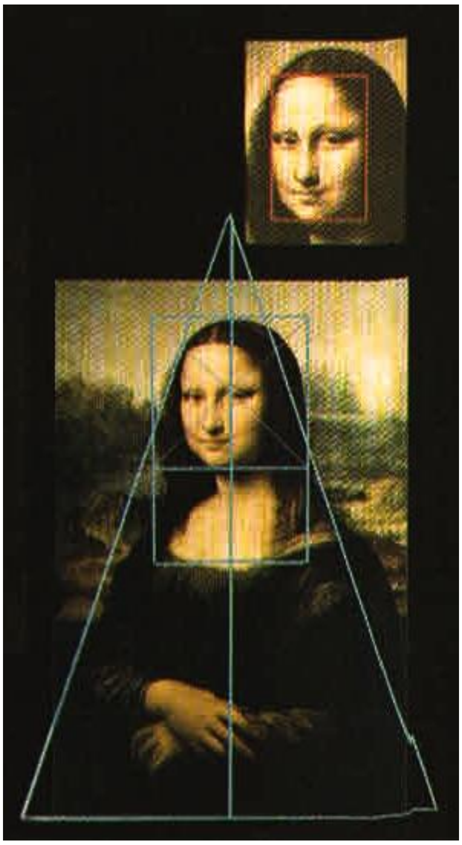
---

[33] Leonardo pintou apenas três retratos femininos, com intervalos de aproximadamente quinze anos do primeiro para o segundo e deste para o terceiro; ainda assim, cada um deles se tornou uma obra fundamental na história da Arte. Nos três casos, Leonardo recebeu uma encomenda rotineira para retratar uma mulher que não tinha nem beleza cativante, nem estatura majestosa; nos três casos, Leonardo conferiu imortalidade à retratada. São elas *Ginevra de Benci, Cecilia Gallerani* e a *Mona Lisa*. (ATALAY, 2008, p. 206)

> Em 1491, quando pintou *Cecilia Gallerani* (Dama com arminho), retrato da culta amante de Ludovico, haviam-se passado quinze anos desde que pintara *Ginevra de Benci*, e vê-se um incremento espantoso no grau de sofisticação. Assim como *Ginevra*, é um retrato em que as duas faces da moça aparecem e o torso se apresenta quase de frente (numa época em que as pessoas estavam acostumadas a ver apenas perfis femininos) e está repleto de implicações psicológicas (o olhar oblíquo, os dedos delicados). De fato, pode-se dizer que *Ginevra de Benci* e *Cecilia Gallerani* foram os primeiros retratos psicológicos já vistos.Na pintura de *Cecilia Galerani*, delineia-se um retângulo áureo, enquadrando a área desde o topo da cabeça até o topo do corpo do vestido. Na pArte superior do retângulo, traça-se um quadrado, o que deixa um retângulo áureo na pArte inferior. O resultado é tal qual em *Ginevra de Benci*. (ATALAY, 2008, p. 209).

E por fim, no que diz respeito à *Mona Lisa*, Atalay (2008, p. 210) nos expõe que nela "ele produziu um retrato psicológico prodigioso - fascinante, hipnótico, eterno. Sabemos quem é aquela mulher e, ao mesmo tempo, não sabemos." Algo que não é surpresa que o semblante e aquele meio sorriso tenham suscitado mais especulações extravagantes do que todas as outras obras de Arte. No que se refere a algumas características matemáticas encontradas a mais nesta obra (Cf. figura 45), assim como na *Ginevra de Benci* e *Cecilia Gallerani*, primeiro traçamos um retângulo áureo que delimite a área desde o alto da cabeça até o alto do corpo do vestido. Um quadrado delineado na parte superior do retângulo deixa o queixo da retratada pousado no lado inferior dessa nova figura, com o olho composicionalmente dominante (o esquerdo) ocupando o centro do quadrado. [...] Por fim, o torso da Mona Lisa (ligeiramente virado, com o ombro direito e a face esquerda recuados em relação ao ombro esquerdo e à face direita) pode ser inserido num triangulo áureo (de ângulos 72° - 36°- 72°).

Figura 45 - Triângulo e retângulo áureos evidenciados na Mona Lisa.



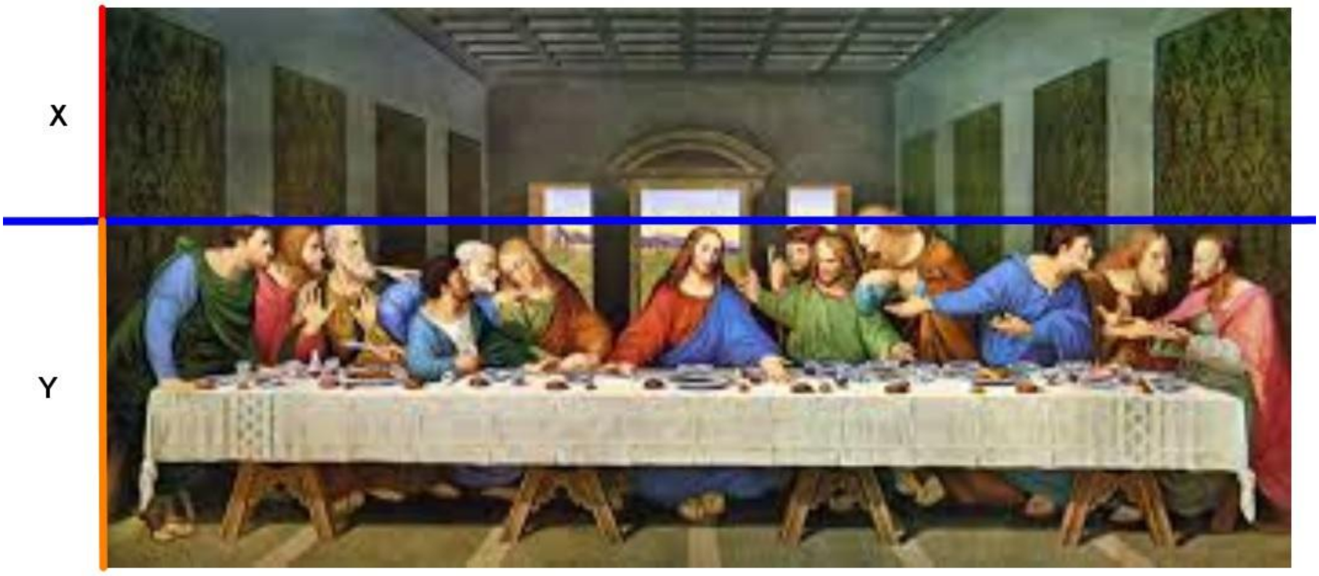
Fonte: Atalay, 2008, prancha 15.

Em 1495, aos 43 anos, Leonardo recebeu a encomenda de pintar um mural no refeitório do convento de *Santa Maria delle Grazie* (Milão); e o tema seria a última refeição que Cristo teria com seus apóstolos no dia da comemoração da Páscoa, a *Última Ceia*. Após um longo tempo de atraso para a entrega da obra de Arte, Leonardo enfim conclui a *Última Ceia.*

> [...] o mural era revolucionário na composição, agrupando os apóstolos em quatro grupos de três e isolando Cristo. Nessa que é a dramática de todas as suas pinturas, Leonardo capta o instante em que Cristo acaba de anunciar aos perplexos e agitados convivas: "Em verdade vos digo que um de vós me trairá". (ATALAY, 2008, p. 203).

Quando nos voltamos às características matemáticas existentes nesta obra de Arte, mais uma vez encontramos evidências de que Leonardo, além do agrupamento dos discípulos, fez questão de utilizar a razão áurea nela. Quando dividimos a distância do teto até a linha de fuga (Segmento Y em laranja) pela distância da linha de fuga até chão (Segmento X em vermelho), descobrimos que tal razão é igual à ϕ, ou seja, $\frac{Y}{X} = \phi$ (Cf. figura 46).

Figura 46 - Última Ceia de Leonardo Da Vinci.



Fonte: Elab. pelo autor, 2015.

> Se uma mensagem nos fica da análise do legado científico e artístico de Leonardo, é a da curiosidade insaciável, da perquirição constante, que definiu sua vida – desde a resolução dos problemas cotidianos até o exame das grandes questões referentes ao funcionamento da natureza. Leonardo observava e ponderava; com ele, o corriqueiro se tornava prodigioso, e o prodigioso, corriqueiro. [...] A curiosidade de Leonardo abarcava mundos intelectuais os mais variados: o técnico e o não técnico, o científico e o artístico. Aliás, foi pela conjugação desses mundos intelectuais que ele conseguiu produzir obras de tão deslumbrante qualidade e diversidade. (ATALAY, 2008, p. 315)

Leonardo Da Vinci conseguiu realizar tal façanha, juntou ciência com Arte, conseguiu manipular a beleza de suas criações utilizando artífices científicos e, de contrapartida, tornou seus estudos científicos de beleza insofismável aos olhos doutrem, utilizando a Arte. Juntou a curiosidade de aprender com o prazer de criar, resultando em obras de significados extremamente importantes ao desenvolvimento de estudos de outros cientistas de sua e de épocas futuras, produziu obras com significados claros e ao mesmo tempo conseguiu elaborar objetos enigmáticos, que até aos dias contemporâneos iludem e deslumbram de uma maneira fantástica, mentes e mais mentes, pensadores e mais pensadores. É conveniente evidenciarmos o uso demasiado da Razão Áurea, por Leonardo, nas obras aqui estudadas. Ele conseguiu agregar informações obtidas em seus trabalhos e utilizá-los com uma perspicácia única em conjunto artifícios matemáticos, transpondo, assim, barreiras entre ciências.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS[34]

As leituras em relação às obras de Da Vinci que apresentamos não foram postas com o propósito de ilustrar uma possível Matemática tomando a Arte como mote. Muito menos quisemos perpetuar o regime de verdades de que tudo é Matemática, como acreditavam os pitagóricos e os platônicos. Preocupamo-nos apenas em realizar algumas leituras tomando alguns padrões numéricos e geométricos. Entendemos aqui que Matemática e Arte são formas de ler o mundo e também duas maneiras que encontramos de procurar responder perguntas que, aparentemente, não possuem respostas.

Segundo Caraça (1978), surpresas, dúvidas, indagações são de todos nós e aparecem em todos os tempos. Tais se fazem indispensáveis de toda a luta gradualmente, de toda a diligencia de caminho a um nível maior de percepção. Que a densa bruma das dúvidas dê por vezes lugar aos traços luminosos duma certeza, aí encontra-se o nosso maior motivo de gloriarmo-nos como seres humanos; contudo não nos esqueçamos de que a autenticidade de hoje é a falha de amanhã, que certeza e perplexidade se misturam e reagem uma sobre a outra, ao longo desta gloriosa cadeia muitas vezes milenária que é a luta incessante do homem com a natureza e consigo próprio.

Bem mais do que produzir certezas, objetivamos ao longo desse texto gerar perplexidades, dúvidas e interrogações, sobretudo para que pensemos e nos inquietemos em relação a questões como: Tomar um viés entre Matemática e Arte implica em possibilidades e perspectivas à sala de aula? É possível tomar a relação biunívoca entre ambas como uma Tendência de pesquisa em Educação Matemática ou como um procedimento metodológico de ensino? Será que o viés entre Matemática e Arte configura-se como uma possibilidade de prática inovadora de ensino? Será essa relação uma trajetória e perspectiva à educação no século XXI?

---

[34]Parte deste capítulo encontra-se originalmente em Chaves & Rodrigues (2014c).

REFERÊNCIAS

ANTOCCIA, L. et al. **Leonardo: Arte e ciência –** as máquinas. Tradução: ANTUNES, Leonardo. São Paulo: Globo, 2004.

ATALAY, B. **A Matemática e a Mona Lisa –** a confluência da Arte com a ciê**ncia**. 2. ed. São Paulo: Novo Tempo. 2009.

BAGNI, G.; D`AMORE, B. **Leonardo e a Matemática**. São Paulo: Livraria da Física. 2011.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos**: geométricos e numéricos. São Paulo: Atual, 1993.

BICUDO, I. (tradução). **Os Elementos**. São Paulo: EdUNESP, 2009.

BLOG Matemática na Veia, 2008, Google Images. **Razão áurea na pirâmide**. Disponível em: <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2008/03/phi-razo-area-e-curiosidades-matemticas.html>. Acessado em: 03 de Setembro de 2015.

BONGIOVANNI, V. **O Teorema de Pitágoras**: uma ligação entre uma propriedade angular e uma propriedade métrica.In: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAIXQAK/demonstracao-teorema-pitagoras>. Acessado em 23.Jun.2014.

BORTOLOSSI, Humberto José, Google Images. **Triângulo áureo acutângulo**. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>. Acessado em: 14 de Setembro de 2015.

BORTOLOSSI, Humberto José, Google Images. **Triângulo áureo obtusângulo**. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>. Acessado em: 14 de Setembro de 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRANDÃO, L. de O.**IMÁTICA**:**a Matemática interativa na internet** – secção áurea. In: <http://www.matematica.br/historia/saurea.html>. Acessado em 21.Jun.2014.

BRASIL. Ministério da Educação.Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional.Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: quantificação, registros e agrupamentos. Brasília – MEC/SEB: 2014.

____. Ministério da Educação e do Desporto, Instituto Nacional de Estudos e PesquisasEducacionais. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília, 1998.

BUCHHOLZ, E. L. **Leonardo da Vinci**: vida e obra. New York: Könemann Verlagsgesellschaft, 1999.

CAMBIO, Arnolfo dI, Google Images. **Palácio de Verrochio**. Disponível em: <www.sabercultural.org>. Acessado em: 14 de Abril de 2015.

CARAÇA, B. de J. **Conferências e outros Escritos**. Lisboa: (?), 1978.

CARVALHO, Vicente, Google Images. **Proporção áurea no Sonic**. Disponível em: <http://www.hypeness.com.br/2014/02/a-proporcao-aurea-esta-em-tudo-na-natureza-na-vida-e-em-voce/>. Acessado em: 03 de Setembro 2015.

CARVALHO, Vicente, Google Images. **Proporção áurea na ortodontia**. Disponível em: <http://www.hypeness.com.br/2014/02/a-proporcao-aurea-esta-em-tudo-na-natureza-na-vida-e-em-voce/>. Acessado em: 03 de Setembro 2015.

____. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1989.

CHAVES, R.; RODRIGUES, C. L. Produções de significados matemáticos em obras de Leonardo Da Vinci. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica,** v. 04, n. 02,Dez., 2014a**,** p. 128-167. In: <http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/227>. Acessado em 21.Abr.2015.

____. Técnicas de dissecção na demonstração do teorema de Pitágoras: Euclides e Leonardo da Vinci. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco,** v. 03, n. 01,2014b**,** p. 60-71. In: < http://ojs.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/viewFile/230/238>. Acesso em 21.Abr.2015.

____. A questão da incomensurabilidade:do embaraço pitagórico às obras de Leonardo Da Vinci ─ uma proposta de educação matemática pela história e pela Arte. Anais da IV Escola de Inverno de Educação Matemática e 2º Encontro Nacional PIBID Matemática da UFSM. 2014c. In:<http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_Chaves_Rodolfo.pdf>. Acesso em 21.Abr.2015.

CHAVES, R.**A Sequência de Fibonacci**: aplicações na confecção de coletores solares. I Encontro de Ensino de Ciências Naturais (Biologia, Física e Química). Comunicação Oral Barretos, SP: IFSP, 2012 (Palestra de abertura).

____.Por que anarquizar o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais? 223 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – **Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro** – São Paulo. 2004.

CEZAR, M. dos S. Produções de significados matemáticos na construção dos números reais. 151 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – **EDUCIMAT, Instituto Federal do Espírito Santo – IFES**, Vitória. 2014.

CORBUSIER, Le, Google Images. **Representação da planta da casa, de Le Corbusier, disposta em um retângulo áureo**. Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/~anachiaradia/Material/FAMA-%20Retangulo%20aureo-%20avila%20-%20rpm6.pdf>. Acessado em: 15 de Julho de 2015.

DA VINCI, Leonardo, Google Images. **St. John in the Wilderness, (Bacchus)**. Disponível em: <www.sabercultural.org>. Acessado em: 14 de Abril de 2015.

DA VINCI, Leonardo; VERROCHI, Andrea del; BOTTICELLI, Sandro, Google Images. **O Batismo de Cristo**. Disponível em: <www.sabercultural.org>. Acessado em: 14 de Abril de 2015.

DA VINCI, Leonardo, Google Images. **Madona das Pedras**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Virgem_das_Rochas>. Acessado em: 14 de Abril de 2015.

DA VINCI, Leonardo, Google Images. **Madonna Benois (ou Virgem Benois)**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Virgem_Benois>. Acessado em: 14 de Abril de 2015.

EVES, H.**Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. Unicamp, 2004.

FABRICIO, Daniel, Google Images. **Símbolo da Apple e a razão áurea**. Disponível em: <https://www.google.com.br/search?q=s%C3%ADmbolo+da+apple+e+a+razao+aurea&biw=2051&bih=899&source=lnms&tbm=isch&sa=X&sqi=2&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMIjsWfkJPbxwIVgRiQCh0YlgdR&dpr=0.67#imgrc=XblVYYlveT35iM%3A>. Acessado em: 03 de Setembro de 2015.

FERNAND, Neerman, Google Images. **Modulor de LeCobusier**. Disponível em: <http://www.neermanfernand.com/corbu.html>. Acessado em: 10 de Setembro de 2015.

FOLKER, Rita, Google Images. **Poliedros Platônicos utilizados por Kepler**. Disponível em: <http://cienciadoinvisivel.blogspot.com.br/>. Acessado em: 10 de Setembro de 2015.

GUERATO, E.**A Matemática na Grécia**: Tales, Pitágoras, Euclides, Arquimedes,Eratóstenes, Apolônio, Hiparco, Ptolomeu, Herão, Diofanto, Papus e Menelau. Disponível em: <http://www.cefetsp.br/edu/guerato/mathist/apresentacoes/a_matematica_na_grecia.pdf>. Acessado em 16 de Junho 2014.

GOMES, M. **A Vida e o Pensamento de Leonardo Da Vinci**. São Paulo: Minuano, 2006(Coleção Iluminados da Humanidade).

HUISMAN, D. **Dicionário dos filósofos***.* São Paulo: Martins Fontes, 2001.

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção:** um ensaio sobre a beleza na Matemática. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1970.

LÍVIO, M. **Razão Áurea –** a história de Fi, um número surpreendente*.* 3. ed.Rio de Janeiro: Record, 2008.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Phitagorean Proposition**. 2. ed. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics,1968.

LOPEZ, A. **O enigma das pirâmides**. São Paulo: Hemus, 1978.

MANN, Nicholas. **Renascimento**: Grandes civilizações do passado. Barcelona - Itália, Editora Folio, 2004.

MOREIRA, N., C.; CABRAL, M. **Curso de Análise Real***.* 2. ed. V. 2.4. Rio de Janeiro: Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, UFRJ, 2011.

PÉRICLES, século V a.C, Google Images. **Paternon**. Disponível em: <http://pt.forwallpaper.com/wallpaper/parthenon-acropolis-66957.html>. Acessado em: 14 de Julho de 2015.

PÉRICLES, século V a.C, Google Images. **Frontispício do Paternon**. Disponível em: <http://www.bpiropo.com.br/fpc20070101.htm>. Acessado em: 14 de Julhode 2015.

PINTO, N. H. S. C. **Desenho geométrico***.* v.4 − teoria. 1. ed. São Paulo: Moderna, 1991.

SAMOS, Pitágoras de, século VI a.C, Google Images. **Pentegrama Pitagórico**. Disponível em: <https://www.google.com.br/search?hl=ptBR&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=2051&bih=965&q=pentagrama+pitag%C3%B3rico&oq=pentagrama+pitag%C3%B3rico&gs_l=img.3...1479.8281.0.9181.21.15.0.6.2.0.209.2178.0j14j1.15.0....0...1ac.1.64.img..5.16.2070.BinsmTQgSBk#imgrc=V7UBmyUx5ReXCM%3A>. Acessado em: 03 de Setembro de 2015.

SANTOS, Marconi Coelho dos; SILVA, Fernando Luiz Tavares da; LINS, Abigail Fregni. **Demonstrações do teorema de Pitágoras na perspectiva do Professor de Matemática.**Encontro Nacional de Educação, Ciência e Tecnologia da UEPB. Paraíba: (2012).

SEVCENKO, Nicolau. **O Renascimento**: discutindo a história; Editora: Atual; 1985.

SILVA, A.; PENA, N. **Números, o levantar do veú**.In: <http://www.mat.uc.pt/~mat1042/docs/am/RelatorioAM1Final.pdf>. Acessado em: 13 de Junho de 2014.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **BOLEMA (PGEM/UNESP)**, n.14, p.66-91. 2000.

WEIL, P.; D'AMBROSIO, U.; CREMA, R. **Rumo à nova transdisciplinaridade**: sistemas abertos de conhecimentos. 2. ed.São Paulo: Summus, 1993.

WITTMANN, Angelina, Google Images. **Teoria Cósmica de Kepler e a razão áurea**. Disponível em: <http://angelinawittmann.blogspot.com.br/2013/11/retangulo-aureo-natureza-e-arte.html>. Acessado em: 10 de Setembro de 2015.

WHITE, Michael. **Leonardo** – o primeiro cientista. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Bagé:EdUnimpa; Ciência Moderna, 2011.

ZALESKI FILHO, D. **Matemática e Arte**. São Paulo: Autêntica, 2013. (Tendências em Educação Matemática).