INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

**MARIANA DOS SANTOS CEZAR**

# PRODUÇÕES DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS NA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Vitória

2014

MARIANA DOS SANTOS CEZAR

# PRODUÇÕES DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS NA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Chaves.

Vitória

2014

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

C425p Cezar, Mariana dos Santos

Produções de significados matemáticos na construção dos números reais / Mariana dos Santos Cezar. – 2014.

165 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Rodolfo Chaves.

Dissertação (mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós- graduação em Educação em Ciências e Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Professores – Formação. 3. Números reais. I. Chaves, Rodolfo. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.

CDD 21: 510.7

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

Autarquia criada pela Lei nº 11.892 de 29 de Dezembro de 2008

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**MARIANA DOS SANTOS CEZAR**

# PRODUÇÕES DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS NA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 31 de Maio de 2014

**COMISSÃO EXAMINADORA**

Prof. D.Sc. Rodolfo Chaves
Instituto Federal do Espírito Santo
Orientador

Profa. D.Sc. Ligia Arantes Sad
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. D.Sc. Amarildo Melchiades da Silva
Universidade Federal de Juiz de Fora

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

Autarquia criada pela Lei nº 11.892 de 29 de Dezembro de 2008

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**MARIANA DOS SANTOS CEZAR**


CEZAR, Mariana dos Santos; CHAVES, Rodolfo. **Número Real é todo racional ou irracional. Por quê**? Vitória: Ifes, 2014. 24p.

Produto final apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 31 de Maio de 2014

**COMISSÃO EXAMINADORA**

Prof. D.Sc. Rodolfo Chaves
Instituto Federal do Espírito Santo
Orientador

Profa. D.Sc. Ligia Arantes Sad
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. D.Sc. Amarildo Melchiades da Silva
Universidade Federal de Juiz de Fora

À minha família, pelos exemplos de lutas e conquistas.

A meu noivo Ailton, pelo apoio e compreensão nas horas necessárias.

Aos meus professores por todo ensinamento.

A vocês meu carinho!

Agradeço a Deus, minha força maior, meu alicerce, fonte de equilíbrio, de persistência e de vitória. A Ele à Glória!

À minha mãe Marlene e a meu pai José Francisco pelo incentivo, pela compreensão e pela força incondicional.

Ao meu noivo Ailton, pelo carinho e preocupação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rodolfo Chaves pela orientação produtiva e segura, pela dedicação destinada a este trabalho, pela compreensão, pela sinceridade, pelo carinho e por ter compartilhado comigo suas ideias. Obrigada, pelo crescimento pessoal e profissional que me proporcionou.

À Prof.ª Rosângela Cardoso Silva Barreto que com carinho e compreensão compartilhou algumas de suas aulas e se tornou parte desse processo.

À grande amiga, Bea Karla Flores, pelo apoio, carinho e torcida para esta conquista.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat - IFES, campus Vitória, que com seus valiosos conhecimentos contribuíram para minha formação.

Aos queridos colegas de turma pelo companheirismo e amizade.

Aos amigos que disseram siga em frente, em especial, à amiga Rogéria Carla.

A Banca Examinadora que gentilmente aceitou o convite.

A todos os alunos, sujeitos desta pesquisa, que contribuíram e colaboraram para a realização e término deste trabalho.

Enfim, a todos vocês, meu muito obrigada!

## RESUMO

Esta pesquisa de mestrado tem como intuito a análise da produção de significados matemáticos em relação aos processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais até uma compreensão e possíveis definições de números racional, irracional e real. As ações desenvolvidas durante a pesquisa, de cunho qualitativo, foram constituídas nos moldes da pesquisa-ação e procuraram desenvolver reflexões, discussões e intervenções, tanto por parte dos pesquisadores quanto por parte dos sujeitos da pesquisa. Tivemos a pretensão de intervir e levar à reflexão a respeito de paradigmas existentes nos processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais, mais especificamente na formação inicial do professor de Matemática. Essa proposta incide no fato de buscarmos que professores e futuros professores de Matemática pensem de forma reflexiva sobre sua prática pedagógica, no seu cotidiano escolar, seja como professor ou como aluno de Licenciatura em Matemática. Por esse motivo, optamos por desenvolver a pesquisa com alunos do 1º período e com um grupo composto por 5 alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), *campus* Vitória. Adotamos como fundamentação teórica o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), na perspectiva da produção de significados e na construção do conhecimento. E como método adotamos a pesquisa-ação, que nos permitiu ouvir os envolvidos na pesquisa, bem como, refletir também sobre nossa prática pedagógica. Todos esses procedimentos viabilizaram respondermos a pergunta-diretriz: *que significados são produzidos por professores e futuros professores de Matemática, em formação inicial, ao longo de processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais?* O desenvolvimento e os resultados dessa pesquisa proporcionaram a construção de um produto final – a oficina – que descreve o processo de construção dos campos racional, irracional e real até a constituição de suas definições. Esta oficina é direcionada à formação inicial e continuada de professores de Matemática.



Palavras-chave: Números reais. Formação de professores de Matemática. Produção de significados matemáticos. Modelo dos Campos Semânticos.

## ABSTRACT

This master's degree research aims to analyze the production of mathematical meanings regarding the teaching and learning processes in the construction of the real numbers up to the constitution of the definitions of rational, irrational and real numbers. The qualitative actions taken during the research were built according to the Searching-Action models and aimed to lead to reflexions, discussions and interventions both by the researchers and the subject of the research. We intended to intervene and to reflect on the existing parameters regarding the teaching and learning processes in the construction of the real numbers, more specifically, in the initial formation of the Mathematics teacher. This proposal lays on the fact that we should convince teachers and future Mathematics teachers think in a reflexive way about their pedagogical practice, their daily school practices, no matter if they are teacher or Academic Mathematics students. Because of that, we have decided to develop the research with the freshmen college students and a group made of five academic graduating Mathematics students of the Federal Institute of the Espírito Santo (IFES), *campus* Vitoria. We adopted as a theoretical foundation the Semantic Field Models, in the meaning production perspective and in the knowledge construction. And method adopted action research, allowed listen to the people involved in the research, as well as to reflect about our pedagogical practice. All these procedures turned possible to answer the leading question: *What meanings are produced by the teachers and the future mathematics teachers, in the initial formation, along the learning and teaching processes in the construction of the real numbers?* The development and the results of this research turned possible the construction of the idea of a final product – the workshop – that describes the process of construction of the rational, irrational and real up to the constitution of their definitions. This workshop is directed on the initial and continued formation of the Mathematics teachers.



Keywords: Real numbers. Teachers formation Mathematics. Production of mathematical meanings. Model of Semantic Fields.

## LISTA DE FIGURAS


Figura 1 – Segmento de reta $\overline{AB}$ ........................................................................81

Figura 2 – Segmento de reta $\overline{CD}$ ........................................................................81

Figura 3 – Comparação de segmentos de reta ..........................................................81

Figura 4 – Resposta do sujeito A ..............................................................................102

Figura 5 – Resposta do sujeito B ..............................................................................103

Figura 6 – Resposta do sujeito C ..............................................................................103

Figura 7 – Resposta do sujeito D ..............................................................................104

Figura 8 – Resposta do sujeito E ..............................................................................105

Figura 9 – Resposta do sujeito F...............................................................................105

Figura 10 – Resposta do sujeito G ............................................................................106

Figura 11 – Resposta do sujeito H ............................................................................107

Figura 12 – Resposta do sujeito I..............................................................................108

Figura 13 – Resposta do sujeito J .............................................................................109

Figura 14 – Resposta do sujeito K ............................................................................109

Figura 15 – Resposta do sujeito L.............................................................................110

Figura 16 – Resposta do sujeito M............................................................................111

Figura 17 – Resposta do sujeito N ............................................................................112

Figura 18 – Triângulo retângulo isósceles ABC ........................................................112

Figura 19 – Representação geométrica do Teorema de Pitágoras ...........................113

Figura 20 – Representação dos Cortes de Dedekind................................................124

**SUMÁRIO**

**1 INTRODUÇÃO** .................... 12
**2 PRIMEIROS PASSOS** .................... 15
2.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA E PROFISSIONAL .................... 15
2.2 O CAMINHO: DO PROBLEMA A CONSTRUÇÃO DO TEMA .................... 18
2.3 O QUE DIZEM OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) ... 27
**2.3.1 Os números no Ensino Fundamental** .................... 28
**2.3.2 Os números no Ensino Médio** .................... 31
**3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS** .................... 32
3.1 MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS (MCS) .................... 32
3.2 CAMPOS SEMÂNTICOS (CS)... .................... 40
3.3 ESPAÇOS COMUNICATIVOS .................... 41
**4 FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS** .................... 46
4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA .................... 46
4.2 A PESQUISA-AÇÃO .................... 50
4.3 O LEVANTAMENTO E A ANÁLISE DOS DADOS .................... 54
4.4 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA .................... 56
4.5 DESCRIÇÕES DOS PROCEDIMENTOS .................... 60
**4.5.1 Primeira e segunda abordagem: análise prévia e início da pesquisa** ...... 60
**4.5.2 Terceira abordagem: a construção do campo racional** .................... 61
**4.5.3 Quarta abordagem: a construção do campo irracional** .................... 63
**4.5.4 Quinta abordagem: a construção do campo real** .................... 64
**4.5.5 Sexta abordagem: plenária** .................... 65
**5 INVESTIGAÇÃO A ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS** .................... 67
5.1 IMPASSES E ALGUNS OBSTÁCULOS .................... 67
5.2 PERFIS DOS SUJEITOS DA PESQUISA .................... 69
5.3 A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS .................... 70

**5.3.1 Construção do Campo Racional** ................................................ 72
**5.3.2 Construção do Campo Irracional** ................................................ 95
**5.3.3 Construção do Campo Real**.....................................................122
5.4 PLENÁRIA ................................................................................138
**CONSIDERAÇÕES FINAIS** ..........................................................142
**REFERÊNCIAS** ...........................................................................147
**APÊNDICE A**.............................................................................151
Solicitação para desenvolvimento de pesquisa (ao diretor)......................... 151
**APÊNDICE B**.............................................................................152
Termo de autorização para desenvolvimento (diretor e coordenador) .........152
**APÊNDICE C**.............................................................................153
Termo de autorização para desenvolvimento (professor)............................153
**APÊNDICE D**.............................................................................154
Termo de autorização para desenvolvimento (professora)...........................154
**APÊNDICE E**.............................................................................155
Autorização para uso de resultados de pesquisa ........................................155
**APÊNDICE F** .............................................................................156
Questionário I ...............................................................................156
**APÊNDICE G** .............................................................................158
Questionário II ..............................................................................158
**APÊNDICE H**.............................................................................159
Questionário III .............................................................................159
**APÊNDICE I** ..............................................................................161
Questionário IV .............................................................................161
**APÊNDICE J** .............................................................................163
Questionário V ..............................................................................163

**APÊNDICE K**.......................................................................................165

Plenária...............................................................................................165

# 1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa é fruto da vontade de ir além de uma investigação teórica a respeito do ensino da definição de números reais. Buscamos investigar, analisar, discutir e explicitar a produção de significados matemáticos[1] a partir das atividades de campo desenvolvidas (oficinas e intervenções em aulas em turmas de Licenciatura em Matemática), no que tange a construção campos dos números racionais, irracionais e reais.

Como professores de Matemática, tivemos a oportunidade de lecionar em redes (municipais, estaduais e federal) de ensino e também atuarmos como tutores em cursos de formação continuada para professores de Matemática. Durante toda a jornada de ensino, tanto no Fundamental quanto no Médio, bem como nas formações, nos deparamos com incoerências e circularidades em relação ao ensino de números reais. Advindas de alunos e professores de Matemática, muitas dúvidas têm emergido quanto à definição dos números, segundo a classificação dos conjuntos numéricos aos quais pertencem. Comprovamos tal problemática em nossa sala de aula, pela dificuldade que encontramos de adaptar as definições que estudamos ao longo de nossa formação inicial[2] para nossos alunos, em especial, da Educação Básica. Essa perspectiva motivou e contribuiu para nossa intenção e problematização de estudo.

Com o objetivo de analisarmos que significados matemáticos são produzidos, por meio dos processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais até uma compreensão e possíveis definições de números racionais, irracionais e reais, nos propusemos a desenvolver a construção dos números reais[3] com alunos da Licenciatura em Matemática. A investigação se deu numa sala de aula de alunos do 1º período e com um grupo de alunos concluintes que cursavam disciplinas finalistas, todos, estudantes do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), *campus* Vitória. Procuramos evidenciar como o processo de construção dos números reais proporciona a construção

---

[1]Descrevemos significados matemáticos, pois acreditamos que os significados produzidos não são somente os produzidos por matemáticos, mas também, que toda forma de contar, medir, representar por meio de figuras, desenhar, etc., conduzem a pensar matematicamente.

[2]Destacamos como formação inicial a formação adquirida nos cursos de Licenciatura Plena em Matemática.

[3]Sempre que abordamos construção dos números reais tratamos de três campos numéricos, o racional, o irracional e o real.

desconhecimento. Para tal, nos embasamos no Modelo dos Campos Semânticos (MCS) no que diz respeito à produção de significados.

Com o intuito de desenvolvermos a pesquisa com o envolvimento dos sujeitos e dos pesquisadores, de forma participativa, de maneira que as fases da pesquisa pudessem ser construídas coletivamente, buscamos um método que subsidiasse essa proposta. Assim, adotamos a pesquisa-ação,que foi desenvolvida levando em conta o processo de produção de significados matemáticos desses alunos; processo esse determinado pelas ações enunciativas dos sujeitos envolvidos, frente a uma demanda de produção de significados no que se refere ao problema proposto:

*Que significados matemáticos são produzidos por professores e futuros professores de Matemática, em formação inicial, ao longo de processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais?*

Realizamos uma análise prévia, em relação ao tema, dos conhecimentos trazidos pelos sujeitos da pesquisa. Com o intuito de inserir um pouco da História da Matemática, destacamos alguns aspectos históricos sobre a evolução dos números reais e a formulação de sua definição. Pata tal, descrevemos o problema da medida que ocasionou na construção do campo racional; o surgimento de segmentos incomensuráveis que proporcionaram uma extensão do campo racional para o campo irracional; e os cortes de Richard Dedekind, que segundo Caraça (1989), provê uma fundamentação mais rigorosa para a definição de números reais. Destacamos também a importância de se utilizar esses procedimentos na formação de professores de Matemática, visando uma melhor compreensão dos porquês de tais definições. Por fim, analisamos se houve alguma mudança em relação aos significados matemáticos produzidos, observados antes das construções e após tais construções.

A seguir apresentamos a estrutura de nossa pesquisa.

No *Capítulo 2: Primeiros Passos*, descrevemos um pouco da nossa trajetória acadêmica e profissional e realizamos uma revisão de literatura, em Educação Matemática, com o objetivo de identificarmos algumas pesquisas correlatas na área, principalmente na formação do professor de Matemática e, evidenciarmos a problemática em relação ao tema. Como consequência, esboçamos como o problema da pesquisa foi constituído. Além disso, destacamos como os Parâmetros

Curriculares Nacionais podem auxiliar o professor de Matemática no ensino de números reais.

No *Capítulo 3: Fundamentos Teóricos*, apresentamos a teoria que embasou nossa pesquisa, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Descrevemos o processo de produção de significados, a construção do conhecimento, os espaços comunicativos e evidenciamos o que estes elementos contribuíram para o processo de pesquisa.

No *Capítulo 4: Fundamentos Metodológicos*, descrevemos o método utilizado para o desenvolvimento da pesquisa, a pesquisa-ação. Fundamentamos o porquê do uso desse método e justificamos os procedimentos utilizados. Apresentamos as etapas de constituição e do desenvolvimento dos procedimentos metodológicos.

No *Capítulo 5: Investigação a análise dos dados obtidos*, descrevemos os dados, suas análises, a construção do conhecimento em alguns campos semânticos e a descrição do processo de construção dos números reais. Esse processo envolveu o desenvolvimento de um produto final caracterizado como uma oficina intitulada "*Número Real é todo número racional ou irracional. Por quê?*", que foi ministrada pela primeira vez na III Semana de Matemática do IFES, *campus* Vitória. Tal experiência proporcionou a escrita de um material impresso, direcionado para uso em oficinas de formações iniciais e continuadas de professores e futuros professores de Matemática.

Nas *Considerações Finais* pontuamos os campos semânticos evidenciados por meio da análise realizada nas enunciações dos sujeitos e destacamos o que visualizamos com os significados matemáticos produzidos pelos mesmos.

Destacamos também a importância da criação do produto final, a oficina, fruto do processo de construção dos números reais realizado durante a pesquisa.

# 2 PRIMEIROS PASSOS

## 2.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA E PROFISSIONAL

Destacamos parte da trajetória acadêmica e profissional na primeira pessoa do singular por acreditar que informações pessoais são elementos que constituem a vida de um único sujeito. Na parte que relatamos sobre a construção e desenvolvimento da pesquisa, por sua vez, descrevemos na primeira pessoa do plural, pois essa não é constituída por apenas um sujeito e também por sermos coerentes com o referencial de pesquisa-ação adotado.

Antes de pensar em me tornar professora de Matemática já pensava em lecionar, quando brincava com o quadro de giz ganhado de meus pais. O tempo foi passando e, em 1997, ao ingressar no Ensino Médio resolvi optar pelo magistério, por ser um curso que me abriria portas ao mercado de trabalho e também para satisfazer uma vontade de criança. Foi aí que tive o primeiro contato com uma sala de aula, em estágios nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Mas não parei por aí. No ano de 2002 ingressei na Universidade Federal do Espírito Santo – Centro Universitário do Norte do Espírito Santo (CEUNES[4]), localizada em São Mateus, para cursar Licenciatura em Matemática. A princípio, a escolha do curso foi tomada por falta de opção, apesar de possuir uma aptidão pela disciplina em questão. No entanto, durante os quatro anos de curso, me apaixonei pela área e a vontade de ensinar crescia a cada dia.

Nesse mesmo ano comecei a lecionar, como professora de Matemática, em uma escola de Ensino Fundamental, em turmas de 5ª a 8ª séries, e gostei muito da experiência. Essa oportunidade representou o marco inicial da minha vida profissional. Daí em diante não parei mais. Lecionei em projetos de processo de aceleração, Educação de Jovens e Adultos, cursos técnicos, atuando em diversas turmas, níveis e modalidades de ensino.

Concluída a graduação em Matemática, em 2005, fiz uma especialização e alguns cursos de complementação. Em 2008 fui convidada a trabalhar como tutora dos cursos de formação continuada em Matemática no município de Nova Venécia – ES para professores dos Ensinos Fundamental e Médio. Posso dizer que essa foi uma

---

[4] Esse Centro é um dos campi da Universidade Federal do Espírito Santo.

das melhores experiências, pois foi uma grande oportunidade de aprendizagem para a vida pessoal e profissional. No final de 2010 os cursos encerraram. Nesse mesmo ano ingressei como estudante no programa de Pós-graduação – Especialização de Ensino na Educação Básica, área de concentração Matemática, do CEUNES/UFES, e foi aí que me realizei. Com as discussões, debates, reflexões e trocas de experiências com professores e colegas de sala, construímos e reconstruímos conhecimentos que nos serão válidos por toda vida.

Foi a partir desse estímulo que surgiu a vontade de ir além, de construir novos conhecimentos, de aprimorar meus processos de ensino e de aprendizagem, de tornar-me pesquisadora na área da Educação Matemática. Foi então que em 2012 ingressei no Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática oferecido pelo Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), *campus* Vitória. Ao ingressar nesse mestrado vislumbrei a oportunidade de me aprimorar como profissional, considerando essa nova etapa como mais um passo rumo ao desejo de aprender, de socializar ideias, de construir novos conhecimentos e tornar-me pesquisadora.

Em busca de investigar, comecei a refletir a respeito do que pesquisar. Foi então que resolvi prosseguir com a pesquisa que desenvolvi na especialização, que deu origem à monografia intitulada *“Concepções acerca do Conceito de Números Reais: uma breve reflexão sobre seu Ensino na Educação Básica”*, com o objetivo de investigar como o professor de Matemática da Educação Básica tem conceituado números reais e como se tem desenvolvido este conceito no processo de ensino e de aprendizagem. Essa motivação surgiu nos encontros com o grupo de formação continuada, no qual atuava como tutora. Em um dos encontros, uma professora de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental questionou por que definimos números reais como sendo aqueles que resultam da “*união dos racionais com os irracionais*”. Naquele momento, nem eu, nem os professores de Matemática ali presentes, soubemos ou conseguimos responder. Isso nos inquietou pois percebemos que ensinávamos aos alunos essa e demais definições que não sabíamos explicar como foram constituídas. Nesse dia discutimos muito a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem desenvolvidos nas Licenciaturas em Matemática. Muitos professores de Matemática destacaram que sentiram “necessidade”, durante a formação inicial, de um ensino mais voltado para a prática em sala de aula, principalmente para o ensino na Educação Básica e mencionaram que a disciplina de Prática de Ensino não conseguia atender às expectativas relacionadas ao curso, no que diz respeito à apropriação do que é aprendido na Licenciatura em relação ao ensino na Educação Básica. A pesquisa apontou “uma possível desconexão entre o que o professor de Matemática aprende enquanto aluno, [...] e o que realmente precisa conhecer e desenvolver no processo de ensino e aprendizagem com os seus alunos” (CEZAR, 2011, p. 51). E mais,

> [...] os resultados da pesquisa apontam para a hipótese de que as respostas advindas do conhecimento dos professores, com respeito aos números reais são fragmentadas e despertam a suspeita de que o tema é tratado de forma isolada tanto na formação do professor quanto no ensino na Educação Básica (CEZAR, 2011, p. 36 - 37).

Foi então que, por meio desses resultados e por novos questionamentos que surgiram acerca do tema em questão, que nos propusemos investigar, nesta pesquisa de mestrado, como a definição de números reais é constituída. A essa ideia inicial recebi um convite do orientador, Professor Rodolfo Chaves, que nos propôs transformar essa pesquisa em uma pesquisa do tipo ação, pautada no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), especificamente no que diz respeito à produção de significados e à construção de conhecimento. Aceitei a proposta apesar de não ter desenvolvido nenhuma pesquisa do tipo ação e de não conhecer o MCS. Para embarcar nesse novo desafio realizamos um levantamento bibliográfico em literaturas que descrevem o MCS e em obras que contextualizam a pesquisa-ação.

Sobre o MCS, encontramos nas obras de Romulo Campos Lins as explicações necessárias para compreender elementos que o compõem, assim como ideias de como utilizá-lo no embasamento teórico da pesquisa. Aprimorei meus estudos sobre o Modelo no GEPEMEM: Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática, coordenado pelo Prof. Rodolfo Chaves e composto por alunos e professores do IFES, *campus* Vitória e do Grupo de Pesquisa SIGMAT (sigma T), da UNESP - Rio Claro, no qual o professor supracitado é membro. Tais grupos serviram de interlocutores a partir de um grupo fechado, criado no *facebook*, com o propósito de discutirmos o MCS. No GEPEMEM foi criado o subgrupo – Construção dos Números Reais – para discutirmos o MCS e as respectivas construções dos campos racional, irracional e real. Foi por meio de leituras, reflexões e discussões com os colegas do grupo que conseguimos compreender parte das aplicações do Modelo, sendo que nossas concepções a respeito do MCS tomaram corpo a partir da constituição e do desenvolvimento da pesquisa. Também discutimos a respeito da pesquisa-ação segundo as concepções de Barbier (2012), Thiollent (2011) e Chaves (2001) e como um trabalho segundo tais parâmetros pode ser desenvolvido.

Nessa perspectiva realizamos uma busca a trabalhos desenvolvidos na área da Educação Matemática, mais especificamente, aos que trataram sobre a construção dos números reais na formação dos professores de Matemática e a produção de significados. Essa busca nos ajudou também a definirmos o tema da pesquisa.

## 2.2 O CAMINHO: DO PROBLEMA À CONSTRUÇÃO DO TEMA

O estudo dos números reais faz parte da vida escolar, além de também estar presente nas ações cotidianas de grande parte dos indivíduos. Assim, a ideia de número existe independentemente de estarmos na escola. No entanto, é na escola que o aluno inicia o processo de formalização e é nesse momento que o professor de Matemática tem uma grande tarefa: orientar o aluno para que o mesmo possa produzir significados relevantes no que se refere à construção dos números reais de forma adequada e que possibilite a aprendizagem. Só que isso não tem sido tarefa fácil. Pesquisas realizadas e apresentadas nas obras, Moreira (2004), Pasquini (2007), Costa (2009), Patrono (2011), Cezar (2011), Cruz (2011), Pommer (2012), dentre outras, no campo da Educação Matemática, têm revelado a existência de uma problemática nos processos de ensino e de aprendizagem dos números reais, na formação do professor de Matemática e no ensino na Educação Básica. Encontramos também nessas pesquisas procedimentos utilizados como propostas para o ensino de números reais.

Em sua tese de doutorado intitulada *"O Conhecimento Matemático do Professor: formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica"*, Moreira (2004) investiga o conhecimento matemático e o ensino de números e seus respectivos campos numéricos na formação inicial do professor de Matemática e na prática docente ao analisar ementas do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Para esse estudo o pesquisador tomou como tema os conjuntos numéricos ─ naturais, racionais, irracionais e reais. Como forma de registro o autor utilizou questionários e entrevistas realizadas com alunos ingressantes e formandos em Licenciatura em Matemática. Após análises a respeito dos conhecimentos matemáticos desses alunos em relação à Matemática acadêmica e à Matemática escolar ─ adotada para o ensino na Educação Básica – ele constatou a partir dos dados:

> [...] que o professor inicia sua prática profissional na escola básica sob a influência de uma concepção implícita de que, na impossibilidade de trabalhar com a “boa” matemática a que foi exposto no processo de formação na licenciatura, é obrigado a optar por uma estratégia que acaba reproduzindo a sua própria formação escolar, ou seja, a que ele acabou trazendo para a licenciatura (MOREIRA, 2004, p. 168).

A obra em questão denomina esse processo de formação como círculo vicioso, o que confirma o distanciamento entre o conhecimento a respeito dos sistemas numéricos difundidos na formação inicial do professor de Matemática e os conhecimentos matemáticos necessários à prática docente, relativos ao assunto em questão. Para Moreira (2004) uma condição básica ao desenvolvimento de uma prática docente, que possibilite o processo de adaptação dos conteúdos aprendidos na formação inicial aos conteúdos que serão ensinados na Educação Básica, pelo professor de Matemática, depende do domínio que esse professor detém dos conceitos matemáticos e a forma como estes foram tratados e trabalhados em sua formação inicial. Para tal, esses conceitos precisam ser difundidos de forma multifacetada, isto é, capaz de direcionar diferentes caminhos para os processos de ensino e de aprendizagem.

Moreira (2004) ainda destaca a necessidade de repensar a forma como os sistemas numéricos são abordados durante a formação inicial do professor de Matemática. Em sua pesquisa, ao analisar ementas de disciplinas como Fundamentos de Álgebra e Fundamentos de Análise, observou textos destinados ao ensino de números reais como por exemplo, o de Niven (1984) ─ onde os racionais são tomados como uma ampliação dos inteiros em relação à divisão, sem dar ênfase à ideia do que seja “medir” um comprimento ou outra grandeza, isto é, sem levar em consideração o processo geométrico, histórico, adotado pelos gregos ─ tal como apontam Caraça (1989) e Ávila (2006).

Em seguida, para o estudo dos números irracionais, Niven (1984) prova a irracionalidade da $\sqrt{2}$ e, como assinala Moreira (2004), pouco menciona a respeito da incomensurabilidade de segmentos. Em nossos estudos, a partir do referencial adotado, verificamos, por exemplo, que a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado ─ adotado historicamente pelos gregos e tratado por Eudoxo no Livro V dos Elementos de Euclides, destinado à teoria das proporções e de razões entre segmentos e grandezas ─ não fora abordado como preâmbulo. Em relação à análise do texto em questão, Moreira (2004) destaca que os reais positivos são tratados como aqueles que medem as distâncias a um ponto fixo da reta.

Esse autor também relata que em livros adotados para o ensino na disciplina de Fundamentos de Análise, como por exemplo o de Fiqueiredo (1975), o conjunto dos números reais é definido como um corpo ordenado completo que contém um subconjunto que está em correspondência biunívoca com o conjunto dos racionais. Dessa forma ele conclui que:

> [...] na disciplina Fundamentos de Análise, o objetivo é claramente especificado: a abordagem axiomática dos reais é desenvolvida para que se possa chegar, com todo o rigor e o mais rapidamente possível, às questões fundamentais relativas às sequências e séries, às funções contínuas, à derivada e à integral (MOREIRA, 2004, p. 78).

Nesse sentido, observamos que o ensino dos números reais tem sido, geralmente, tratado apenas como base teórica para outros conteúdos. Daí, Moreira (2004, p. 167 - 168) enfatiza que “se o processo de formação busca preparar o futuro professor de matemática [...] para uma prática de negociação e de construção de significados com os alunos, infere-se [...] que é necessário repensar esse processo, pelo menos no que concerne à abordagem dos sistemas numéricos”.

Nessa vertente, Pasquini (2007) em sua tese de doutorado intitulada “*Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos: uma proposta, uma investigação”*, faz uma análise crítica quanto à abordagem do ensino dos números reais em livros de Análise Real direcionados para Licenciatura em Matemática, que apresentam o conjunto dos números reais de forma axiomática. Segundo tal obra, “esta é uma atitude característica da natureza da Matemática do ponto de vista do matemático [...]” (PASQUINI, 2007, p. 37). Em suas análises, ela ainda relata:

> As leituras que realizei para considerar o tema “números reais” nesta tese levaram-me a perceber que a introdução dos conceitos de medida de grandezas e dos *números reais* são dois temas maltratados ou ignorados nos cursos de formação de professores. Devido a sua complexidade e importância dentro da prática escolar, este é um tema que deve ser sistematicamente tratado no espaço de formação de professores (PASQUINI, 2007, p. 164 – 165).

Como contrapartida propõe o uso do material *“Um tratamento, via medição para os números reais”,* elaborado pelos professores Rosa Lúcia SverzutBaroni e Vanderlei Marcos do Nascimento, ambos do Departamento de Matemática da Unesp – Rio Claro, como uma alternativa para abordar os números reais em cursos de formação de professores de Matemática.

Pasquini (2007) ainda destaca que o primeiro olhar que teve a respeito desse material é que o mesmo seria apenas mais um livro-texto de Matemática em sua formação, porém a partir do momento em que o utilizou como recurso didático, mudou sua concepção e passou a defender que um estudo como esse, realizado por outros professores de Matemática, serviria como um excelente material de coleta e pesquisa. Consideramos importante tal descrição, pois foi assim que também delineamos nossas ideias procedimentais até a elaboração do produto final.

Pasquini (2007) buscou, com o uso do material proposto *“Um tratamento, via medição para os números reais”* introduzir os números reais via medição de segmentos, realizando uma investigação a partir do acompanhamento da utilização do material numa sala de aula, composta por professores de Matemática no curso de Análise do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. A obra em questão relata que a utilização do material estreitou o distanciamento entre a formação do professor de Matemática e a prática docente no grupo em que a pesquisa foi realizada, uma vez que “introduzir os números reais a partir de um processo de medição é uma oportunidade para que outras noções e conceitos possam ser explorados, em particular, noções e conceitos básicos da Análise [...]” (PASQUINI, 2007, p. 165).

Na tese de doutorado, Pommer (2012), intitulada *“A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais”* é evidenciada uma problemática nos processos de ensino e de aprendizagem no que diz respeito à introdução dos conceitos de números racional, irracional e real. A pesquisa apresentada em Pommer (2012) propõe um referencial teórico que permite orientar o desenvolvimento substancial do tema: *números irracionais na Educação Básica*. Contudo, o que nos chamou atenção no estudo dessa obra foi o fato de direcionar suas análises à produção de significados dos sujeitos. Na busca de tais significados relativos aos problemas propostos, essa pesquisa aponta, como fator predominante "[...] a importância do papel que a interação e a intervenção podem vir a ocupar no processo de produção de significados de nossos alunos e, como consequência, nos processos de ensino e aprendizagem" (POMMER, 2012, p. 144).

Além disso, o texto em questão, evidencia que o ensino dos números irracionais tem sido proposto seguindo três etapas: definição, exemplificação e exercícios de fixação. Tal obra considera esse tipo de procedimento inadequado, pois são inúmeras as dificuldades encontradas para o ensino de números irracionais. Justifica sua enunciação tomando como referencial Vygotsky (1987) quando diz que o conceito não pode ser transmitido, o professor que tenta fazer isso obtém apenas um verbalismo vazio. Dessa forma, ensinar por transmissão oral definição ou conceito não é possível, o professor apenas enuncia suas ideias e quem as ouve produz algum significado que, por sua vez, possibilitará a construção do conceito.

Outro ponto que destacamos dessa obra é a consonância com Skovsmose (2000) e Chaves (2004) no que tange à hegemônica fixação do ambiente de aprendizagem denominado *Paradigma do Exercício* ─ onde a linearidade das três etapas supracitadas (definição, exemplificação e exercícios de fixação) é posta de forma retilínea e sequenciada facultando o caráter expositivista-centralizador (verbalismo vazio, como posto por Vygotsky) por parte do professor ─ que Chaves (2004) denomina de dispositivo tático de controle e, portanto, de manutenção do Ensino Tradicional de Matemática (ETM). O problema é abordado de forma que não haja construção de conhecimento, mas memorização, e daí a possibilidade de não duvidar daquilo que se sabe ─ ou pensa que se sabe ─ mas sim de fixar-se no instinto de rebanho que Chaves (2001) aponta como instrumento que leva à exclusão social do aluno. A Matemática assim empregada é um instrumento de exclusão social.

Patrono (2011), em sua dissertação de mestrado intitulada *"A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais"* investiga os processos de construção do conceito dos números racionais na forma fracionária por meio da utilização de materiais manipulativos à aprendizagem desses números. A pesquisa foi desenvolvida em classe de 6º ano de uma escola pública de Ouro Preto. O que nos chama atenção nesse trabalho é a investigação realizada sobre a construção dos conceitos de fração, equivalência e comparação, embasados na obra de Caraça (1989), pois boa parte do procedimento de nossa pesquisa foi construído a partir das teorias de tal obra. Durante a descrição de sua pesquisa, Patrono (2011) retrata que muitas são as dificuldades encontradas nos processos de ensino e de aprendizagem dos números racionais na forma fracionária e, como proposta, sugere atividades relacionadas ao ensino de frações e à construção do conceito de números racionais. Sua proposta foi norteada pela ideia de que os alunos aprendem agindo, refletindo e se comunicando matematicamente. Para tal, ele propôs o uso de materiais manipulativos, jogos, atividades lúdicas, dentre outros. Em suas considerações destaca que:

> [...] O ensino e a aprendizagem das frações tem trazido grandes desafios e dificuldades tanto para alunos quanto para professores. Várias sugestões podem ser encontradas nos documentos oficiais [como os PCN] e propostas de ensino, em pesquisas e também nos livros didáticos. A mudança desse cenário depende muito de nós, professores, e de nossa vontade de fazer o melhor para aprendizagem de nossos alunos (PATRONO, 2011, p. 155).

No contexto do ensino de números reais, Cruz (2011) em sua dissertação de mestrado intitulada *"Os números reais: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio"* trata a respeito Matemática escolar e Matemática acadêmica, diferenciando duas formas de entender e de conceber a Matemática. Além disso, discute aspectos da formação do professor de Matemática e de sua prática docente. O autor apresenta os números reais em suas estruturas algébrica e topológica e convida o professor ou licenciando em Matemática a entender essa estrutura em sua prática. Busca também uma discussão sobre o ensino de números reais na disciplina de Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Esse pesquisador propõe o estudo dos números reais de forma axiomática, como um corpo ordenado completo. Não concordamos com tal proposta, pois o que buscamos em nosso trabalho é justamente o oposto, isto é, a construção dos números reais com o objetivo de se entender sua definição e não apenas para definirmos que é um corpo ordenado completo. Inquietamo-nos com a seguinte argumentação apresentada nessa obra:

> A construção dos números reais nas estruturas - algébrica e topológica - se encerra nesta pesquisa, definindo números reais como corpos ordenados

> completos e arquimedianos, com a tentativa de aproximar as questões que são desenvolvidas nos cursos de formação de professores na disciplina Análise Real e a prática docente, respeitando a autonomia do professor em incorporar ou não tal tratamento em seu fazer pedagógico (CRUZ, 2011, p. 17 - 18).

Entendemos quando tal obra sugere que fique a critério do professor de Matemática a escolha de adotar ou não esse procedimento (a construção dos números reais nas estruturas – algébrica e topológica). Mas se ele aprende a definir os números reais como um corpo ordenado completo e não utiliza esse aprendizado, como deverá ensinar então? Isso nos leva ao entendimento que esse processo de ensino representa o círculo vicioso destacado por Moreira (2004).

Em contrapartida, encontramos em Cruz (2011) uma alternativa de produto final que usamos como ideia à constituição de nosso produto: a estruturação de uma oficina destinada a professores e futuros professores de Matemática. Esse produto intitulado "*Número Real é todo número racional ou irracional. Por quê?*" foi desenvolvido pela primeira vez como oficina na III Semana de Matemática do IFES, *campus* Vitória, no dia 13 de novembro de 2013 e contou com a participação de 40oficineiros, dentre eles, professores de Matemática e Licenciados em Matemática.

Como podemos observar, as obras mencionadas retratam o problema do ensino de números tanto na formação inicial do professor de Matemática quanto na Educação Básica, e indicam a necessidade de buscarmos novos dispositivos para alavancar os processos de ensino e de aprendizagem. Como destaca Cezar (2011) precisamos trabalhar com processos menos mecanizados que nos permitam e que permitam aos nossos alunos construírem seus conceitos, isto é, "[...] o estudo de números e os conhecimentos de sua origem devem constituir um elemento prioritário na formação do professor de Matemática de forma que lhe forneça uma visão mais ampla para uma melhor abordagem na sua prática pedagógica" (CEZAR, 2011, p. 51).

Também observamos nas descrições das obras citadas que muitos problemas podem surgir nos processos de ensino e de aprendizagem. Como por exemplo, os obstáculos epistemológicos. Sobre eles, Costa (2009), em sua dissertação de mestrado intitulada *"Números Reais no Ensino Fundamental: Alguns obstáculos epistemológicos"*, destaca que, de acordo com a epistemologia de Gaston

Bachelard[5], a construção do conhecimento acontece com um movimento de ruptura a conhecimentos pré-estabelecidos, com uma resistência à racionalização desse conhecimento, que são denominados obstáculos epistemológicos[6]. A respeito desse aspecto Cezar (2011, p. 18) enfatiza que “o indivíduo aprende a partir do momento que existem razões que o obriguem a mudar sua maneira de pensar, o que o levará a uma substituição de um conhecimento estático por um conhecimento dinâmico”. E ainda, observa que:

> Pensando nessas concepções, destaca-se a influência que os obstáculos epistemológicos desenvolvem sobre essa problemática, visto que a construção dos números reais se amplia por meio de fatores históricos e a partir de concepções prévias que durante o Ensino Fundamental vão sendo construídas e reconstruídas, como o caso das operações no conjunto dos números naturais e no conjunto dos números inteiros (CEZAR, 2011, p. 20).

Nessa perspectiva, Costa (2009) enfatiza que grande parte dos problemas do ensino de números reais no Ensino Fundamental está no fato de o ensino não ser ministrado pautado na história da Matemática. Assim, ele destaca que, parte dos problemas encontrados nesse processo provem do fato:

> [...] dos alunos desconhecerem como o homem chegou a determinado conhecimento, como esse conhecimento foi desenvolvido pelos povos, que problemas levaram-no a criá-los, que transformações sofreu ao longo do tempo e assim, sem a concepção dos conceitos em sua essência, aprender Matemática tem se tornado complicado (COSTA, 2009, p.13).

Dessa forma, a pesquisadora questiona se o ensino da Matemática tem omitido ou evitado algumas noções básicas de números e com isso contribuído para o aumento das dificuldades encontradas pelos alunos e também pelos professores.

Sobre esse histórico, refletimos a respeito do ensino desenvolvido com os alunos da Educação Básica. Se os alunos desconhecem como o homem chegou a determinado conhecimento, existe alguma lacuna nos processos de ensino e de aprendizagem. Onde está essa lacuna? Na prática pedagógica do professor de

[5]“Bachelard nasceu na França, na região de Champagne, Bar-sur-Aube, em 27 de junho de 1884 e morreu em Paris em 16 de outubro de 1962. Seus estudos focaram-se principalmente em assuntos referentes à filosofia da Ciência. Sua obra está marcada por uma reflexão sobre a filosofia implícita nas práticas efetivas dos cientistas” (COSTA, 2009, p. 23).

[6]“[...] a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos. Assim, esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de que detém esse conhecimento” (BACHELARD, apud, PAIS, 2001, p. 39).

Matemática ou em sua formação acadêmica? Novamente retornamos a uma reflexão da formação inicial do professor de Matemática, não que essa seja a única causa dos problemas nos processos de ensino e de aprendizagem, mas a forma como o ensino de números reais tem sido abordado nessas formações, tem evidenciado um ensino prioritariamente axiomático, o que contribui significativamente para assim direcionar nossos saberes matemáticos. Entretanto, na prática parece dificultar nossas “crenças-afirmações” a respeito de procedimentos metodológicos no que tange aos processos de ensino e de aprendizagem, relacionados ao tema em questão.

Quando iniciamos a busca a trabalhos desenvolvidos na área sobre o tema investigado, levamos em consideração informações que constituíram e colaboraram para uma visão acerca do problema - o ensino dos números reais, desenvolvido na Licenciatura em Matemática e na Educação Básica. Em nossa perspectiva tivemos como evidência elementos primordiais como: o ensino na formação do professor de Matemática, a importância dos fatores históricos na construção dos números, os obstáculos nos processos de ensino e de aprendizagem e a axiomatização do tema em livros de Análise Real, como por exemplo, em Lima (2004). A partir disso, vimos uma perspectiva de ensino da construção dos números reais a ser desenvolvida na formação inicial e continuada do professor de Matemática. Dessa forma, estabelecemos o foco do problema: os processos de ensino e de aprendizagem na construção dos números reais para a formação inicial do professor de Matemática. E, do problema, constituímos o tema: *Produções de Significados Matemáticos na Construção dos Números Reais*.

Entendemos que quando constituímos ideias para desenvolver uma pesquisa, muitos questionamentos emergem quanto aos procedimentos que serão seguidos e a que queremos responder. Durante essas inquietações e, em analogia com o problema evidenciado, começamos a delinear a pergunta-diretriz.

Algumas palavras-chave foram essenciais para essa formulação. São elas: produção de significados, formação de professores de Matemática e construção dos números reais. Pretendíamos desenvolver a pesquisa na perspectiva da formação inicial do professor de Matemática, evidenciando a produção de significados na construção dos números reais. Assim, nos propusemos a investigar: *que significados* *matemáticos são produzidos por professores e futuros professores de Matemática, em formação inicial, ao longo de processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais?*

## 2.3 O QUE DIZEM OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN)

O objetivo pelo qual optamos por descrever o que dizem os PCN de Matemática, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, se embasa no fato de abordarmos o tema com alunos da Licenciatura em Matemática, sendo que alguns já atuam como professores da Educação Básica e todos se encontram em formação para tal atuação.

Como já descrito, vivenciamos a problemática do ensino de números reais nos anos finais do Ensino Fundamental - até mesmo nos anos iniciais desse ensino, mesmo sem uma abordagem de definição para tal. Diante disso, pesquisamos nos parâmetros a forma como o tema números reais é tratado, a contribuição que o documento traz acerca desse tema.

Os PCN são um instrumento de auxílio a escola nas discussões pedagógicas, na elaboração de projetos, no planejamento de aulas, na análise de material didático e contribuem para reflexão e discussão de aspectos relacionados à prática pedagógica do professor. Tem por objetivo contribuir para que importantes transformações se façam na educação brasileira e direcionar o professor como principal agente nesse processo.

Os PCN apresentam inicialmente os objetivos gerais do Ensino Fundamental que orientam a estruturação curricular. A partir deles são definidos os objetivos gerais de cada área de conhecimento, dos temas transversais e os direcionamentos que estes devem receber em cada ciclo. O Ensino Fundamental é dividido em primeiro e segundo ciclos. O primeiro e segundo ciclos do 1º ao 5º ano e o terceiro e quarto ciclos do 6º ao 9º ano.

No caso do Ensino Médio temos os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) que têm por finalidade delimitar a área de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, com o intuito de criar uma escola com identidade que atenda às expectativas de formação dos alunos para o mundo contemporâneo.

No que diz respeito ao ensino da Matemática, os PCN dão importância ao conhecimento trazido pelo aluno, suas ideias e intuições que são construídas a partir das experiências que são vivenciadas em seu cotidiano, pois, segundo os PCN (1999), os estudantes possuem diferentes ferramentas básicas para, por exemplo, classificar, ordenar, quantificar e medir. Os PCNEM, por sua vez, enfatizam que a Matemática no Ensino Médio deve ser vista como ciência, com suas estruturas específicas e deve ser desenvolvida de forma que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamento lógico têm a função de construir novos conceitos a partir de outros para dar sentido às técnicas aplicadas. Dessa forma, é potencializado, pelo documento, para o desenvolvimento de capacidades tão importante quanto às de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, investigação, resolução de problemas, compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da realidade.

Além disso, para o Ensino Médio foi instituído os PCN + com orientações educacionais complementares aos PCNEM. PCN + Ensino Médio destaca que a Matemática deve ser compreendida como parte do conhecimento humano indispensável para a formação de todos os jovens, que contribui para interpretar a realidade e para desenvolver capacidades necessárias para a vida social e profissional.

### 2.3.1 Os números no Ensino Fundamental

De acordo com os PCN do Ensino Fundamental:

> [...] os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados pelos alunos num processo dialético, em que intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando-se suas propriedades, relações e o modo como se configuram historicamente (BRASIL, 1998, p. 39).

Ao longo da vida escolar o ensino de números é desenvolvido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e é proposto em diversas categorias criadas devido às diferentes situações problemas encontradas pela humanidade. No Ensino Fundamental o tema números indica que no primeiro ciclo algumas distinções não precisam ser representadas formalmente, mas são identificadas nas situações cotidianas vivenciadas pelos alunos para as quais o professor precisa explorar em sua prática pedagógica. Podemos observar isso no fato do número ser representado como:

> [...] um indicador de quantidade (aspecto cardinal), que permite evocá-la mentalmente sem que ela esteja fisicamente presente. É também um indicador de posição (aspecto ordinal), que possibilita guardar o lugar ocupado por um objeto, pessoa ou acontecimento numa listagem, sem ter que memorizar essa lista integralmente. Os números também são usados como código, o que não tem necessariamente ligação direta com o aspecto cardinal, nem com o aspecto ordinal (por exemplo, número de telefone, de placa de carro etc.) (BRASIL, 1998, p. 48).

Nesse ciclo espera-se que o aluno possa utilizar o número como um instrumento para representar e resolver situações que expressam quantidades evidenciadas em seu cotidiano, e que possam compreender as regras do sistema de numeração decimal. No segundo ciclo, os alunos ampliam ideias relativas à contagem, ordenação, estimativa e operações que envolvem números naturais. E pelo o que foi estudado sobre sistemas numéricos, os PCN destacam que os alunos podem interpretar e construir qualquer escrita numérica, inclusive a dos números racionais e de suas representações fracionária e decimal.

Nos PCN, o terceiro e quarto ciclos tratam do ensino destinado aos anos finais do Ensino Fundamental. Neles os PCN destacam que o conhecimento de números aparece como instrumento para resolver determinados problemas e como elemento de estudo em si mesmos, considerando suas propriedades, interrelações e o modo como foram construídos historicamente. Além disso, é enfatizado que:

> Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático (BRASIL, 1998, p. 50).

No terceiro ciclo as situações de aprendizagem relacionadas ao ensino de números no pensamento numérico devem levar o aluno a:

> - ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
> - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> - identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos [...] (BRASIL, 1998, p. 64).

E no quarto ciclo, por meio da exploração de situações de aprendizagem no pensamento numérico, o ensino de números deve levar o aluno a:

> - ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais;
> - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> - selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais (BRASIL, 1998, p. 81).

Como podemos observar, nos anos iniciais do Ensino Fundamental o tema números é tratado de maneira menos formal, mas direcionada à compreensão do sistema de numeração decimal, a operações, dentre outros. Já a consolidação da formalização de definições ou conceitos acerca dos números reais começa a ser edificada nos anos finais do Ensino Fundamental.

Os PCN trazem como instrumento a abordagem dos significados de números racionais e irracionais por meio de diferentes usos e para resolver situações problemas. Não encontramos nesse documento menção quanto à abordagem do tema por meio de construções, como destacaremos no capítulo 4.

É importante ressaltarmos que, apesar de desenvolvermos nossa pesquisa na Licenciatura em Matemática, o contexto sobre números reais, produzido pelo aluno que chega a essa graduação é geralmente aquele construído na Educação Básica, que se inicia nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Sobre este fato, Moreira e David (2005) ressaltam:

> Ainda que o licenciado em matemática, de um modo geral, não trabalhe com alunos das quatro séries iniciais do ensino fundamental, acreditamos que a separação acentuada existente entre a formação do docente desse ciclo e a do professor que leciona nas outros ciclos do ensino fundamental e médio é equivocada, pois pode contribuir para intensificar a descontinuidade do processo de transição das séries iniciais para a quinta série e seguintes. Isso, por si só, já coloca uma demanda no sentido de que o licenciado conheça a matemática que é trabalhada nas séries iniciais (MOREIRA E DAVID, 2005, p.52).

Nesse viés, defendemos que o professor de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental também precisa conhecer como o ensino de números é tratado também nos anos iniciais, isso porque o processo de construção do conhecimento se inicia desde o primeiro momento que o aluno começa a produção de significados acerca de um tema. Conhecer como esse processo inicial foi estruturado é importante para a reestruturação e formalização do conceito que se pretende introduzir.

### 2.3.2 Os números no Ensino Médio

O PCNEM destaca a Matemática em seu valor formativo e em seu caráter instrumental. Em seu valor formativo, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo e, em seu caráter instrumental “[...] deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional” (BRASIL, 1999, p. 40). Além disso, os números e a Álgebra são identificados como sistema de códigos, isso permite a Matemática comunicar ideias, modelando a realidade e propiciando uma melhor interpretação.

Sobre o ensino de números e Álgebra, o PCNEM destaca que não devem ser tratados isoladamente de outros conceitos, nem separados de situações problemas e da perspectiva sócio-histórica que compõem a origem desses temas. Além disso:

> [...] estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível (BRASIL, 1999, p.44).

Diante do que foi descrito observamos que o conteúdo números, proposto nos PCNEM, também não apresenta uma perspectiva orientadora à construção dos campos numéricos que permita a compreensão de suas definições. Observamos que a forma como é tratada a ideia de números reais não supera os desafios encontrados na Educação Básica, mas sabemos que os PCN se tratam de um instrumento que auxilia o trabalho do professor em seu fazer pedagógico e não especificamente no método que deve usar para ensinar um determinado conteúdo. Dessa forma, o que deve proporcionar ao professor de Matemática a escolha de meios para conduzir o ensino é a formação inicial e sua prática pedagógica.

# 3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

> ***“Como podemos nos entender*** **(…)*****, se nas palavras que digo coloco o sentido e o valor das coisas como se encontram dentro de mim; enquanto quem as escuta inevitavelmente as assume com o sentido e o valor que têm para si, do mundo que tem dentro de si?”***
>
> ***Luigi Pirandello***

Um trabalho de cunho científico é referendado, academicamente, por uma fundamentação teórica que venha a fornecer aportes para alicerçar ideias, procedimentos e análise de resultados. A base desta pesquisa fundamenta-se na perspectiva da produção de significados matemáticos a partir dos processos de ensino e de aprendizagem da construção dos campos dos números racional, irracional e real. Por isso, buscamos um modelo de conhecimento que nos possibilitasse analisar com mais propriedade o processo de produção de significados. Para tal, usamos como referencial o Modelo dos Campos Semânticos (MCS).

Neste capítulo apresentamos o MCS e descrevemos como adequamos a nossa pesquisa a esse referencial epistemológico. Buscamos discutir os conceitos relacionados ao Modelo, construindo um viés de nossas ideias e leituras às obras que alicerçaram o MCS.

Os conceitos de *produção de significados*, *conhecimento*, *enunciação*, *resíduos de enunciação*, *verdade*, *legitimidade*, *interlocutor*, *objetos*, *estipulações locais*, *núcleo*, *campos semânticos* e *espaços comunicativos*, tais como suas relações essenciais e as respectivas ligações estabelecidas entre esses elementos para explicar o Modelo utilizado, servem de aporte teórico desta pesquisa.

## 3.1 MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS (MCS)

O Modelo adotado foi concebido por Romulo Campos Lins, por volta de 1986, mas a escrita começa em 1992. Movidos por suas inquietações relacionadas à sala de aula “[...] queria dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando ‘erravam’, mas sem recorrer a esta ideia de erro” (LINS, 2012, p. 11). A ideia de "erro" está relacionada a algum pensamento, assim, Lins propôs tratar essa possibilidade cognitiva do mesmo modo que as coisas "certas".

Nessa perspectiva direciona seu olhar na busca da *produção de significados*; isto é, *o que os alunos pensam e falam quando resolvem algum problema, seja "certo" ou "errado"*; *qual a justificativa para esta resolução*. Nessa prerrogativa, Lins (2012) trata a respeito da construção do *conhecimento*. Sobre isso, tomamos como pressuposto, em nossa pesquisa, que a *produção de significados* é necessária para a construção do *conhecimento*. Construímos *conhecimento* por meio dos processos de *enunciação*, ou como afirma Chaves (2004), a uma releitura da obra de *Nietzsche*, para defender sua ideia de que o *conhecimento* só existe na medida em que, entre o homem e o que ele conhece, se estabelece algo como uma luta, ou seja, o *conhecimentos e constrói na ordem da batalha*[7]. Isso porque se configura sempre como uma relação estratégica em que o homem se encontra situado. Com isso, Chaves (2004, p. 71) descreve:

> Tal como *Nietzsche*, acreditamos que um conhecimento não se constrói a partir da aceitação de nossas verdades, mas a partir do questionamento das mesmas com respeito de algo a ser conhecido. Desta forma, entendemos que o erro, a dúvida, a incerteza são pontos importantes para que possamos construir um conhecimento.

Portanto, acreditamos que o erro, a dúvida e a incerteza são elementos que surgem quando produzimos *significados*. Questionar nossas *verdades* nos permite essa produção, e essa *produção de significados* nos conduz a construção do *conhecimento*. E mais, <u>não</u> tratamos produção[8] e construção[9] como palavras sinônimas, e seus *significados* também <u>não</u> são, pois para nós a *produção de significados é um processo a partir do qual os conhecimentos vão sendo construídos*. Dessa forma, adotamos em nossa escrita pontuarmos *produção* quando falarmos em *significados* e *construção* quando falarmos em *conhecimento*.

Segundo Lins (2012) a maneira como construímos um *conhecimento* está relacionada à forma como compreendemos uma *enunciação*[10]. Mas, em que consiste o *conhecimento*? Lins (2012) defende que um *conhecimento* consiste em uma *crença-afirmação*, junto com uma *justificação*. O sujeito acredita em algo

---

[7] Segundo Chaves (2004) a ideia de batalha se configura como rever valores, ir além deles, *transvalorizar-se*.
[8] Consideramos produção: "ato de produzir ou o seu efeito; geração, criação" (HOUAISS, 2011, p. 760).
[9] Consideramos construção: "ação de reunir diferentes elementos, formando um todo" (HOUAISS, 2011, p. 226).
[10] Consideramos, a partir de Lins (2012), enunciação como algo que foi dito (falado ou escrito) por alguém.

(crença) que se caracteriza com uma afirmação que *justifica* sua *crença-afirmação*, e juntos (*crença-afirmação* e *justificação*) produzem, segundo o referencial supracitado, *conhecimento*.

Para um melhor entendimento a respeito de *conhecimento*, proposto pelo MCS, precisamos compreender os elementos constituintes: *crença*, *justificação* e o próprio *conhecimento*.

***Crença*** = acredita e age de acordo com o que acredita.

Logo, se afirmarmos que um número irracional não pode ser racional, não é coerente procurarmos um número irracional que possa ser escrito como razão de inteiros com denominador diferente de zero, característica esta de um número racional.

***Justificação*** = parte constitutiva do conhecimento.

Se afirmarmos que um número irracional não pode ser racional, essa *justificação* pode ser comprovada por meio de demonstrações[11]. Logo, a *justificação* não é apenas mais um elemento, mas sim, o elemento de comprovação que garante a legitimidade[12] daquilo que enunciamos.

***Conhecimento*** = Crença-afirmação e justificação.

Assim, ao afirmarmos que um número irracional não é racional, pois não pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$ com $m$ e $n$ inteiros e $n \neq 0$, estamos *justificando* uma *crença-afirmação*; isto é, construindo *conhecimento*.

Lins (2012) destaca que nenhum *conhecimento* vem ao mundo ingenuamente. "[...] Aquele que o *produz*, que o *enuncia*, já fala em uma direção (o *interlocutor*[13]) na qual o que ele diz, e com a justificação que tem, *pode ser dito*" (LINS, 2012, p. 13). Falamos na direção de um *interlocutor* e esperamos que o mesmo aceite e reproduza o que dizemos, utilizando a *justificação* que acreditamos.

---

[11] Ver em Caraça (1989, p. 49 - 50).

[12]Como destaca Lins (1999) a legitimidade não é função de algum critério lógico, e sim do fato que pertence a algum espaço comunicativo. Tomamos como legítimo algo que foi justificado, comprovado.

[13] Consideramos interlocutor como um ser cognitivo – imerso em uma cultura, com práticas culturais e sociais. Como destaca Lins (1999 e 2012), não propriamente uma pessoa, mas qualquer ser (como um livro) que faça com que o sujeito desenvolva o cognitivo.

Sad (1999, p.123) evidencia que “o conhecimento é algo do domínio da fala, da enunciação, que, uma vez admitida nos permite afirmar algumas coisas importantes em termos epistemológicos, as quais não eram até então bem explícitas [...]”. Assim, nenhum texto contém *conhecimento*, pois ali há apenas enunciados escritos por um *autor* que, ao serem lidos, são tomados como *resíduos de enunciações*[14] e é a partir da efetiva *enunciação* desses enunciados que parte do *conhecimento* é construído.

Nesse contexto podemos pensar que várias pessoas podem ler o mesmo texto e produzir ou não diferentes *significados*. Por exemplo, na afirmação *“número irracional é **todo** número que não é racional”*, muitos tomam como universo o conjunto dos números reais e justificam compreender que, no domínio dos reais, o número não racional é irracional. Por outro lado, alguém pode questionar se a $\sqrt{-1}$ (não racional) é um número irracional, pois pela afirmação, “*irracional é **todo** número que não é racional”*. Nesse caso, não estaria considerando apenas o domínio dos reais, visto que, não foi estabelecido isso na afirmação. No exemplo descrito, os sujeitos atribuíram diferentes *significados* ou até mesmo construíram diferentes *conhecimentos*, isso se dá pela *produção de significados*.

Quando *produzimos significados* e emitimos *enunciações* estabelecemos uma relação que a nosso olhar, e no contexto ao qual estão inseridas, se constitui como verdadeira. Mas, existe uma diferença quando falamos em *verdades*. No MCS, a *verdade* é atribuída ao *conhecimento* produzido, e o fato de ter sido *enunciado* na *direção* de um *interlocutor* se torna verdadeiro, mas isso não autoriza dizer que o que é afirmado seja *verdade*, no sentido de *verdade* “universal”.

Nesse contexto, Lins (1999) esclarece o fato do sujeito dizer algo e a garantia de poder dizer. Por exemplo: tomamos o caso de 2 + 3 = 5, podemos pensar que esta proposição é universal, porque dentro da nossa cultura e do processo de aprendizagem que fomos submetidos essa afirmação é verdadeira, e para nós não caberia dizermos que 2 + 3 ≠ 5; esta proposição seria falsa. Agora consideramos uma cultura onde as pessoas não quantificam acima de três, somente usando a ideia de muitos, “é possível argumentar, é claro, que se as pessoas que vivem nesta cultura soubessem o que representa os símbolos 2, 3, + e 5, elas concordariam [...]”

[14] Como propõe Lins (2012), resíduo de enunciação é o que resta de um processo, algo que acredito ter sido dito por alguém. Não é mais e nem menos que uma enunciação. Entendemos que textos e enunciados são resíduos de enunciação.

(Lins, 1999, p. 84), mas, se essas pessoas não conhecem esses símbolos e não sabem quantificar acima de três, a garantia da legitimidade universal da proposição 2 + 3 = 5 não pode ser tomada como verdadeira.

Pensamos nessa situação tomando como exemplo os números irracionais, como já descritos. Se falarmos que "*número irracional é **todo** número que não é racional*", para sujeitos que nem sequer pensam na existência de raízes de números negativos, essa afirmação é verdadeira, portanto, legítima. No entanto, se falarmos para sujeitos que possuem esse conhecimento, a palavra "todo" pode gerar conflitos, como já destacado.

Nessa vertente, Lins (1999, p. 84) descreve:

> Penso que há algo de extremamente revelador aqui: não admitir o não dizer como alternativa tanto a uma proposição quanto à sua negação, é praticar a política da caracterização do outro pela falta: se você não diz o (que eu já sei que é) correto é porque ainda não é capaz de entender (seja porque falta conteúdo, seja porque falta desenvolvimento intelectual).

A ideia de *produção de significados* concebida por Lins e utilizada por muitos pesquisadores e obras da área da Educação Matemática como Lins e Gimenez (1997), Sad (1999), Chaves (2001 e 2004), Silva (2003), Linardi (2007), Dantas (2007), Cyrino e Caldeira (2011), dentre outras, propõe que toda *produção de significados* implica construção de *conhecimento*. Nesse ponto de vista, "o aspecto central de toda aprendizagem – em verdade o aspecto central de toda a cognição humana – é a *produção de significados*" (LINS, 1999, p. 86).

> [...] significado é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 145-146).

Logo, o MCS admite uma perspectiva diferente, a de que o *conhecimento* construído pelo aluno pode não ser o mesmo construído e enunciado pelo professor; no entanto, ambos são considerados válidos. Daí, é preciso saber que significados o aluno está produzindo às *enunciações* emitidas pelo professor, para entender como o aluno constrói o seu *conhecimento*. Nessa perspectiva, o professor possui uma ideia daquilo que pensa ser *conhecimento*, mas que, por vezes, não passa de *crença-afirmação* e, embasado nessa *crença-afirmação* desenvolve sua prática pedagógica.

Quando um sujeito está diante de uma situação problema, sua atenção é direcionada àquela situação deforma que o próprio sujeito produza *significa do* para tal, ou seja, o sujeito constitui *objetos*[15] de pensamento a partir da situação. Quando o aluno é questionado (por alguma pessoa)a respeito de alguma situação-problema, ao refletir e falar sobre ela está produzindo *significado* e, assim, constituindo *objetos*.Comisso,queremosdizerquetalproblematizaçãodaráorigemàconstruçãode*conhecimento*,seja por meio da construção de novos paradigmas ou rupturas de outros. Sob este ponto de vista, podemos afirmar que o conhecimento não está na situação-problema, e sim no sujeito que se propõe a falar sobre determinada situação.

Sad (1999) ao analisar o *conhecimento* do aluno, procurando identificar as justificações em suas enunciações, destaca a necessidade de se observar cuidadosamente a formulação das atividades e a fala dos alunos ao discuti-las.

As justificações funcionam como *verdades* localmente absolutas as quais denominamos *estipulações locais* como propõe Lins (2012), pois, elas próprias não precisam ser justificadas. Seguindo a visão de Nelson Goodman[16], no que diz respeito às estipulações, buscamos em Bruner (1997) uma releitura:

> O mundo da aparência, o próprio mundo em que vivemos, é “criado” pela mente. A atividade de elaboração do mundo é, para Goodman, um conjunto diverso e complexo de atividades, e sejam quais forem as outras formas pelas quais ele se expressa, as mesmas envolvem a “elaboração não com mãos, mas com mentes, ou melhor, com linguagens ou outros sistemas de símbolos [...]”. Os mundos que criamos, segundo ele, podem surgir da atividade cognitiva do artista (o mundo de Ulisses e de Joyce) ou das ciências (seja visão geocêntrica do mundo da Idade Média ou da física moderna), ou da vida comum (como no mundo do juízo comum dos trens, couves e reis). Tais mundos (ele insiste) foram construídos, mas sempre a partir de outros mundos, criados por outros, os quais tomamos como dados. Não operamos em algum tipo de realidade primitiva independente de nossas próprias mentes ou das mentes daqueles que nos precederam ou nos acompanham (BRUNER, 1997, p.102).

A ideia de mundo construída por Goodmam retrata que não existem realidades definitivas, mas construções mentais designadas para um mundo específico, em um determinado contexto que não pode ser visto como único, uma vez que sempre nos deparamos com uma visão de mundo criada por outras pessoas da qual fazemos parte, de modo que algumas premissas tomadas como verdadeiras são chamadas

[15]“Objeto é aquilo para que se produz significado” (LINS, 2012, p. 28) ou ainda, “‘algo’ do qual o sujeito pode falar a respeito” (SAD, 1999, p. 126).
[16] Apud (LINS, 1999; SAD, 1999; SILVA, 2003).

*estipulações*. As *estipulações* são elementos na construção de mundo que consideramos para outras construções.

Quando falamos de número real, não relacionamos os possíveis *significados* que podem ser produzidos para este *objeto*, mas sim, o que num contexto preciso se diz efetivamente. Assim, as construções mentais nos permitem refletir o que é um número real por meio de construções criadas por outras pessoas, as quais, tomamos como verdadeiras, mas não necessariamente únicas.

Nesse contexto cabe uma reflexão, a de que o que construímos mentalmente ao nos depararmos com *enunciações*, está relacionado com o contexto no qual estas *enunciações* estão inseridas e com os *significados* que produzimos a elas.

Silva (2003, p. 75) faz uma releitura à noção de estipulação tratada por Lins e explica que:

> O real é uma construção mental na qual certas partes – as estipulações – ficam intocadas, de modo a produzir o efeito psicológico que descrevemos como realidade. A noção de estipulação, isto é, de tomar algo como dado, inspirou a noção de núcleo a partir da idéia de estipulações locais da seguinte maneira: no processo de produção de significados, existem algumas afirmações que a pessoa faz e que, tomando-as como absolutamente válidas, não sente necessidade de justificá-las. A essas crenças-afirmações, chamaremos de estipulações locais. E ao conjunto de estipulações locais constituídas no interior de uma atividade denominamos núcleo.

Por exemplo, se estou produzindo *significado* à definição de número racional, via medição de segmentos, é uma *verdade* localmente absoluta que um segmento medindo 1 (uma) unidade[17] de comprimento caiba um número inteiro de vezes em um segmento que mede 5 (cinco) unidades de comprimento. É possível que se possa produzir novos *significados* matemáticos para esta afirmação se acontecer do segmento medir $\sqrt{2}$, pois não temos a mesma unidade de comprimento cabendo um número inteiro de vezes, nesse caso, não temos uma *verdade* localmente absoluta que um segmento medindo 1 (uma) unidade de comprimento caiba um número inteiros de vezes em um segmento que mede $\sqrt{2}$, pois o núcleo da atividade é o conjunto dos números racionais. Agora se estivéssemos produzindo *significado* à definição de número irracional, teríamos outra *estipulação* local, como exemplo, a incomensurabilidade de segmentos, para constituir o *núcleo*.

[17] Adotamos 1 (uma) unidade como unidade de medida de comprimento.

Como destaca Lins (1999) são as *estipulações locais* que vão constituir o *núcleo* de um *campo semântico*. “A um conjunto de estipulações locais que, num dado momento e dentro de uma atividade, estão em jogo, chamo de núcleo” (LINS, 1999, p. 87).

Observamos que, nos processos de ensino e de aprendizagem da definição de números racional, irracional e real, a forma como são abordados no sentido de “transmissão de um conceito”[18], pode levar o *núcleo* de um *campo semântico* a constituir estipulações não unidas ou relacionadas a uma justificação.

Por exemplo, para a construção do campo racional uma das atividades proposta foi: *Construa dois segmentos de reta* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *de forma que* $\overline{CD}$ *caiba um número inteiro de vezes em* $\overline{AB}$*. Como escrever* $\overline{AB}$ *em relação à*$\overline{CD}$*? E como escrever* $\overline{CD}$ *em relação à*$\overline{AB}$*?*

Ao desenvolverem esta atividade, observamos que os estudantes produziram suas enunciações (ao verbalizarem) e enunciados (ao grafarem) a algumas *estipulações locais*. Percebemos isso em falas, como:

“*Construo um segmento de 8 cm com a régua. Agora construo um outro segmento com 2 cm de comprimento, daí* $\overline{AB}$ *= 4* $\overline{CD}$ *e* $\overline{CD} = \frac{1}{4}\overline{AB}$” (*Sujeito X*)[19].

Aqui o sujeito poderia estar relacionando a *estipulações locais* geométricas (observamos isso por meio da ideia de construção de segmentos) ou a *estipulações locais* de medidas (observamos isso na medida de cada segmento, com o intuito de exprimir $\overline{CD}$ com um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$) ou ainda, a *estipulações locais* algébricas (observamos isso na escrita de $\overline{CD}$ em função de $\overline{AB}$), assim temos os *campos semânticos* geométrico, algébrico ou de medidas, por exemplo. Portanto, vários *campos semânticos* podem ser evidenciados na *produção de significados*, mas o *campo semântico* que evidenciamos pode não ser o mesmo no qual o sujeito está operando.

---

[18] Aqui destacamos o ensino mecanizado, aquele que o professor “ensina” a definição para o aluno como se estivesse formulando um conceito, sem o uso de nenhuma construção ou justificação dos porquês de tais definições, dentro de um ambiente de aprendizagem definido por Skovsmose (2000), e discutido por Chaves (2004), como paradigma do exercício, ambiente onde se processam verdades cristalizadas de forma linear, evolutiva e absoluta para em sequência aplicar em exercícios.

[19] Denominamos por *Sujeito X* um dos alunos participantes da pesquisa.

As *estipulações locais* podem estar relacionadas em um mesmo núcleo, bem como a um mesmo *campo semântico* (CS). Isso destaca a importância de analisarmos as *enunciações* emitidas pelos alunos, os *significados* produzidos em suas escritas e falas.

> Em seu domínio didático-pedagógico, o professor procura estratégias de organização das atividades dos alunos, de valoração de certas atitudes e de determinados discursos, sempre tendo em mente demandas que, (entre outras coisas) faz produzir significados em certos CS e a querer que o aluno também produza significados em CS análogos. Além do mais, pensando em termos de aprendizagem efetiva do aluno, o professor quer que o aluno além de tomar como legítimo um certo modo de pensar, também passe a dominá-lo [...] (SAD, 1999, p. 129).

Essa é uma atitude complexa, visto que cada sujeito diante de uma situação ou ao se deparar com *resíduos de enunciação* produzirá *significados* para tal, que se tornarão *crenças* que *justificadas* constroem *conhecimento*. Mas, essas *crenças* não são necessariamente aquelas que o professor constituiu por meio da sua *produção de significados*. O aluno constitui suas próprias *crenças*. Assim, constitui seus próprios *campos semânticos*.

Nesta pesquisa, o mais importante a se compreender, que é proposto pelo MCS, é a ideia de que todo *conhecimento* construído pelo aluno tem *significado*(s) e que na análise desse (s) *significado*(s) a procura não está em analisar erros, pelo contrário, está em refletir a respeito de como o aluno constrói *conhecimento* àquilo que o professor ensina. Essa análise permite ao professor refletir também sobre sua prática pedagógica.

## 3.2 CAMPO SEMÂNTICO (CS)

Conforme propõe Lins (2012, p. 17), *campo semântico* é “um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade”. O CS não segue uma regra geral, é diferente em cada situação, pode mudar a todo o momento e ser diferente para cada pessoa. Imagine que existam pessoas falando sobre número real, e que elas falam de “*união dos racionais com os irracionais”*. Parece-nos que estão operando em um CS que tem em seu *núcleo*, neste contexto, um conceito para o conjunto dos números reais. Denominar esse CS pode ser problemático, porque a relação estabelecida pode levar a se pensar em um campo conceitual, algo que o CS não é, pois “um campo semântico indica um modo legítimo de produção de significado. Legítimo porque está acontecendo” (LINS, 2012, p. 18), algo que está em processo e, portanto, dinâmico, em curso, e, consequentemente, não estático ou estabelecido. Está sempre relacionado a um contexto, serve para articular a produção de *significado* e a constituição de *objetos*.

> Um campo semântico, *de modo geral*, é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores *dentro de limites*; que limites são estes, só sabemos *a posteriori*: enquanto a interação contínua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico (LINS, 2012, p. 17).

Assim, Lins (1999) destaca que como intenção didática é válido constituir CS denominados, do tipo: *campo semântico* de segmentos incomensuráveis, *campo semântico* do conjunto dos números reais, *campos semânticos* geométricos, dentre outros. Mas, como destaca Lins (2012), dar nome a um CS ajuda a construir a permanência da realidade; porquanto, desenvolve um processo de fixação, e isso pode contrariar a intenção didática ou o entendimento epistemológico.

No entanto acreditamos que destacar *estipulações locais* em campos semânticos do tipo, mas sem tomá-las como únicas, contribuem para evidenciar que significados matemáticos são produzidos dentro do CS. Nesse viés, optamos por trabalhar com esse direcionamento.

## 3.3 ESPAÇOS COMUNICATIVOS

Como já destacado no MCS, *conhecimento* é o domínio da *enunciação*, pois não há *conhecimento* no que está escrito, ali há apenas *resíduos de enunciações*. Somente por meio da *enunciação* desses enunciados que o *conhecimento* será construído.

Nesse sentido, é estabelecido um *espaço comunicativo* ou espaços comunicativos, tomado(s) como processo(s) de interação onde os *interlocutores* são compartilhados. Segundo Lins (2012, p. 24) "numa inversão conceitual, 'comunicação' não corresponde a algo do tipo 'duas pessoas falando uma para outra', e sim a 'dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor'".

A aparência da realização da comunicação não demonstra a efetivação concisa de um *espaço comunicativo,* por isso que precisamos analisar que *significados* matemáticos estão sendo produzidos pelos alunos. É o que ocorre no exemplo: imagine que um aluno em uma aula de Matemática ao ser questionado pelo professor sobre qual o resultado da soma de 3 laranjas com 4 abacaxis, responda que a soma não tem solução. Porém, o professor esperava como resultado, 7 frutas. Ao analisar a resposta do aluno percebemos que ele se apoia no fato que não se pode somar coisas diferentes em uma visão particular de fatores; já o professor, estabeleceu uma visão do *significado* da generalização dos fatores da operação.

A partir de uma releitura a obra de Lins (1999 e 2012), constatamos que nesse caso, o professor não "leu" o aluno, o que nos remete a dizer, a partir do MCS, que existem visões e conceitos distintos, que podem surgir de crenças diferentes, utilizando até mesmo justificações díspares, mas isto não caracteriza um erro em nenhuma das respostas; demonstra tão-somente, mais uma vez, que nos processos de ensino e de aprendizagem nem sempre é estabelecido um *espaço comunicativo*.

Ao enunciar algo preciso estabelecer uma relação de comunicação com o aluno para quem enuncio, pois muitos *significados* serão produzidos e muitos sentidos serão atribuídos às *enunciações*. Dessas observações destacamos como é constituído um *espaço comunicativo* no MCS.

A *enunciação* é produzida pelo *o autor* que fala na direção de *um leitor*, constituído pelo *o autor*. Por sua vez, *o leitor* produz *significado* para a *enunciação* e fala na direção de *um autor*, constituído pelo *o leitor*. Para melhor compreendermos, observamos os processos constituídos por Lins (1999):

O AUTOR ⟶ TEXTO ⋯→ UM LEITOR

O pontilhado destaca que "é na construção do autor que '*a transmissão'* existe, e o fato crucial é que toda *enunciação* deve ser dirigida a alguém, a que chamarei de *interlocutor*" (LINS, 1999, p. 81).

Dessa forma, quando lecionamos estamos enunciando algo em direção de alguém (um leitor: os alunos), e este alguém (interlocutor) quando "lê" e interpreta, está produzindo *significados* às *enunciações* e assim construindo *conhecimento*.

No próximo processo, o pontilhado indica uma transmissão concebida na visão do leitor. "Na medida em que o leitor fala, isto é, produz significado para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leitor" (LINS, 1999, p. 82).

UM AUTOR ⇢ TEXTO → O LEITOR

> O sujeito cognitivo se encontra com o que acredita ser um *resíduo de enunciação*, isto é, *algo* que acredita que foi dito por *alguém* (um autor). Isto coloca uma demanda que é atendida (esperançosamente) pela produção de significado de o autor em que se tornou o leitor. O autor-leitor fala na direção do um autor que aquele constitui; o um autor é o *interlocutor* (um ser cognitivo) (LINS, 2012, p. 15).

Pensando nos dois processos, Lins (1999 e 2012) enfatiza que na medida em que nos colocamos na posição de o *autor* e de o *leitor* em cada esquema, os pontilhados desaparecem, deixando a sensação psicológica de comunicação efetiva.

Nessa perspectiva, o processo seria representado assim:

AUTOR → TEXTO → LEITOR

Mas, se o sentimento de comunicação efetiva é apenas fruto de uma sensação psicológica, o que deve acontecer para que entendamos uns aos outros? A essa questão Lins (1999, p. 82) responde da seguinte forma:

> A convergência se estabelece apenas na medida em que [autor e leitor] compartilham interlocutores, na medida em que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um espaço comunicativo: não é necessária a transmissão para que se evite a divergência.

Nessa prerrogativa observamos que a comunicação é estabelecida quando *o autor* e *o leitor* se encontram em um mesmo *espaço comunicativo*, em outras palavras: utilizam uma mesma linguagem que torna possível a comunicação entre eles. Por exemplo, Lins (1999) destaca a visão do matemático e de uma criança ao resolver 2 + 3 = 5. A criança diria, porque juntando dois dedos com três dedos dá cinco; já o matemático justificaria usando o axioma de Peano. Nesse caso, para que o matemático compartilhe um espaço comunicativo com a criança, é necessário que torne como legítimo a ideia do juntar dedos.

De acordo com esta perspectiva, durante todo o processo de comunicação são relacionados três elementos fundamentais: *autor*, *texto* e *leitor*, de modo que cada um possui um direcionamento no espaço comunicativo, como já descrito. Nesse sentido, Silva (2003, p.62) enfatiza:

> O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações como, por

> exemplo, o aluno que, assistindo à aula, busca entender o que o professor diz, o crítico de arte ou o leitor do livro. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado.

Nesse processo, "[...] o que faz do texto o que ele é, é a crença do leitor que ele é, de fato, resíduo de uma enunciação, ou seja, um texto é delimitado pelo leitor; além disso, ele é sempre delimitado no contexto de uma demanda de que algum significado seja produzido para ele" (LINS, 2001, p. 59).

Portanto, tomando como base essa visão de *espaço comunicativo*, nossa análise ocorre da seguinte maneira: as *enunciações* efetivadas pelos *autores* (que estudamos para descrevermos a construção dos números reais) chegam até nós (os leitores-pesquisadores) como *resíduos de enunciações* que se constituem em *texto* a partir de nossa *produção de significados*, que novamente resulta em *resíduo de enunciação*. Ao enunciarmos para os sujeitos da pesquisa (alunos da Licenciatura em Matemática), estes produzirão *significados* (constituindo textos), que se tornarão, a princípio, *resíduos de uma enunciação*. Quando os sujeitos da pesquisa enunciarem seus *significados* produzidos, aos leitores-pesquisadores, estes, produzirão *significados* que se constituem em *texto*, que estarão descritos nessa dissertação, como *resíduos de enunciação*, para o qual o *leitor* dessa dissertação produzirá *significado*.

Nesse viés, nas prerrogativas do *espaço comunicativo* descrito por Lins dentro do MCS, é que Chaves (2004, p. 12) enfatiza,

> [...] que nossos entendimentos das leituras que realizamos se processam de forma que *os autores* chegam até nós (*o leitor*) como resíduos de enunciações, que se constitui em texto a partir de nossa produção de significados, que novamente resulta em resíduo de enunciação.

Assim, pensamos que, quando entendemos uma *enunciação* (não necessariamente da mesma forma que o autor propôs, mas em nossa perspectiva, de acordo com nossa compreensão), estamos *produzindo significados* e, ao enunciá-los, novos *leitores* produzirão *significados* que poderão estar de acordo ou não com o nosso.

Em síntese, nesta pesquisa somos *autores* e *leitores*, os sujeitos da pesquisa são *autores* e *leitores*. Na medida em que construímos os campos numéricos, como *autores*, os sujeitos são os *leitores*, como participantes desta construção; os *leitores* se tornam *autores* e nós nos tornamos *leitores*, e na medida em que mostramos os resultados de nossas reflexões acerca dos *significados* matemáticos que os sujeitos produziram, nós nos tornamos *leitores* e *autores*, e assim segue o processo, como se estivéssemos em um ciclo; ora *autores*, ora *leitores*.

# 4 FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

A proposta de investigar e de fazer parte do processo de produção de significados matemáticos na construção dos números reais indicou, segundo o referencial teórico adotado, que o material de investigação e análise é composto primordialmente de: "enunciações dos sujeitos". Esse fato justifica algumas opções, conforme descrito a seguir.

Para a realização dessa pesquisa optamos por adotar uma metodologia com abordagem qualitativa, nos moldes da pesquisa-ação, com a pretensão de intervir e refletir a respeito dos paradigmas existentes nos processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais, mais especificamente, na formação inicial do professor de Matemática.

Na organização desta dissertação privilegiamos todas as ações desenvolvidas ao longo da pesquisa, com o objetivo de caracterizarmos a pesquisa-ação. Sendo uma área de grande discussão, abordamos a pesquisa-ação nos sentidos apresentados por Barbier (2012), Thiollent (2011) e Chaves (2001).

## 4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Antes de iniciarmos nossa pesquisa refletimos a respeito de qual metodologia usar e como proceder enquanto pesquisadores. Nossa preocupação estava alicerçada no fato de que não era nossa vontade desenvolver uma pesquisa tão-somente como observadores. Precisávamos de algo que sustentasse o envolvimento dos pesquisadores e dos sujeitos da pesquisa de forma participativa, comprometida com a ação e, sobretudo, com a *transvalorização.* Os sujeitos precisavam também ser protagonistas da pesquisa. Não queríamos limitar nossa investigação aos aspectos acadêmicos, em busca de relatórios a serem arquivados, pretendíamos desempenhar um papel ativo e transformador nas atividades de campo, sem com isso desrespeitar a produção de significados. Entendemos que somente com tal grau de parceria obteríamos leituras amplas dos fatos observados. Por isso as fases do desenvolvimento precisavam ser construídas coletivamente.

Partindo dessa vontade buscamos um tipo de pesquisa que pudesse nos fornecer tal suporte. Encontramos isso na pesquisa-ação.

Quando iniciamos os estudos a respeito desse tipo de pesquisa percebemos que existia uma semelhança entre a pesquisa-ação e a pesquisa participante. Precisávamos distingui-las e verificarmos se realmente o método a ser usado poderia ser considerado pesquisa-ação. Então, iniciamos um estudo estabelecendo parâmetros entre possíveis similaridades e diferenças da pesquisa-ação e da pesquisa participante.

O ponto de partida foi uma análise de como pensávamos proceder com a pesquisa. Qual ação a ser desenvolvida, qual ou quais grupo(s) evidenciado(s), os objetivos, os possíveis obstáculos e quais conhecimentos a serem construídos em função dos problemas encontrados na ação ou entre os sujeitos envolvidos. Para tal, analisamos quais os sujeitos da pesquisa que possibilitariam um envolvimento com o tema de forma cooperativa e construtiva. Considerando a dimensão na qual a problemática está inserida – na formação inicial do professor de Matemática – escolhemos como sujeitos alunos da Licenciatura em Matemática. Ao realizarmos uma releitura da obra de Chaves (2001) constatamos que na esfera educacional, no viés da pesquisa-ação, todos os envolvidos, desde a composição da problemática até a finalização com análises dos resultados, constituem-se colaboradores e participantes ativos da pesquisa. Assim, podemos considerar como colaboradores:

(*i*) Professores e alunos do grupo GEPEMEM – Construção dos Números Reais;

(*ii*) Os sujeitos da pesquisa – alunos da Licenciatura em Matemática do IFES, *campus* Vitória;

(*iii*) O pesquisador trabalhando cooperativamente no grupo de pesquisa;

(*iv*) Um ou mais professores trabalhando juntos com um ou mais pesquisadores em um projeto.

Para caracterizarmos o tipo de pesquisa traçamos alguns procedimentos ou como retrata Chaves (2001), os estágios de desenvolvimento na área educacional. São eles:

(1) Identificação, avaliação e formulação do problema percebido como crítico em uma dada situação diária de ensino;

(2) Revisão bibliográfica e estudos comparativos;

(3) Discussão preliminar e negociações entre as partes envolvidas (diretor, coordenador de curso, orientador da pesquisa, professor, sujeitos da pesquisa) resultando num esboço de proposta;

(4) Modificação ou redefinição do problema do início da pesquisa;

(5) Escolha dos procedimentos de pesquisa;

(6) Escolha dos métodos de análise;

(7) Implementação;

(8) Interpretação dos dados, inferências e plenária.

Com os procedimentos descritos realizamos uma análise buscando em Thiollent (2011), evidências que comprovassem realmente que a nossa pesquisa se tratava de uma pesquisa-ação. Com base em tal obra ficou evidente a existência da diferença entre a pesquisa-ação e a pesquisa participante. A pesquisa-ação "supõe uma forma de ação planejada de caráter social, educacional, técnico ou outro, que nem sempre se encontra em propostas de pesquisa participante" (THIOLLENT, 2011, p. 13 - 14), e "[...] é distinguida da pesquisa participante pelo fato de focalizar ações ou transformações específicas que exigem um direcionamento bastante explicitado" (THIOLLENT, 2011, p. 84). Em concordância Chaves (2001) destaca que toda pesquisa-ação é participativa, mas nem toda pesquisa participante é pesquisa-ação ou como colocamos no GEPEMEM, a partir dessa leitura: uma pesquisa participante é condição necessária, mas não suficiente à pesquisa-ação. Dessa forma, segundo Thiollent (2011) toda pesquisa-ação é do tipo participativo, pois a participação das pessoas envolvidas nos problemas investigados é absolutamente necessária. No entanto, tudo o que é considerado pesquisa participante não é pesquisa-ação. Além disso, a pesquisa-ação consiste em:

> [...] organizar a investigação em torno da concepção, do desenrolar e da avaliação de uma ação planejada. Nesse sentido, pesquisa-ação e pesquisa participante não deveriam ser confundidas [...]. Além disso, a participação dos pesquisadores não deve chegar a substituir a atividade própria dos grupos e suas iniciativas (THIOLLENT, 2011, p. 22).

Nessa vertente, nossa pesquisa está relacionada ao contexto da pesquisa-ação, pois a escolha dos sujeitos se deu justamente pela necessidade da participação cooperativa e construtiva dos envolvidos no desenvolvimento, e pela evidência da problemática na formação inicial do professor de Matemática.

Algumas vezes a pesquisa participante é confundida com a pesquisa-ação e vice-versa, porque em alguns casos, a pesquisa participante é:

> [...] um tipo de pesquisa baseado numa metodologia de observação participante na qual os pesquisadores estabelecem relações comunicativas com pessoas ou grupos da situação investigada com o intuito de serem melhor aceitos. Nesse caso, a participação é sobretudo participação dos pesquisadores e consiste em aparente identificação com os valores e os comportamentos que são necessários para a sua aceitação pelo grupo considerado (THIOLLENT, 2011, p. 21).

Essa definição para a pesquisa participante gerou dúvidas em relação ao tipo de pesquisa que estávamos utilizando, pois todos os elementos descritos seriam usados por nós. Mas, percebemos que estava faltando algo, pois queríamos desenvolver uma ação conjunta com os sujeitos da pesquisa a respeito do problema observado. Então, encontramos em Thiollent (2011) o complemento que buscávamos, ao relatar que uma pesquisa pode ser qualificada como pesquisa-ação desde que a ação seja uma ação problemática que precisa de uma investigação para ser elaborada e conduzida. Isto é:

> A ação corresponde ao que precisa ser feito (ou transformado) para realizar a solução de um determinado problema. Dependendo do campo de atuação e da problemática adotada, existem vários tipos de ação, cuja tônica pode ser educativa, comunicativa, técnica, política, cultural etc. [...].
> As implicações da ação aos níveis individuais e coletivos devem ser explicitadas e avaliadas em termos realistas, evitando criar falsas expectativas entre os participantes no que diz respeito aos problemas da sociedade global (THIOLLENT, 2011, p. 80 - 81).

A ação nessa pesquisa é construir o conjunto dos números reais com os alunos da Licenciatura em Matemática, na busca de produzir significados que possam contribuir para a compreensão de como são definidos os números racional, irracional e real. Essa ação de cunho educacional, desenvolvida coletivamente, foi elaborada durante o desenvolvimento da pesquisa.

O ponto de partida foi traçado e embasado especificamente pelas ideias apresentadas na obra de Caraça (1989), porém, durante a pesquisa, o desenvolvimento tomou outros rumos, novas ideias de construção e outros olhares para a construção das definições surgiram. A perspectiva de solucionar o problema se evidenciou no grupo investigado e não numa ação global para solucioná-lo em todas as Licenciaturas em Matemática. No entanto, os procedimentos utilizados bem como o embasamento teórico seguido, produziram o que chamamos de produto final – a oficina – para uso na formação inicial e continuada de professores de Matemática.

Assim, por meio dessas fundamentações caracterizamos nossa pesquisa como uma pesquisa-ação no que diz respeito à organização da investigação, à escolha dos sujeitos, aos processos de desenvolvimento, à perspectiva de solução do problema, à análise e à interpretação dos resultados.

## 4.2 A PESQUISA-AÇÃO

Concebida como método[20] pelo fato de ser vista como um caminho que relaciona conhecimento e ação ou que constitui conhecimento a partir da ação, a pesquisa-ação tem se fortalecido nas últimas décadas e tem se tornado “[...] um quadro de referência metodológico em projetos e programas sociais de grande porte, apoiado por reitorias e órgãos do poder público” (THIOLLENT, 2011, p. 8). Alguns defensores da metodologia convencional[21] divulgam a ideia de que esse tipo de pesquisa não teria credibilidade, pois caminha para o lado sentimental ou de vivência. Sobre isso nos fundamentamos em Thiollent (2011, p. 35) que retrata essa visão como equivocada, uma vez que:

> [...] a pesquisa não perde a sua legitimidade científica pelo fato dela estar em condição de incorporar raciocínios imprecisos, dialógicos ou argumentativos acerca de problemas relevantes [...]. Processar a informação e o conhecimento obtidos em situações interativas não constitui, em si mesmo, uma infração contra a ciência social.
> [...] Não há pesquisa sem raciocínio. Quando não queremos pensar, raciocinar, conhecer algo sobre o mundo circundante, é melhor não pretendemos pesquisar. Além disso, quando queremos interferir no mundo precisamos de conceitos, hipóteses, estratégias, comprovações, avaliações e outros aspectos de uma atividade intelectual.

A nosso ver algumas definições dadas por Thiollent (2011) permitem entender o que é o método da pesquisa-ação e o tipo de pesquisa que se caracteriza. São elas:

> O método de pesquisa-ação consiste essencialmente em elucidar problemas sociais e técnicos, cientificamente relevantes, por intermédio de grupos em que encontram-se reunidos pesquisadores, membros da

---

[20] Consideramos método no sentido dado por Thiollent (2011, p. 8), “é o caminho prático da investigação”.

[21] Na pesquisa convencional “não há participação dos pesquisadores junto com os usuários ou pessoas da situação observada, [...] o usuário é mero informante, e ao nível da ação ele é mero executor” (THIOLLENT, 2011, p. 25).

> situação-problema e outros atores e parceiros interessados na resolução de problemas levantados ou, pelo menos, no avanço a ser dado para que sejam formuladas adequadas respostas sociais, educacionais, técnicas e/ou políticas (p. 7).
> A pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (p. 20).
> Do ponto de vista científico, a pesquisa-ação é uma proposta metodológica e técnica que oferece subsídios para organizar a pesquisa social aplicada sem os excessos da postura convencional ao nível da observação, processamento de dados, experimentação etc. Com ela se introduz uma maior flexibilidade na concepção e na aplicação dos meios de investigação concreta (p. 30).

Os grupos escolhidos constituem parte representativa dos sujeitos aos quais a problemática foi evidenciada – grupo de licenciandos em Matemática. Desenvolvida na formação inicial do professor de Matemática, esta pesquisa caracteriza-se como uma pesquisa social no âmbito educacional.

Barbier (2012) incrementa algumas fundamentações a respeito da pesquisa-ação. Tal texto defende que a pesquisa-ação reconhece que o problema nasce num contexto preciso, de um grupo em crise.

> O pesquisador não o provoca, mas constata-o, e seu papel consiste em ajudar a coletividade a determinar todos os detalhes mais cruciais ligados ao problema, por uma tomada de consciência dos atores do problema numa ação coletiva (BARBIER, 2012, p. 54).

Assim, no método descrito, o pesquisador se torna um mediador do processo de pesquisa e não mais o agente centralizador de verdades produzidas. "Seu papel consiste em criar as condições favorecendo uma análise de conjunto do problema em questão e uma tomada de consciência das condições que o criam" (BARBIER, 2012, p. 56 - 57). Dessa forma, permite aos participantes expressarem o que observam da realidade do objeto de estudo. Nesse sentido que direcionamos nossa pesquisa: mediamos o processo de forma coletiva, propomos o tema de estudo e a bibliografia base, no caso a obra de Caraça (1989), mas não tomamos somente o processo desenvolvido nessa obra como verdade absoluta. Isto é, durante o processo de pesquisa propusemos uma análise conjunta do problema, onde os sujeitos da pesquisa descreviam suas ideias acerca do estudo em questão.

Nessa prerrogativa Thiollent (2011, p. 21 - 22) destaca que:

> Na pesquisa-ação os pesquisadores desempenham um papel ativo no equacionamento dos problemas encontrados, no acompanhamento e na

> avaliação das ações desencadeadoras em função dos problemas. Sem dúvida, a pesquisa-ação exige uma estrutura de relação entre pesquisadores e pessoas da situação investigada que seja do tipo participativo. Os problemas de aceitação dos pesquisadores no meio pesquisado têm que ser resolvidos no decurso da pesquisa. Mas a participação do pesquisador não qualifica a especificidade da pesquisa-ação, que consiste em organizar a investigação em torno da concepção, do desenrolar e da avaliação de uma ação planejada [...].

A ação do pesquisador, inicialmente individual, é direcionada de forma a buscar a ajuda coletiva dos sujeitos do grupo, caracterizado de acordo com a afinidade ao que está sendo investigado. Se estamos tratando de um tema cuja problemática permeia a formação inicial do professor de Matemática, cabe a nós, pesquisadores, desenvolvermos nosso estudo com alunos de Licenciatura em Matemática.

Na pesquisa-ação precisamos envolver os sujeitos participantes de forma a atuarem também como pesquisadores. Isso significa chamá-los a uma reflexão, à socialização, à análise cooperativa, à construção de ideias e a reflexão coletiva, que julgamos necessárias a quaisquer mudanças. Isso nada mais é do que a função política da pesquisa-ação. Sobre esse contexto Thiollent (2011, p. 51 - 52) retrata que:

> A função política da pesquisa-ação é intimamente relacionada com o tipo de ação proposta e com os atores considerados. A investigação está valorativamente inserida numa política de transformação. Podemos definir vários aspectos da função política, dependendo de organização e de autonomia dos grupos participantes. Quando o grupo possui uma ampla autonomia na conduta de suas ações, a pesquisa exerce a função de fortalecê-la. A produção de informação e a aplicação do conhecimento são orientadas para isso [...].

O pesquisador nessa modalidade coloca-se como elemento que faz parte do contexto e da situação que está em estudo, não apenas como um observador, mas também como sujeito da própria pesquisa. Sua interação com o meio somada à relação estabelecida com os sujeitos constituem material importante para a pesquisa.

Quando propomos a construção do campo real, por exemplo, como pesquisadores, estamos iniciando o delineamento de um caminho a ser seguido, mas não propriamente os rumos que serão tomados ao longo da construção. Como pesquisadores e sujeitos da pesquisa constituímos uma relação de cooperação mútua, onde todos os sujeitos envolvidos na problemática observam, desenvolvem, apontam novos caminhos, interpretam e ajudam no direcionamento do estudo. Os sujeitos são membros conscientes que colaboram com os pesquisadores sem receio de criar novas situações, objetivando a construção do conhecimento.

Com o embasamento teórico descrito, mais uma vez evidenciamos que nossa pesquisa não poderia ser caracterizada apenas como pesquisa participante, pois, apesar de possuir traços da participante, outros aspectos existentes somente na pesquisa-ação foram detectados. Quando propusemos as respectivas construções dos campos racional, irracional e real, coletivamente trouxemos à tona no ambiente pesquisado, por meio de reflexões, a problemática de que muitas vezes professores de Matemática têm dificuldades em descrever como foi construída a definição desses números. Evidenciamos com os sujeitos da pesquisa um problema que se caracteriza no âmbito educacional no qual estão inseridos. Quando buscamos a ênfase de processos de ensino e de aprendizagem direcionados a uma construção do conhecimento com o intuito de proporcionar produção de significados, comprovamos a possibilidade da resolução de um problema coletivo por meio de uma ação mútua. Quando apresentamos aos sujeitos da pesquisa nossas reflexões acerca dos resultados e solicitamos uma reflexão conjunta sobre essa análise, evidenciamos o problema e buscamos soluções. Todas essas características constituem a pesquisa-ação.

Por outro lado, a pesquisa não foi instigada pelo grupo especificamente em crise, pois a problemática foi pensada antes da escolha dos sujeitos da pesquisa. No entanto, foi constatada a existência dessa problemática também no grupo em questão, após iniciarmos a pesquisa, o que, a nosso ver, também caracteriza uma pesquisa do tipo *ação* uma vez que, “[...] pessoas ou grupos são escolhidos em função de sua representatividade social dentro da situação considerada” (THIOLLENT, 2011, p. 71).

Outro aspecto que nos motivou a alicerçarmos nosso trabalho nesse viés advém de Chaves (2001, p. 200 - 201):

> Historicamente o professor de Matemática é apresentado com o estereótipo de insensível, centralizador, dono da verdade etc. Posicionamento herdado da época em que o foco do processo educacional centrava-se no professor e no conteúdo, que era apresentado de forma hermeticamente expositivista, sendo o aluno um ouvinte passivo [...] posições assim não sintonizam com as novas tendências e necessidades de mudanças, pois inibem a visão do papel social do educador, impedindo-o de desenvolver a capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares e de exercer liderança. A

> introspecção exigida na manutenção de uma Matemática escolar excludente, que funciona como um filtro social ofuscam a visão histórica e crítica da Matemática nas várias fases de sua evolução, o que impede que se desenvolva a capacidade de estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, despertando o hábito do estudo independente e a criatividade dos alunos.

É exatamente na construção conjunta e participativa que pensamos quebrar a peculiar introspecção que circunda as atividades de estudo e planejamento do docente em Matemática. Nessa dinâmica de produção coletiva e participativa, pautamos as ações a partir do GEPEMEM: Construção dos Números Reais, onde buscamos o processo coletivo às análises e discussões. Chaves (2001) também destaca a relevância da participação de professores de Matemática que lidam com os Ensinos Fundamental e Médio junto aos Grupos de pesquisa-ação em Educação Matemática, e, chama atenção para mudanças significativas na prática docente dos mesmos, ressaltando a "dimensão do professor como profissional autônomo e reflexivo" (CHAVES, 2001, p. 201). Dessa forma, ele descreve que:

> A sistemática do conjunto de ações desenvolvidas pelo professor no ciclo de ***discussão em grupo sobre um problema* ↔ *planejamento de uma ação diferencial para atacar esse problema* ↔ *aplicação conjunta* (*professor + monitor/licenciando + aluno*) *da ação diferencial planejada* ↔ *discussão da ação realizada* ↔ *replanejamento*** [...] caracterizam mudanças substanciais proporcionando a licenciandos e professores a compreensão da matemática como uma disciplina de investigação, onde o avanço se dá como consequência do processo de investigação de problemas [...] (CHAVES, 2001, p. 201).

Na perspectiva de inspirarmos professores e futuros professores de Matemática a repensarem e replanejarem suas práticas a partir dos processos de elaboração, reflexão e discussão coletivas e com o propósito de quebra da inércia das ações que mantêm a Matemática como filtro social, desenvolvemos nossas ações de estudo coletivo a respeito do tema com os componentes do GEPEMEM: Construção dos Números Reais e com os alunos da Licenciatura em Matemática.

## 4.3 O LEVANTAMENTO E A ANÁLISE DOS DADOS

Um elemento primordial para esta modalidade de pesquisa é a análise dos dados. Não é apenas o pesquisador que os analisa e interpreta, mas todos os sujeitos envolvidos. Existe o que denominamos de plenária: na qual analisamos e refletimos os resultados da pesquisa, apresentando aos sujeitos envolvidos para que possam fazer também suas reflexões, concordando ou discordando das análises descritas pelos pesquisadores. Em relação à plenária Barbier (2012) destaca que:

> Na pesquisa-ação, os dados são retransmitidos à coletividade, a fim de conhecer sua percepção da realidade e de orientá-la de modo a permitir uma avaliação mais apropriada dos problemas detectados. O exame dos dados visa redefinir o problema e encontrar soluções. [...] A interpretação e a análise são o produto de discussões de grupo. Isso exige uma linguagem acessível a todos. O traço principal da pesquisa-ação – o *feedback* – impõe a comunicação dos resultados da investigação aos membros envolvidos, objetivando a análise de suas ações (BARBIER, 2012, p.55).

Nesse sentido, a escrita e os apontamentos dos resultados são coletivos. Ao descrevermos sobre os significados matemáticos produzidos para a definição do campo real, por exemplo, descrevemos nossas concepções enquanto pesquisadores, o que observamos e o que compreendemos das falas e escritas dos sujeitos. Porém, nem sempre a nossa percepção estava de acordo com a percepção do grupo ou com todos os sujeitos. Por isso a importância da análise das ações, da produção de significados. Por exemplo: se um sujeito não justificou o porquê de uma determinada definição podemos pensar que ele não possui este conhecimento. No entanto, o próprio sujeito pode destacar que, o fato de não ter justificado está ligado à maneira como definiu. Por ser tão clara sua definição, fica implícita sua justificação. Assim, observamos diversos olhares em uma produção de significados. Dessa forma, faz-se necessário uma escrita coletiva.

Sobre a escrita coletiva, Barbier (2012, p. 105) enfatiza que “faz parte da credibilidade da pesquisa-ação que a escrita seja coletiva. Os escritos são submetidos à leitura e à discussão de todos”. Na pesquisa em questão os dados, obtidos após análise de questionários e gravações de áudio, foram apresentados aos sujeitos por meio de *slides*. Assim, todos os envolvidos puderam refletir, questionar, discutir e intervir a respeito da análise prévia[22], nos resultados. A escrita coletiva foi constituída após a análise em grupo, no momento da plenária. Esse procedimento de pesquisa foi fundamentado de acordo com as ideias de Thiollent (2011, p. 34) que destaca que “numa pesquisa sempre é preciso pensar, isto é, buscar ou comparar informações, articular conceitos, avaliar ou discutir resultados, elaborar generalizações etc. [...]”. Essa busca pela análise coletiva se fundamenta no argumento de Thiollent (2011) de queremos pensar, raciocinar, conhecer o que está à nossa volta. Pois, segundo ele, se queremos interferir no meio em que

[22] Consideramos análise prévia àquela realizada apenas pelos pesquisadores sem a influência direta dos sujeitos da pesquisa.

estamos imersos, precisamos de conceitos, hipóteses, estratégias, avaliações e outros elementos que constituem uma atividade intelectual.

As reflexões e observações dos sujeitos da pesquisa também precisavam ser registradas no momento da plenária e para tal utilizamos, novamente, questionários e gravações de áudio. Sobre os questionários, nossa preocupação precedeu sua aplicação tanto durante o desenvolvimento da pesquisa, quanto na fase final, que foi a plenária. Não queríamos privilegiar aspectos individuais e nem utilizar os questionários de forma que não proporcionassem uma visão dinâmica da situação. Os questionários e as gravações de áudio foram usados como técnicas de registro, o que não descaracteriza a pesquisa-ação, pois como retrata Thiollent (2011):

> Podemos considerar que, no desenvolvimento da pesquisa-ação, os pesquisadores recorrem a métodos e técnicas de grupos para lidar com a dimensão coletiva e interativa da investigação e também técnicas de registro, de processamento e de exposição de resultados (THIOLLENT, 2011, p. 33).

Thiollent (2011) ainda destaca que a concepção do questionário é relacionada com o tema, com os problemas levantados nas discussões iniciais e com as hipóteses correspondentes. No nosso caso, formulamos os questionários com perguntas abertas, permitindo aos sujeitos que refletissem e respondessem de acordo com suas opiniões e concepções. Destacamos também que parte das perguntas constituíam o processo de construção dos números reais, ou seja, a partir delas os sujeitos puderam desenvolver o processo de construção dos campos numéricos até se chegar à formulação ou à uma ideia de definição de cada campo.

Alicerçados por esta fundamentação metodológica, descrevemos as etapas dos procedimentos adotados para o desenvolvimento dessa pesquisa.

## 4.4 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Iniciamos nossa pesquisa com discussões no Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática – GEPEMEM: Construção dos números reais. O grupo acolheu a realização de discussões em relação ao tema bem como relatos de experiências na área e sugestões de abordagem do assunto utilizando a pesquisa-ação. As discussões realizadas por meio de sites e redes sociais contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa.

Ao utilizarmos algumas sugestões propostas pelo grupo, começamos o estudo da construção dos números reais tendo como base teórica as obras de Caraça (1989) e Ávila (2006), que proporcionaram caminhos até se chegar à definição dos campos numéricos já mencionados. Para um estudo histórico utilizamos as obras de Boyer (2003), Bentley (2009) e Roque (2012). Sobre a historicidade do tema, Boyer (2003) e Bentley (2009) convergem quando descrevem que a descoberta da incomensurabilidade ocasionou uma problemática na Matemática grega, principalmente entre os pitagóricos. Em contrapartida, Roque (2012) diverge desse posicionamento, pois em suas pesquisas baseadas em historiadores que descrevem sobre o assunto, não é mencionado que a descoberta da incomensurabilidade tenha causado um assombro na época, como destacam Boyer (2003) e Bentley (2009).

Caraça (1989) descreve o problema da medida que ocasionou na construção do campo racional, proporcionando um entendimento sobre a definição do número racional por meio da medição de segmentos, bem como, a descoberta de segmentos incomensuráveis, como por exemplo, o lado do quadrado com 1 (uma) unidade de medida e sua diagonal, que proporcionaram uma extensão para o campo irracional. Séculos mais tarde, como destaca Caraça (1989), o matemático Richard Dedekind com os denominados cortes de Dedekind, buscou uma fundamentação mais rigorosa para a definição de números reais. Ávila (2006) por sua vez, faz uma releitura da construção proposta por Caraça (1989), direcionando-a para o ensino na Licenciatura em Matemática, mais especificamente para o ensino na disciplina de Análise Real.

Reforçamos que, de posse aos conhecimentos que foram base para o desenvolvimento da pesquisa, começamos a refletir em qual nível de ensino desenvolvê-la-íamos. Como observamos algumas inquietações advindas de professores da área e nossas frustrações nos processos de ensino e de aprendizagem na formação inicial de professores de Matemática, optamos por desenvolvê-la com os próprios alunos da Licenciatura em Matemática. Assim, escolhemos uma turma do 1º período (iniciante) e outro grupo de alunos concluintes do curso.Inicialmente tínhamos o intuito de realizar uma analogia em relação aos alunos iniciantes e concluintes mas, ao longo do desenvolvimento da pesquisa, nossa proposta foi se transformando.

Definidos os sujeitos da pesquisa, o passo seguinte foi conseguir algum professor que estivesse disposto a compartilhar algumas de suas aulas para que a pesquisa pudesse ser desenvolvida. Nesse processo contamos com a professora Rosângela Cardoso Silva Barreto da disciplina ORTE 1 – *Observação e Reflexão do Trabalho Escolar1: Resolução de Problemas* – da turma de 1º período e o professor Rodolfo Chaves da disciplina *Tópicos Especiais em Matemática 2*: *Desenho Geométrico*, da turma dos alunos concluintes, que com carinho e compreensão cederam algumas de suas aulas para esta realização. E agradecemos também a voluntária colaboração dos sujeitos da pesquisa que se dispuseram a participar da mesma.

Tratando-se de uma instituição de ensino, em um curso de Licenciatura, necessitamos da autorização do diretor, coordenador do curso, professores que forneceram espaços em suas aulas e alunos participantes (sujeitos da pesquisa). Com as devidas autorizações em mãos, iniciamos a pesquisa no dia 05 de junho de 2013.

Na busca de ir além da compreensão da definição de números reais, resolvemos tratar o tema por meio da construção dos campos racional, irracional e real visando identificar variados significados matemáticos produzidos pelos sujeitos da pesquisa.

Nessa perspectiva, a pesquisa foi desenvolvida em seis etapas:

- Etapa 1- *Revisão bibliográfica* para conhecimento de pesquisas já desenvolvidas na área e o estudo em livros para embasamento teórico.
- Etapa 2 – *Estudo em grupo* (GEPEMEM) das teorias que forneceram base para a pesquisa. Em destaque, o MCS e a pesquisa-ação.
- Etapa 3 - *Desenvolvimento em campo*. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma do 1º período composta por 27 alunos e em uma turma de alunos concluintes, composta por 5 alunos que cursam disciplinas finalistas da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, *campus* Vitória.

A escolha pelos sujeitos da pesquisa se deu pelo propósito de investigarmos quais significados matemáticos são produzidos por alunos iniciantes e concluintes, em processos de ensino e de aprendizagem, sobre a construção dos números reais.

Possuiria alguma diferença essa produção, visto que, os alunos concluintes já estudaram uma gama de disciplinas que ainda não foram estudadas pelos iniciantes? Esse foi um objetivo que propusemos a responder por meio das análises.

A 3ª etapa (*Desenvolvimento em campo*) foi dividida em subetapas:

*i)* No primeiro encontro explicamos os procedimentos da pesquisa. O tema, o porquê da escolha, os objetivos a serem alcançados e a importância da participação dos grupos de alunos. Convidamo-los a participar da pesquisa e solicitamos suas respectivas autorizações. Aqueles que autorizaram responderam o questionário I (APÊNDICEF), que buscava informações a respeito da vida acadêmica e profissional. No mesmo encontro os sujeitos participantes responderam o questionário II (APÊNDICEG) cujo foco foi buscar informações sobre o conhecimento prévio acerca dos números reais:

*ii)* No segundo encontro iniciamos as construções. Trabalhamos com questionários e gravações de áudio e juntos construímos o campo racional;

*iii)* No terceiro encontro construímos o campo irracional;

*iv)* No quarto encontro construímos o campo real;

*v)* No quinto encontro realizamos uma plenária, análise aos resultados.

Cada encontro durou em média cerca de 2 (duas) a 3 (três) horas.

- Etapa 4 – *Plenária*. Durante todo o processo de desenvolvimento tivemos a preocupação de destacar para os sujeitos envolvidos, considerados também pesquisadores, nos moldes da pesquisa-ação, a importância da participação efetiva desses sujeitos no processo não só como ouvintes, mas também como parte de toda construção realizada. Ao finalizar a análise dos resultados da pesquisa, tivemos a preocupação e o compromisso de divulgá-los e socializá-los com os sujeitos participantes. A intenção era ouvirmos suas opiniões a respeito das reflexões realizadas e também registrá-las, tendo em vista o produto final que estava sendo construído coletivamente.
- Etapa 5 – *Fechamento das conclusões*. Sistematização e elaboração da escrita.

- Etapa 6 – *Constituição do produto final*. Na verdade o produto final foi constituído de acordo com o desenvolvimento de cada etapa da pesquisa. A pesquisa nos proporcionou desenvolver uma oficina para uso na formação inicial e continuada de professores de Matemática. Essa oficina – descrita em um material impresso – intitulada *“Número real: é todo número racional ou irracional. Por quê?”* foi apresentada pela primeira vez na III Semana de Matemática do IFES, *campus* Vitória, no dia 13 de novembro de 2013 e contou com a participação de 40 oficineiros, dos quais, alunos (as) de Licenciatura em Matemática e professores (as) de Matemática do Espírito Santo, Minas Gerais e Rio de Janeiro.

Como nos capítulos 1 e 2 já descrevemos detalhadamente a primeira e segunda etapas, descreveremos com mais precisão no item seguinte as etapas 3, 4, 5 e 6.

## 4.5 DESCRIÇÕES DOS PROCEDIMENTOS

Iniciar uma pesquisa nunca é fácil, principalmente quando os sujeitos envolvidos são seres humanos e o espaço que estão inseridos não é necessariamente aquele direcionado por nós. Dessa forma, alguns obstáculos precisaram ser transpostos.

### 4.5.1 Primeira e segunda abordagem: análise prévia e início da pesquisa

A primeira abordagem foi conseguir autorização para realizar a pesquisa. Como já descrito, essa etapa foi vencida, pois todos os envolvidos forneceram tal autorização.

A segunda abordagem – *início da pesquisa* – foi realizado no primeiro encontro, onde os sujeitos participantes preencheram dois questionários (APÊNDICES F e G). O primeiro questionário buscava informações a respeito da formação acadêmica e profissional. O segundo questionário relatava o objetivo da pesquisa e trazia a pergunta central do estudo que seria realizado – ***O que você entende por número real? Justifique***. Como o estudo seria desenvolvido via construção de campos numéricos, também perguntamos: ***Podemos construir o conjunto dos números reais? Por quê?***

Esses questionamentos, a nosso olhar, nos proporcionariam uma análise prévia dos conhecimentos matemáticos e dos significados matemáticos produzidos pelos sujeitos da pesquisa. O enfoque era: conseguem definir o que é um número real? E ainda: sabem que este conjunto pode ser construído? Foi o que analisamos com os resultados.

Em diálogos com os alunos do 1º período descobrimos que na disciplina de *Fundamentos Teóricos e Metodológicos da Matemática I* eles apresentaram trabalhos relacionados à construção dos números reais utilizando a obra de Caraça (1989). Em contrapartida os alunos concluintes não se recordavam de ter estudado a construção dos números reais e vagamente se recordavam da obra de Caraça (1989). Após obtermos essas informações passamos também a direcionar nosso olhar à forma como cada grupo de alunos compreendia as etapas da pesquisa, ou seja, se o fato de um grupo já conhecer as ideias contidas na obra em questão proporcionariam uma melhor compreensão da construção dos campos numéricos, comparado ao grupo que não conhecia.

Preocupamo-nos em esclarecer que o intuito da análise não eram os erros ou acertos, mas sim os significados matemáticos produzidos. O objetivo de sempre solicitarmos que justificassem suas falas e escritas nos diversos questionários propostos ao longo de toda pesquisa teve o intuito de analisar como os sujeitos justificavam suas crenças-afirmações na perspectiva da construção do conhecimento, bem como que significados matemáticos produziam em suas justificações.

### 4.5.2 Terceira abordagem: a construção do campo racional

Iniciamos com uma abordagem histórica e em seguida os sujeitos responderam a um questionário (APÊNDICE H) com a pergunta central do estudo: ***Defina, o que é número racional. Justifique***. Essa pergunta foi proposta antes e depois de construirmos o campo racional. Tivemos como propósito a análise do conhecimento prévio. Daí, continuamos com outros questionamentos que foram respondidos ao longo da construção do campo racional, em alguns momentos oralmente e em outros, por escrito.

A segunda questão proposta foi: ***Construa dois segmentos de reta $\overline{AB}$e $\overline{CD}$ de forma que $\overline{CD}$ caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. Como escrever $\overline{AB}$ em relação à$\overline{CD}$? E como escrever $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$?***

Propusemos esta questão com o intuito de direcionarmos os sujeitos a uma percepção de medição de segmentos e de escrita de um segmento como unidade de medida de outro.

A terceira questão proposta foi: ***Subdivida o segmento $\overline{CD}$ em partes iguais. Tomando cada parte como nova unidade de medida u, quantas vezes u cabe em $\overline{AB}$? Como escrever $\overline{AB}$ em relação à $\overline{CD}$? E $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$?***

Propusemos essa questão com o intuito de analisarmos se os sujeitos da pesquisa percebiam a importância da subdivisão para medições (assim como usamos hoje as subdivisões do metro, dentre outras). Também buscamos analisar que significados matemáticos os sujeitos produzem quando um segmento é escrito como unidade de medida de outro na forma de um número fracionário, cujo numerador não é divisível pelo denominador. Mas, em nenhum momento falamos isso para os sujeitos, apenas observamos o que eles descreviam com essas construções.

A quarta questão proposta foi: ***Tomamos um novo segmento $\overline{AB}$ medindo 11 cm e um novo segmento $\overline{CD}$ medindo 3 cm. Divida $\overline{CD}$ num número de partes iguais suficiente para que uma delas caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. O que se pode dizer da medida de $\overline{AB}$ em relação à antiga unidade $\overline{CD}$?***

Nesta questão já direcionamos a uma medida específica com o intuito de analisarmos se os significados matemáticos produzidos, quando o sujeito construía o segmento usando suas próprias medidas, eram os mesmos de quando lhes era fornecido uma medida específica.

Também buscamos analisar, por meio das respostas nos questionários e pelas gravações em áudio, se os sujeitos, ao longo das três construções propostas, conseguiam observar a relação entre a escrita dos segmentos em função de outro segmento. O principal objetivo foi verificar se os sujeitos concebiam a ideia de, ora o segmento ser expresso como um número inteiro, ora o segmento ser expresso de forma fracionária.

Antes de iniciarmos as construções nas questões 2, 3 e 4, combinamos com os sujeitos que tomássemos apenas como conhecido o conjunto dos números inteiros, de forma que o conjunto dos números racionais ainda não tivesse sido construído. Essa proposta foi bem interessante, pois alguns sujeitos quando expressavam um segmento na forma de fração ficavam em dúvida quanto à representação, já que não conheciam os números racionais. Essa ideia proporcionou uma reflexão a respeito da necessidade da construção dos números racionais.

Após a construção do campo racional, os sujeitos responderam à mesma pergunta inicial. Propusemos assim: ***Após as construções efetuadas, alguns significados matemáticos foram produzidos. Dessa forma, defina novamente o que é número racional e justifique.***

Com essa questão conseguimos evidenciar alguns significados matemáticos produzidos ao longo da construção do campo racional.

4.5.3 Quarta abordagem: a construção do campo irracional

Para a construção do campo irracional seguimos a mesma proposta da construção do campo racional. Fizemos como questão central: ***Defina, o que é número irracional. Justifique***. Os sujeitos responderam antes e depois da construção do campo irracional. Outros questionamentos também foram respondidos ao longo da construção.

Durante o processo de resolução do questionário (APÊNDICE I) falamos um pouco sobre a história da construção do campo irracional e tomamos como conhecido apenas o campo racional. Dessa forma, todos deveriam tentar resolver as questões sem utilizar como conhecido o conjunto dos números irracionais.

A segunda questão foi: ***Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.***

***a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?***

***b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?***

O motivo pelo qual optamos por esta questão está relacionado ao fato que, ao calcularmos a medida da diagonal do quadrado, vamos obter como resposta um número que, supostamente não é conhecido por nós naquele momento. Queríamos analisar como os sujeitos da pesquisa resolveriam o problema; o que falariam sobre tal medida? Perceberiam a ideia de segmentos incomensuráveis? Como tratariam o novo número ainda não definido? Para responder a questão os sujeitos poderiam utilizar instrumentos como régua, compasso, esquadro, transferidor e o *software* Geogebra.

Essa experiência foi muito interessante, pois, nos proporcionou a oportunidade de imaginar como, na gênese da construção dos segmentos incomensuráveis e da constituição do campo irracional, os matemáticos lidaram com o novo número, como chegaram à conclusão da não racionalidade daquela medida.

Por fim, os sujeitos novamente responderam à pergunta inicial justificando o porquê de tal definição. Propusemos assim: ***Após as construções efetuadas, alguns significados matemáticos foram produzidos. Dessa forma, defina novamente o que é número irracional e justifique.***

A partir das repostas a essa questão conseguimos destacar alguns significados matemáticos produzidos a respeito da construção do campo irracional.

### 4.5.4 Quinta abordagem: a construção do campo real

Retomamos a pergunta central do início da pesquisa: ***Defina, o que é número real. Justifique***. Os sujeitos responderam antes e depois da construção do campo real, e durante o desenvolvimento foram respondendo algumas questões, mas de forma que possibilitasse uma construção do pensamento, visando à extensão numérica para o campo real.

A segunda questão direcionada à construção do campo real foi: ***Considere apenas a existência do campo racional e responda as questões a seguir.***

***Seja (P) o conjunto de pontos da reta. Efetue um corte na reta e atribua uma propriedade às classes determinadas pelo corte, de modo que o ponto no corte pertença a uma das classes. Explique seu raciocínio.***

Inicialmente estudamos alguns conceitos, como por exemplo, o que são cortes na visão de Dedekind, por meio da obra de Caraça (1989); o que são classes e como atribuir propriedades a elas. Construímos alguns exemplos que, de modo geral, proporcionaram uma compreensão sobre o assunto. Observamos isso nas falas dos sujeitos, registradas em gravação de áudio: *“Agora entendo o que são cortes”* (Sujeito Y); *“A ideia de cortes proporciona a compreensão de que a reta não tem* *lacunas"* (Sujeito Z). Nessa questão nossa pretensão foi proporcionar uma compreensão em relação às ideias de cortes de Dedekind.

A terceira questão proposta foi: ***Seja (P) o conjunto de pontos da reta. Efetue um novo corte na reta (digamos no ponto E), de modo que a classe (A) dos pontos que estão à esquerda de E sejam todos os números racionais s que elevados ao quadrado são menores que 2 ($s^2 < 2$), e a classe (B) dos pontos que estão à direita de E sejam todos os números racionais r que elevados ao quadrado são maiores que 2 ($r^2 > 2$).***

***a) O ponto E pertence a algumas das classes? Por quê?***

***b) O que podemos concluir com esse exemplo?***

Nesta questão o nosso intuito foi proporcionar aos sujeitos uma problemática que configurasse a ideia de que, sem o campo irracional, a reta teria lacunas, assim como propõe Dedekind, de forma que percebessem a necessidade da extensão dos campos numéricos, no caso para o campo real. Buscamos aqui sugerir aos sujeitos porque tanto falamos que "*Número real é todo número racional ou irracional*" (ÁVILA, 2006, p. 26), que ocasiona na clássica frase*: o conjunto dos números reais é a união dos racionais com os irracionais*.

Visamos também definir o número real de forma que os sujeitos compreendessem a sua constituição. Para isso usamos a definição proposta por Caraça (1989) e construída por Dedekind:

> Chamo número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional separando as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional(CARAÇA, 1989, p. 62).

Apesar de destacarmos o que esperávamos das questões propostas, buscamos novas formas de pensar sobre os problemas, ou seja, produções de significados matemáticos diferentes daquelas concebidas por nós. Podemos dizer que este objetivo foi alcançado.

4.5.5 Sexta abordagem: plenária

A plenária é uma atividade da pesquisa-ação cujo objetivo é discutir as análises já realizadas acerca dos resultados. Buscamos discutir e refletir coletivamente quais significados matemáticos foram produzidos a partir das justificações realizadas pelos sujeitos, bem como evidenciar o que os sujeitos expressaram a respeito de tais justificações. Os resultados da pesquisa foram descritos considerando a visão dos envolvidos, pesquisadores e sujeitos.

Em suma, a pesquisa de campo concretizou-se da seguinte forma: descrevemos fatos históricos acerca de cada campo numérico, em cada encontro específico e, imediatamente, inserimos os sujeitos na conversa buscando reflexões e informações que nos possibilitassem analisar e explorar os significados matemáticos já produzidos pelos sujeitos durante a formação escolar ou profissional. Algumas vezes intervirmos instigando-os a falarem mais sobre o que pensavam. Prosseguimos, portanto, desenvolvendo a construção dos campos numéricos de forma coletiva. Algumas teorias eram destacadas por nós, mas buscamos complementá-las a partir das ideias dos sujeitos. No final de cada construção, conversamos com os alunos sobre o procedimento, ouvindo a opinião de quem quisesse falar. Limitamo-nos a não responder supostas dúvidas, mas sim, direcioná-las para que os próprios sujeitos refletissem e descrevessem o que pensavam. Para termos como registro o que os sujeitos acharam da pesquisa, propusemos no final de cada questionário a pergunta: ***Qual sua opinião sobre o processo desenvolvido para a construção do campo racional?*** Para a construção de cada campo fizemos esta pergunta especificando o campo construído.

## 5 INVESTIGAÇÃO A ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS

Neste capítulo apresentamos os resultados após a pesquisa de campo obtidos a partir das enunciações constituídas por meio dos fatos históricos e da construção dos números reais que consequentemente resultou na definição dos campos racional, irracional e real que constituem o produto final. Realizamos essa descrição da seguinte forma:

─ No início da construção de cada campo numérico descrevemos fatos históricos encontrados nas obras de Roque (2012), Bentley (2009), Boyer (2003) e Caraça (1989) que evidenciam a necessidade da construção desses campos. Após tais descrições relatamos o caminho percorrido no processo de construção dos campos e, em meio a isso, transcrevemos as enunciações dos sujeitos da pesquisa e realizamos análises acerca das respostas junto ao GEPEMEM ─ tanto no subgrupo GEPEMEM: Construção dos Números Reais, quanto nas plenárias ─ e, concomitantemente, com os sujeitos da pesquisa.

─ Analisamos o processo de produção de significados matemáticos estabelecendo analogia entre as enunciações emitidas pelos sujeitos antes e depois da construção dos números reais. Para esse procedimento, tomamos características gerais do MCS: o espaço comunicativo estabelecido por autor-leitor-autor, a análise das enunciações na busca de significados matemáticos (sem considerar a ideia de erro) e a constituição de estipulações locais em campos semânticos (sem evidenciá-las como únicas).

As análises destacadas provêm de respostas descritas em questionários (APÊNDICES), em gravações de áudio e a partir das falas realizadas e registradas durante o processo de pesquisa. Optamos também por descrever alguns impasses e obstáculos ocorridos no processo.

### 5.1 IMPASSES E ALGUNS OBSTÁCULOS

Evidenciamos que desenvolver uma pesquisa de cunho qualitativo envolvendo sujeitos durante um processo de desenvolvimento por um período de três meses não é tarefa fácil. Alguns obstáculos surgiram e nos levaram a buscar outros caminhos. Inicialmente, identificamos resistências de alguns alunos para participar da pesquisa; mesmo concordando e autorizando suas participações, os mesmos não se mostraram tão dispostos a tal processo. Essa evidência foi observada em especial no grupo de alunos concluintes.

Quando iniciamos a pesquisa buscávamos a participação efetiva desses alunos, o que não aconteceu de imediato: dos 5 alunos que iniciaram, em média 3 alunos participaram do processo e só no último dia de pesquisa ─ a plenária ─ que 100% do grupo esteve presente. Esse impasse, de certa forma, comprometeu alguns resultados, pois o principal foco da proposta (da análise da produção de significados matemáticos, com a comparação entre o conhecimento prévio e o construído ao longo do desenvolvimento da pesquisa) foi o processo de construção do conhecimento, processo esse que seria observado com a participação dos alunos durante a construção dos campos numéricos.

Outro impasse que podemos evidenciar advém das manifestações ocorridas em várias cidades brasileiras durante o ano de 2013 ─ "*#vemprarua: o gigante acordou*" ou "*Não é por R$ 0,20*" ─ inclusive em Vitória, ocasionando paralisações que fizeram com que alguns encontros fossem cancelados e remarcados em outras datas. Isso se tornou um obstáculo pois a remarcação de novas datas, segundo avaliação de nosso Grupo ─ GEPEMEM: Construção dos Números Reais ─ dificultou o comparecimento dos sujeitos e comprometeu o sequenciamento das discussões e análises.

Diante desses impasses e obstáculos verificamos a necessidade de um melhor envolvimento do grupo de alunos concluintes, para isso, buscamos maior participação desses alunos no processo. Para tal, realizamos conversas com esses alunos de forma a estreitar a relação existente entre pesquisadores e sujeitos da pesquisa, evidenciando a importância da participação deles durante todo o processo. Após tais conversas observamos que os alunos compreenderam melhor a proposta de pesquisa e começaram a participar mais efetivamente com reflexões, proposição de ideias, discussões a respeito das ideias de colegas, dentre outros.

Quanto à participação do grupo de alunos iniciantes, evidenciamos uma efetiva receptividade a respeito da proposta da pesquisa. Eles demonstraram curiosidade sobre o tema e o processo de construção dos números reais. Durante todo o desenvolvimento da pesquisa foram questionadores e participativos. Esse foi o diferencial que buscávamos: a participação efetiva dos sujeitos na pesquisa, o que possibilitou e constituiu o método da pesquisa-ação. Nesse grupo de alunos também evidenciamos alguns impasses quanto à participação efetiva de todos ao longo de todo o processo, mas os sujeitos que participavam de cada encontro se mostravam dispostos a construir seu próprio conhecimento acerca do tema, bem como, a fazer parte dessa construção expondo suas ideias, refletindo a respeito das ideias dos outros colegas e discutindo novas possibilidades. Esses alunos se envolveram na pesquisa de forma a se tornarem também pesquisadores dela.

Alguns encontros com esse grupo também foram cancelados e remarcados por motivo das paralisações já mencionadas, mas observamos que esse fato não foi tão impactante neste grupo, pois não dificultou a participação desses alunos.

## 5.2 PERFIS DOS SUJEITOS DA PESQUISA

### Análise do questionário I

Com base nas ideias já descritas, realizamos a pesquisa com uma amostra de 32 alunos da Licenciatura em Matemática do IFES, *campus* Vitória. Sendo 27 alunos do 1º período e 5 alunos concluintes.

O intuito foi abranger as diferentes formações constatadas desses alunos, uma vez que dentro desta pesquisa encontram-se alunos iniciantes e concluintes, já graduados e não graduados, onde poucos tiveram a experiência em sala de aula como professores de Matemática.

Em análise ao questionário I que menciona a vida acadêmica e profissional dos sujeitos, destacamos:

TABELA I – CARACTERIZAÇÃO GERAL DOS SUJEITOS

| **Sujeitos da pesquisa** | **Quantidade Participante** | **Possui outra Graduação** | **Já lecionou** |
|---|---|---|---|
| Iniciantes | 27 | 2 | 4 |
| Concluintes | 5 | 1 | 4 |

Fonte: Pesquisa de Mestrado nas turmas de 1º período e alunos concluintes.

De uma maneira geral evidenciamos, neste levantamento, que a maioria dos alunos concluintes já possui experiência como professor de Matemática, diferentemente dos alunos do 1º período. Salientamos também que os dois grupos possuem alunos graduados.

Nesta análise, temos como evidência: os concluintes cuja maioria já lecionou e os iniciantes cuja maioria não possui experiência em sala de aula. Evidenciamos tal observação, pois, enquanto professores de Matemática, sabemos que a prática pedagógica em sala de aula proporciona aprendizados, uma vez que nos direciona a novos caminhos em busca a otimizarmos, adaptarmos e transvalorizarmos novas e diferentes maneiras de ensinar, além do domínio acerca de um tema.

## 5.3 A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Os números fazem parte de nossa vida. Vivemos cercados por eles seja em uma simples contagem de elementos, seja nas programações computacionais, na música, nas propriedades da luz, no movimento dos planetas, no corpo humano, na simples compra do mercado, enfim, os números constituem boa parte do que usamos e vivenciamos, permeando o universo. Como destaca Bentley (2012, p. X) “os números não eliminam nossa capacidade de nos maravilhar com o mundo, eles a aumenta”.

A civilização humana, com suas necessidades habituais, precisou desenvolver procedimentos de contagem para resolver problemas cotidianos, antes mesmo da constituição dos números e dos sistemas numéricos. Um método de contagem utilizado foi o de estabelecer uma correspondência entre ovelhas e pedras, onde cada ovelha correspondia a uma pedra que era guardada em saco, quem nunca ouviu falar dessa história? Roque (2012) relata outra forma de contagem: a utilização de *tokens* – “objetos de argila que representavam diversos formatos: cones, esferas, discos, cilindros etc.” (ROQUE, 2012, p. 41). Os *tokens* eram usados nas atividades de economia pois mantinham o controle sobre produtos agrícolas e bens manufaturados. Colocados em potes de argila, parecidos com bolas, representavam quantidades que eram simbolizadas por riscos na superfície dos potes. Cinco *tokens* dentro dos potes correspondiam a cinco riscos na superfície e representavam cinco elementos como: jarras de óleo, quantidades de grãos, dentre outros; a forma dos *tokens* estava associada ao tipo de elemento; a esfera, por exemplo, representava grãos. Com o tempo o homem percebeu que poderia aprimorar sua maneira de contar, assim começou a associar ovelhas, quantidade de grãos, jarras de óleo a riscos em galhos de árvores, ossos de animais, tabletes de argila, ou ainda, por meio de nós em cordões de cipó. “Esse foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de naturezas distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado” (ROQUE, 2012, p. 43).

Uma história interessante contada por Bentley (2012) evidencia a importância da contagem e da utilização de instrumentos que possibilitaram essa representação. Ele conta que há muito tempo atrás os chefes das tribos ao enviarem seus guerreiros para batalhas em tribos vizinhas precisavam saber se todos haviam voltado, pois, para cada guerreiro morto, a tribo vizinha tinha que pagar um búfalo como recompensa. Assim, o chefe da tribo precisava registrar o número de guerreiros que haviam saído para a batalha para que pudesse verificar, ao retornarem, quantos havia perdido, para poder buscar sua recompensa. O truque utilizado era: cada guerreiro que saía deveria depositar uma pedra num monte e, ao retornar, cada guerreiro deveria retirar uma pedra do monte. Dessa forma o chefe saberia quantos búfalos iria receber da tribo vizinha. Ao buscar sua recompensa trocava as pedras que sobravam por varinhas, pois seria mais fácil de carregar. Dessa maneira, era possível contar sem mesmo utilizar sistemas numéricos. Se pensarmos nesse contexto, até hoje utilizamos formas de contagem primitiva, por exemplo: em uma turma de alunos que estão realizando uma votação para a escolha do líder da turma, observamos representações de contagem por meio de traços que são agrupados de cinco em cinco.

De forma semelhante o homem aprendeu a medir sem utilizar instrumentos precisos de medição (como os que possuímos hoje) e sem uma unidade de medida estabelecida. Eles mediam terras utilizando pedaços de cipó, que convencionavam como elementos de medição. Como exemplo, Bentley (2009) retrata que as enchentes, causadas pelas cheias do rio Nilo, que retiravam os limites das fazendas e lotes, faziam com que os egípcios realizassem cuidadosas medições de terra, utilizando instrumentos como pedaços de cipó, e isso proporcionou um desenvolvimento dos processos de medição e contribuiu para o aprimoramento da Geometria. Outro fator importante, destacado por Bentley (2009), foi a descoberta dos números irracionais, pois com o reconhecimento desses números foi possível descrever formas como triângulos, quadrados e círculos, além disso, o número passou a ser usado para representar linhas e formas feitas por linhas. Como explica Roque (2012, p. 101) isso é possível porque “a medida é um procedimento que permite reduzir grandezas a números. Dado um segmento podemos medir seu comprimento”.

Sobre o processo de medir Caraça (1989, p. 29) relata que “*medir* e *contar* são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior freqüência”. Em nosso cotidiano, nas mais variadas circunstâncias, existe a necessidade de medir. A costureira, o engenheiro, o agricultor, e em outras diversas profissões trabalha-se a ideia de medir e contar. Como destaca Caraça (1989) medir é comparar duas grandezas da mesma espécie. Foi assim, por meio de medições realizadas por vários séculos, que o homem constituiu os números racionais: via comparação de segmentos de reta, cuja ideia é verificar quantas vezes um determinado segmento cabe em outro. Dessa forma, o homem evidenciou por meio da subdivisão da unidade de medida um número da forma $\frac{m}{n}$, sendo m e n números inteiros, com n ≠ 0. Esse número, da forma $\frac{m}{n}$, ocasionou na extensão dos campos numéricos, constituindo assim o campo racional.

### 5.3.1 Construção do Campo Racional

Por meio de fatos históricos apresentados, iniciamos o processo de construção dos números racionais. Para uma melhor visualização das reflexões desses sujeitos, nomeados como grupo A – alunos iniciantes e como grupo B – alunos concluintes, realizamos um processo de categorização que foi desenvolvido de acordo com a análise de conteúdo proposta por Bardin (2009) cujo objetivo pode se resumir em:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2009, p. 44).

Dessa forma, categorizamos as respostas da seguinte maneira:

- No questionário II optamos por analisar somente a questão 2, pois a questão 1 trata da definição de número real, e esta será descrita na análise do questionário V.

- Nos questionários III, IV e V, as questões 1 e a primeira questão de cada reflexão, contidas na segunda página de cada questionário, estão descritas separadamente nos grupos A e B, pois foi preciso realizar uma análise dos conhecimentos trazidos, naquele momento, pelos alunos da Licenciatura em Matemática, bem como, analisar e verificar se houve alguma mudança em relação aos significados produzidos antes e depois das construções dos campos numéricos. Para tal, a ordem de numeração da questão 1 condiz com a ordem de numeração da primeira questão da reflexão.

- Nas demais questões e para o questionário da plenária optamos por descrever e analisar as repostas dos dois grupos A e B juntos, pois são analisados significados matemáticos produzidos durante o processo de construção dos campos numéricos e, para tal, não distinguimos aluno iniciante ou concluinte.

- Durante as análises evidenciamos três tipos de estipulações locais constituídas nos campos semânticos dos sujeitos, as quais denominamos como pensamento aritmético, pensamento geométrico e pensamento algébrico.

O **pensamento aritmético** é mencionado quando observamos que as enunciações emitidas pelos sujeitos estão relacionadas a ideias, como: representação de medição de segmentos via operações – adição, subtração, multiplicação e divisão. O **pensamento geométrico** é destacado quando evidenciamos enunciações como: construção de figuras geométricas, medições e comparações de segmentos. Em relação ao **pensamento algébrico** destacamos como tal: generalização de definições por meio de variáveis.

**Análise do Questionário II: concepção prévia da construção dos números reais**

Para a realização desta análise separamos as respostas em três categorias. Na **categoria I** destacamos aquelas que os sujeitos responderam sim. Na **categoria II** destacamos aquelas que os sujeitos responderam não. Na **categoria III** destacamos aquelas que os sujeitos se encontram em dúvida ou nos colocaram em dúvida.

***Questão 2: Podemos construir o conjunto dos números reais? Por quê?***

**Grupos A e B: Categoria I**

- *“Sim. Desde que tenhamos os demais conjuntos.”*

- *“Sim, como podemos mensurar esses números e representá-los, nós podemos construir o conjunto dos números reais, como exemplo: o conjunto dos naturais, o conjunto dos inteiros.”*
- *“Sim. R = {... – 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}.”*
- *“Sim. Porque os conhecimentos adquiridos ao longo de nosso aprendizado até aqui nos ensinou os agrupamentos contidos em um agrupamento maior: o Real.”*
- *“Sim, podemos dentro da linguagem matemática.”*
- *“Acredito que sim, seria um conjunto de infinitos números compostos pelos grupos supracitados.”*
- *“Sim. É um conjunto infinito que engloba todos os números (Não sei com o construir).”*
- *“Sim, podemos. Porque tal conjunto representa números que para sua origem tinham a função de representar o ‘Real’ (Real, nessa definição seria medidas, quantidades, etc., que necessitam de uma forma para ser compreendida, que seria a forma matemática).”*
- *“Sim. Existem esquemas de conjuntos que podemos criá-los. Dentro dos conjuntos dos reais temos os racionais, irracionais, inteiros. Porque são esses os números que utilizamos em nosso sistema escolar até a chegada dos complexos.”*
- *“Sim. Utilizamos linguagem matemática (símbolos) para defini-los (pontos de uma reta). A reta representa todo o conjunto.”*
- *“Sim, se entendermos a construção dos reais como definição ou demonstração.”*
- *“Durante a Educação Básica, como aluna aprendi que os números reais podem ser representados na reta real. A priori, eu enxergava este conjunto como algo discreto, isto é, não compreendia que se tratava de algo contínuo. Após o ingresso na Licenciatura, entretanto, minha visão foi ampliada,*

*sobretudo devido às discussões realizadas sobre infinito e com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Este ainda era um assunto complexo para mim, mas meu caminhar no curso contribuiu para que eu compreendesse melhor tais coisas, sobretudo, após ler sobre a 'hipótese do contínuo de Cantor', nas disciplinas de História da Matemática e Álgebra."*

Na resposta acima, o sujeito evidencia conhecimentos relativos à construção dos números reais, isso acontece quando menciona a ideia da continuidade e a hipótese do contínuo de Cantor.

- *"Considerando o conceito que temos, podemos dizer que a noção de construção seria os diagramas. Claro que não podemos elencar todos os seus elementos, por serem conjuntos infinitos, mas podemos simbolizar como seriam. Outra forma seria a reta numérica."*

Ao analisarmos as respostas da **categoria I** evidenciamos que alguns sujeitos estabelecem uma relação de construção advinda dos demais conjuntos de forma que, o conjunto dos reais seja constituído pelos conjuntos racionais e irracionais. Observamos também a ideia de construção sendo relacionada à representação desses números na reta numérica. Em contrapartida, observamos que o conjunto dos números reais foi representado, em uma das respostas, como o conjunto dos números inteiros, o que nos faz refletir quanto à definição de número real que este sujeito possui, pois nossa análise está pautada nas definições descritas por Caraça (1989).

Ressaltamos também que quando os sujeitos descrevem que podemos construir o conjunto dos números reais usando a linguagem matemática ou por representação simbólica, não conseguimos compreender o que realmente querem evidenciar. Supomos que quando um dos sujeitos destaca "*real, nessa definição seria medidas, quantidades, etc., que necessitam de uma forma para serem compreendidas, que seria a forma matemática",* ele esteja relacionando a forma que os números reais podem ser representados nas diversas situações cotidianas e até mesmo em relação a sua definição.

**Grupos A e B: Categoria II**

- *"Mesmo sabendo e entendendo quais números que compõem o conjunto dos números reais, seria impossível construir o mesmo, uma vez que existem infinitos números contidos neste conjunto."*
- *"Não. Pois, são infinitos."*
- *"Na verdade podemos apenas reproduzi-los, pois as construções foram feitas antigamente. Desta forma, acredito que só possamos representá-los e não construirmos."*

Na resposta acima observamos que o sujeito possui uma ideia de construção dos números, no entanto a concebe como algo pronto que possui apenas representatividade.

- *"Não. Podemos apenas representar parte dele. Pois, o conjunto dos números reais é infinito."*
- *"Não, o conjunto dos números reais é infinito."*
- "*Não, mas podemos limitá-los a grupos e usá-los como referência*."
- "*Não. Infinito."*
- *"Não. Porque seria impossível, haja vista que todos os números estariam nesse conjunto, mas os subconjuntos não teriam características semelhantes uns aos outros."*
- *"Não completamente, pois abrange uma grande quantidade de números."*
- *"Não completamente. Porque são muitos números."*
- *"Não. Porque o conjunto dos números reais é infinito."*
- *"Não, pois é infinito."*

Analisando as respostas descritas na **categoria II** observamos que os sujeitos relacionaram construção dos números reais com representação desses números, visto que destacam a não possibilidade de construção, pois o conjunto é infinito ou possui uma grande quantidade de números. Observamos também que esses sujeitos não conhecem o processo de construção dos números ou se já estudaram não se recordam.

**Grupos A e B: Categoria III**

- *"Se construir for o mesmo que representar sim. Porque possuem símbolos para isso."*
- *"Não sei ao certo se o que aprendi foi construção, o que aprendi foi encontrar infinitos números na reta, mas nunca me aprofundei sobre como foi feita essa construção."*
- *"Não sei."*
- *"Não sei."*

As respostas descritas na **categoria III** não estão muito claras, com exceção daquelas que indicam que os sujeitos não sabem construir. Temos como hipótese que os sujeitos não compreendem o que é a construção dos números reais.

**Análise do Questionário III: construção do campo racional**

Prosseguimos a pesquisa solicitando aos sujeitos que respondessem a primeira questão.

***Questão 1:Defina, o que é um número racional. Justifique.***

Vejamos as repostas dos grupos:

**Grupo A**

1) "*Número racional que pode ser representado por uma razão (ou fração) entre dois números inteiros*."
2) "*Números racionais: é representado por números decimais, fração*. *A* = { $\frac{1}{2}$; *2,5*; ...}."
3) "*São aqueles do tipo* $\frac{a}{b}$ *para todo a e b inteiros, sendo b ≠ 0. São números que podem ser escritos na forma de fração*."

4) “*Todo número que pode ser escrito na forma de fração sendo o numerador e o denominador inteiros e o denominador ≠ 0*.”
5) “*É todo número que pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$ *onde a e b são números inteiros e b é diferente de zero*.”
6) “*Todo nº que pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$*, onde b ≠ 0 e a e b∈ Z e cuja divisão é inteira ou decimal infinita. Estes números foram criados a partir da necessidade em medir algo com medida não inteira*.”
7) “*Número racional é todo e qualquer número que possa ser representado em forma fracionária irredutível, com a condição de que o denominador seja um número diferente de zero. Isso ocorre, pois, através do sistema de medidas nem todas as medidas podem se expressas por um número inteiro, dado a isso, estabeleceu-se um novo conjunto, o conjunto dos números racionais*.”
8) “*É o número que consigo extrair uma raiz e como resultado tenho um número inteiro. Ex:* $\sqrt{9} = \pm 3$ *ou fracionário* (*periódico*).”
9) “*Todo número que pode ser medido. Porque pode ser quantificado, medido, analisado*.”
10) “*São números, em que, é possível encontrar a fração geratriz. Ex:* $0{,}3 = \frac{3}{10}$.”
11) “*Todo número que pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$*, com* $a \in Z$ *e* $b \in Z^*$*. Foi assim que aprendi e ainda não pensei em uma outra maneira de defini-lo*.”
12) “*Número racional é aquele escrito em forma de fração* $\frac{a}{b}$ *onde b é diferente de zero*.”
13) “*Todo número que pode ser escrito na forma de fração* $\frac{a}{b}$*, a e ∈ Z e b ≠ 0*.”
14) “*É todo número que pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$*, com a e b inteiros e b ≠ 0*.”
15) “*É todo número que pode ser escrito em forma de fração*.”
16) “*Um número que pode ser escrito em forma de fração, ele permite dividir uma reta AB, em cinco partes CD, por exemplo*.”
17) “*São números que só são definidos na forma de fração*.”
18) Não respondeu.
19) “*Todo escrito na forma de fração*.”
20) “*Número racional é todo aquele que pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$*, sendo a e b inteiros e b ≠ 0*.”

21) “*Todo número natural e inteiro é racional. E eles podem ser escritos na forma fracionária*.”

22) “*É todo número que pode ser escrito na forma de fração, ou seja, na forma $\frac{a}{b}$, b ≠ 0. Onde ‘a’ é o numerador e ‘b’ o denominador e a operação do número de vezes que b cabe em a*.”

**Grupo B**

1) “*É todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com b ≠ 0.*”

2) “*É o conjunto dos números que podem ser escritos da forma $\frac{a}{b}$, a e b ∈ Z e b ≠ 0. Um número que pode ser escrito na forma de fração cujo resultado será uma razão.*”

3) “*É todo número que pode ser representado por uma fração da forma $\frac{m}{n}$, dando essa divisão exata ou não. Aprendi assim na escola e nunca vi uma discussão diferente.*”

Observamos nas respostas descritas nos dois grupos que os sujeitos expressam a noção de definição de número racional,logo, produziram algum significado matemático; todavia, não conseguiram expressar como foi construída essa definição. Essa análise já indicada em outras pesquisas como, por exemplo Cezar (2011), proporciona uma reflexão a respeito do processo de construção dos números racionais ao longo da formação estudantil desses alunos. No grupo A, ainda em início de semestre na graduação, evidenciamos uma reprodução do ensino ministrado na Educação Básica. No grupo B, concluindo a graduação, também observamos uma reprodução de uma definição que é ensinada na Educação Básica, o que nos leva a questionar se as disciplinas ministradas, até aquele momento, não proporcionaram uma maior reflexão sobre o assunto.

Em seguida, começamos a construção do campo racional. De forma dialógica, com os sujeitos da pesquisa, questionamos qual o procedimento de uma pessoa que construiu conhecimento acerca dos números naturais e quer contar uma coleção de objetos; como procede? Eis algumas respostas: “*Usando os dedos”; “usando pedras como antigamente”; “utiliza os próprios números naturais”; “faz associações e comparações”*.

Ainda nessa reflexão, conforme destaca Caraça (1989), esse é o princípio da extensão.

> [...] o homem tem tendência a *generalizar* e *estender* todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências (CARAÇA, 1989, p. 10).

Dessa forma, pensando em campos numéricos, propusemos mais uma reflexão: como generalizar a forma de escrever um número racional? A princípio, o silêncio prevaleceu, mas aos poucos foram surgindo algumas ideias do tipo: "*através da escrita na forma* $\frac{a}{b}$*, com a e b inteiros e b ≠ 0"; "ou também como razão entre inteiros"*.

Após essas reflexões discutimos a respeito do problema da medida proposto na obra Caraça (1989) que intitulamos como "**a solução do problema da medida**".

**A solução do problema da medida**

Caraça (1989) questiona: ***o que é medir?*** Comparar duas grandezas da mesma espécie. Mas, para medir três aspectos, precisam ser seguidos:

*i*) escolha da unidade de medida;

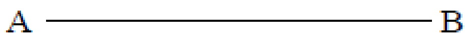
*ii*) comparação com a unidade;

*iii*) expressão do resultado dessa comparação por um número.

Duas medidas da mesma natureza possuem uma unidade de medida comum. Cada grandeza é identificada, ao número inteiro de unidades de medida que a compõem. Partindo desse princípio, iniciamos a construção do campo racional via medição de segmentos.

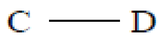
Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos de reta (figuras 1 e 2). Ao compararmos os dois segmentos sobrepondo $\overline{CD}$em $\overline{AB}$ de modo que o ponto C coincida com o ponto A, observamos que o ponto D cai sobre o segmento $\overline{AB}$. Tal resultado mostra que o comprimento de $\overline{AB}$ é maior que o comprimento de $\overline{CD}$ou que o comprimento de $\overline{CD}$ é menor que o comprimento de $\overline{AB}$.

Figura 1: segmento de reta $\overline{AB}$




Fonte: próprio autor

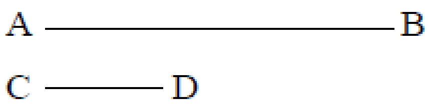
Figura 2: segmento de reta $\overline{CD}$




Fonte: próprio autor

Mas essa não é a única reflexão. Podemos pensar quantas vezes um comprimento cabe em outro, por exemplo. Para tal, é necessário estabelecer uma unidade de medida padrão e utilizar um número – que é a medida da grandeza em relação a essa unidade – para exprimir o resultado da comparação com a unidade. Por exemplo,na figura 3 o segmento $\overline{CD}$ cabe três vezes no segmento $\overline{AB}$ ou que no segmento $\overline{AB}$ cabe três vezes a unidade $\overline{CD}$ou ainda, que a medida de $\overline{AB}$ tomando $\overline{CD}$como unidade, é três. Logo, Caraça (1989) comprova que no problema da medida os três aspectos citados i, ii e iii são necessários.

Figura 3: comparação de segmentos de reta




Fonte: próprio autor

Vale ressaltar ainda que a escolha da unidade de medida está relacionada ao número que se quer obter, uma vez que, devemos pensar qual a unidade mais apropriada. Por exemplo, se queremos mensurar as dimensões de uma mesa, dependendo do tamanho da mesa, é mais apropriado utilizarmos como unidade de medida o metro ou o centímetro, o quilômetro, por exemplo, não seria uma unidade apropriada para tal situação.

Procedemos ao estudo do campo racional propondo aos sujeitos que tomassem como desconhecido, naquele momento, o conjunto dos números racionais para responderem às questões 2, 3 e 4 do questionário III:

***Questão 2: Construa dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de forma que $\overline{CD}$ caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. Quantas vezes $\overline{CD}$ cabe em $\overline{AB}$ no segmento construído?***

Para analisarmos, distinguimos as respostas em duas categorias. Na **categoria I** estão descritas aquelas que os sujeitos seguem a linha de raciocínio de divisão do segmento $\overline{AB}$em centímetros, para mensurar com $\overline{CD}$também dividido em centímetros, numa visão mais geométrica e aritmética. Na **categoria II** está descrita a resposta com raciocínio mais algébrico e aritmético.

**Categoria I:**

- Para $\overline{AB}$ = 10 cm e $\overline{CD}$ = 5 cm, temos:$\overline{AB}$ = 2 $\overline{CD}$ ou duas vezes o segmento $\overline{CD}$ cabe em $\overline{AB}$.
- Para $\overline{AB}$ = 6 cm e $\overline{CD}$ = 2 cm, temos: $\overline{AB}$= 3 $\overline{CD}$.
- Para $\overline{AB}$ = 12 cm e $\overline{CD}$ = 2 cm, temos: $\overline{AB}$ = 6 $\overline{CD}$.
- Para $\overline{AB}$ = 3 cm e $\overline{CD}$ = 1 cm, temos: $\overline{AB}$ = 3 $\overline{CD}$ ou $\overline{CD}$ cabe três vezes em $\overline{AB}$.
- Para $\overline{AB}$ = 4 cm e $\overline{CD}$ = 1 cm, temos: $\overline{AB}$ = 4 $\overline{CD}$.
- Para $\overline{AB}$ = 4 cm e $\overline{CD}$ = 1 cm, temos: 4 $\overline{CD}$ = $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ = $\frac{1}{4}$. $\overline{AB}$.
- Para $\overline{AB}$ = 6 e $\overline{CD}$ = 2, temos $\overline{CD}$ = $\frac{\overline{AB}}{3}$e $\overline{AB}$ = 3 $\overline{CD}$.
- Para $\overline{AB}$ = 3 e $\overline{CD}$ = 1, temos $\overline{AB}$ = 3 $\overline{CD}$ e $\overline{CD}$ = $\frac{\overline{AB}}{3}$.
- Para $\overline{AB}$ = 4 e $\overline{CD}$ = 1, temos $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$ + $\overline{CD}$ + $\overline{CD}$ + $\overline{CD}$ ou $\overline{AB}$ = 4 $\overline{CD}$, logo $\overline{CD}$ = $\frac{\overline{AB}}{4}$.

Na **categoria I** observamos que os sujeitos constituíram em seus campos semânticos, os pensamentos aritmético e geométrico. Observamos também que quatro sujeitos escreveram $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$, para isso, adotaram como conhecido o conjunto dos números racionais. Quando solicitamos a opinião dos grupos em relação a essa resposta, os sujeitos relataram que é muito difícil escrever

$\overline{CD}$ em função de $\overline{AB}$ sem utilizar frações e o quanto é difícil resolver situações problemas que exigem frações irredutíveis, ou seja, sem poder utilizar o conjunto dos números racionais.

Diante da situação problema discutimos a possibilidade de escrever $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$ sem usar a representação fracionária, mas não conseguimos encontrar uma outra solução.

**Categoria II**

- Temos $\overline{AB}$ = 9cm e $\overline{CD}$ = 3cm.Dessa forma: $\overline{AB}$ = n . $\overline{CD}$, onde n é inteiro diferente de zero e $\overline{CD} = \frac{\overline{AB}}{n}$.

Observamos na **categoria II** que o sujeito desenvolveu seu raciocínio algebricamente, generalizando a escrita de $\overline{AB}$ em relação à $\overline{CD}$. Isso nos dá a impressão da construção do conhecimento sendo constituída de forma a generalizar um conceito, no sentido do que pode ser válido para situações semelhantes, ou seja, em seu campo semântico o sujeito constituiu o pensamento algébrico.

Quando destacamos os grupos evidenciando pensamentos (aritmético, geométrico e algébrico) estamos salientando estipulações locais que foram constituídas em campos semânticos. Por exemplo:

- Estipulações locais a respeito de medição de segmentos – quando se tem no núcleo a ideia de que em um segmento de reta consigo subdividi-lo de forma que as subdivisões sejam unidades de medida de comprimento. Podemos tomar como estipulação local o pensamento aritmético, geométrico ou algébrico, a estipulação vai depender da forma como essa subdivisão será representada.

Após reflexões, propusemos aos sujeitos que respondessem à questão 3.

***Questão 3: Subdivida o segmento $\overline{CD}$ em partes iguais. Tomando cada parte como nova unidade de medida u, quantas vezes u cabe em $\overline{AB}$? Como escrever $\overline{AB}$ em relação à $\overline{CD}$? E $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$?***

Nessa questão algumas repostas se repetiram, portanto optamos por descrever as variações possíveis.

**Grupos A e B:**

- $\overline{CD}$ = 3*u*. Se $\overline{AB}$ = 3 $\overline{CD}$ e $\overline{CD}$ = 3*u*, temos: $\overline{AB}$ = 9*u* ou $\overline{AB}$ = $(\frac{9}{3})$ *u* e $\overline{CD}$ = $(\frac{3}{9})$ . $\overline{AB}$ ou $\overline{CD}$ = $(\frac{1}{3})$ . $\overline{AB}$.
- $\overline{CD}$ = 4*u*; $\overline{AB}$ = 6 $\overline{CD}$; $\overline{CD}$ =$\frac{\overline{AB}}{6}$ e $\overline{AB}$ = 24 *u*.
- Sendo *u* =$\frac{\overline{CD}}{2}$, u cabe 6 vezes em $\overline{AB}$; $\overline{AB}$ = 3 $\overline{CD}$.
- "No meu caso 16 vezes"; $\overline{AB}$ = 16 .$(\frac{\overline{CD}}{4})$; $\overline{CD}$ = 4 . $(\frac{\overline{AB}}{16})$; $\overline{CD}$ = $(\frac{1}{4})$ .$\overline{AB}$.
- $\overline{CD}$ = 3*u* e $\overline{AB}$ = 6*u*; $(\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}})$ = 2 e $(\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}})$ = $\frac{1}{2}$.
- $\overline{AB}$ = 12*u* e $\overline{CD}$ = 3*u*; $\overline{AB}$ = 4 $\overline{CD}$; $\overline{AB}$ = 12 .$(\frac{\overline{CD}}{3})$ $\rightarrow$ $\overline{AB}$ = $(\frac{12}{3})$. $\overline{CD}$e$\overline{CD}$ = $(\frac{3}{12})$

$\overline{AB}$ $\rightarrow$ $\overline{CD}$ = $\frac{\overline{AB}}{4}$.

- Se $\overline{CD}$ = 6*u* e $\overline{AB}$ = 4 $\overline{CD}$ $\rightarrow$ $\overline{AB}$ = 4.6*u* $\rightarrow$ $\overline{AB}$ = 24*u*.

  Se $\overline{AB}$ = 24*u* e $\overline{CD}$ = 6*u*, temos $\overline{AB}$ = 4 $\overline{CD}$ e $\overline{CD}$ = $(\frac{1}{4})$ .$\overline{AB}$.
- $\overline{AB}$ = 6*u* e $\overline{CD}$ = 2*u* $\rightarrow$ *u* = $\frac{\overline{CD}}{2}$.

  $\overline{AB}$ = 6*u* = 3 (2*u*) $\rightarrow$ *u* = 3 $(\frac{2u}{6})$.

  2*u* = $\frac{6u}{3}$ $\rightarrow$ *u* = $\frac{6u}{6}$.
- $\overline{CD}$ = 2*u* $\rightarrow$ *u* =$\frac{\overline{CD}}{2}$.

  $\overline{AB}$ = 3.2*u* = 6.*u* $\rightarrow$ $\overline{AB}$ = 6.

  $\frac{\overline{CD}}{2}$ $\rightarrow$ $\overline{AB}$ = 3 $\overline{CD}$ e $\overline{CD}$ =$\frac{\overline{AB}}{3}$.

Observamos que os sujeitos conseguem estabelecer unidades de medidas por meio das subdivisões e, necessariamente, precisam utilizar frações irredutíveis para escrever $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$. Nesse caso, os sujeitos construíram conhecimento em seus campos semânticos por meio dos pensamentos aritmético e geométrico. No entanto, utilizaram a representação fracionária para tal. Sobre isso, novamente dialogamos com os sujeitos que destacaram a importância do conjunto dos números racionais para a resolução de problemas cotidianos.

Em sequência propusemos a resolução da questão 4.

***Questão 4:Tomamos um novo segmento $\overline{AB}$ medindo 11cm, e um novo segmento $\overline{CD}$ medindo 3cm. Divida $\overline{CD}$ num número de partes iguais suficiente para que uma delas caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. O que se pode dizer da medida de $\overline{AB}$ em relação à antiga unidade $\overline{CD}$?***

Respostas dos sujeitos:

**Grupos A e B:**

- $\overline{CD}$ = 3*u* e *u* = $\frac{\overline{CD}}{3}$; $\overline{AB}$ = 11u e $\overline{AB}$ = 11. $\frac{\overline{CD}}{3}$.
- $\overline{AB}$ = 11cm e $\overline{CD}$ = 3 *a*'. "$\overline{CD}$ não cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$, mas se utilizarmos a' como medida temos: $\overline{AB}$ = 11 *a*'."
- $\overline{CD}$ = 3*x*; $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$= $\frac{11}{3}$*x*.
- *a* = $\frac{\overline{CD}}{3}$ e $\overline{AB}$ = 11 *a*. "$\overline{CD}$ não cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$."
- $\overline{AB}$ = 11*u*" e $\overline{CD}$ = 3*u*" → $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$ + 8*u*".
- $\overline{AB}$ = 11*cm* e $\overline{CD}$ = 3*cm* → $\overline{AB}$ = 3 $\overline{CD}$ + $\frac{2}{11}$.
- $\overline{AB}$ = 3. $\frac{2}{3}$. $\overline{CD}$e$\overline{CD}$ = 6*u*', temos:

  $\overline{AB}$ = 3 + ($\frac{2}{3}$) .$\overline{CD}$ = 3 + ($\frac{2}{3}$ ) . 6*u*' = 3 + ($\frac{12}{3}$) *u*' = ($\frac{9+12}{3}$) *u*' = ( $\frac{21}{3}$) *u*' = $\overline{AB}$.

  $\overline{CD}$ = ($\frac{3}{11}$) .$\overline{AB}$.
- $\overline{AB}$ = 11 e $\overline{CD}$ = 3

  $\overline{AB}$ = 3 $\overline{CD}$ + 2*u*
- $\overline{AB}$ = ($\frac{\overline{CD}}{3}$ ) . 11
- $\overline{AB}$ = 11 e $\overline{CD}$ = 3*u*

  $\overline{AB}$ = 3$\overline{CD}$ + 2*u*

Observamos nas repostas dos sujeitos à constituição dos pensamentos aritmético e geométrico e evidenciamos novamente o uso de números fracionários. Como consideramos desconhecido o conjunto dos números racionais, estamos diante de um problema. Como escrever $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$ visto que nessa relação obtemos números cujo numerador não é divisível pelo denominador, isto é, números não inteiros. Quanto a isso, Caraça (1989) nos faz refletir sobre o que ele chama de dilema.

**Dilema:**

*i*) ou renunciamos o que foi descrito e colocamos como falso;

*ii*) ou admitimos e temos que reconhecer a insuficiência dos inteiros.

Considerar como falso é renunciar a medição do segmento $\overline{AB}$ com a unidade $\overline{CD}$. Como destaca Caraça (1989) isso levanta novas questões, pois se podemos exprimir a medida em relação à nova unidade *u* e não em relação à antiga $\overline{CD}$, então a nova forma de medição tem mais privilégio que a outra? Por quê? E, se desejarmos exprimir sempre a medida por um número – *princípio da extensão* – então temos que reconhecer que o instrumento numérico conhecido até o momento – os números inteiros – é insuficiente para tal logo, temos que completá-lo, mas de que forma?

A esses questionamentos evidenciamos que a dificuldade está quando, em uma subdivisão da unidade em *n* partes iguais, uma dessas partes cabe *m* vezes na grandeza a medir, daí a dificuldade existe no caso da impossibilidade da divisão, isto é, quando *m* não é divisível por *n*.

Assim, para resolvermos a dificuldade precisamos criar um novo campo numérico e é por meio do *princípio da extensão* que fazemos isso. Dessa forma, torna-se possível exprimir a medida do segmento $\overline{CD}$ em relação ao segmento $\overline{AB}$ utilizando frações irredutíveis.

Caraça (1989) ainda destaca o *princípio da economia* que tem como fundamento utilizar novas definições e suas consequências nos moldes de antigas definições, para que a introdução delas no cálculo se faça com o menor desperdício de energia mental. Caraça (1989, p. 27) afirma que “[...] convém que as novas definições sejam dadas de modo tal que as leis formais das operações lhes sejam ainda aplicáveis”. Assim, quando observamos as escritas:

- Para $\overline{AB}$ = 6 cm e $\overline{CD}$ = 2 cm, temos: $\overline{AB}$ = 3$\overline{CD}$;

Ou ainda:

- Para $\overline{AB}$ = 4 cm e $\overline{CD}$ = 1 cm, temos: 4 $\overline{CD}$ = $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ = $\frac{1}{4}$ .$\overline{AB}$.

Até mesmo em generalizações do tipo:

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} .\overline{CD}, \text{ com } m \text{ e } n \text{ inteiros e } n \neq 0.$$

Evidenciamos que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$. No entanto, Caraça (1989) destaca que temos dois números inteiros que estão entre si na relação aritmética:

(*i*) ou *m* é divisível por *n*, o que teremos definido um quociente inteiro;

(*ii*) ou a qualidade de *m* não ser divisível por *n* nega a existência do quociente inteiro.

Se ocorrer a relação (*i*) o problema está resolvido no campo dos inteiros. Mas se ocorre a relação (*ii*) precisaremos *negar a negação*[23] da existência do quociente inteiro, isto é, construir o novo número – o fracionário – que constitui a nova parte do campo generalizado e compõe o novo campo numérico – **os números racionais**.

Não obstante, podemos generalizar a escrita desse número, o que tomamos como a definição dos números racionais:

**"Todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, com *m* e *n* inteiros e *n* ≠ 0".**

**Algumas Reflexões**

Após a construção do campo racional retomamos a pergunta inicial para realizarmos uma análise[24] sobre o conhecimento prévio (naquele momento) e sobre o conhecimento adquirido após a construção. Mencionamos esse questionamento como uma reflexão.

---

[23] Ver em Caraça (1989, p. 27 - 28). O autor retrata a explicação generalizada dessa relação que denomina como *a negação da negação*. No exemplo em questão, negar a negação é negar a existência de um terceiro número – o quociente - que nada mais é do que o resultado da operação de *m* por *n* no caso em que *m* é múltiplo de *n*. Caso contrário, precisamos negar a negação da existência desse terceiro número, isto é, ele existe, mas não é inteiro, é o número fracionário.

[24] Destacaremos mais adiante as análises das respostas **3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 16** e **20**do grupo A, devido ao tipo de análise que faremos.

***I)Após as construções efetuadas, alguns significados matemáticos foram produzidos. Dessa forma, defina novamente o que é número racional e justifique.***

**Grupo A**

1) "*É a divisão entre dois números inteiros, ou seja, a razão entre dois números inteiros, sendo que o denominador nunca seja zero*."

A **resposta 1** ficou mais fundamentada após a construção e algumas restrições foram evidenciadas, como por exemplo, o denominador ser diferente de zero. Nesse caso, nos parece, que o sujeito construiu conhecimento e constituiu o pensamento algébrico.

2) "*São todos os números que são representados na forma $\frac{A}{B}$, onde A e B são números inteiros e sendo $B \neq 0$*."

Na **resposta 2**, comparada com a primeira definição, evidenciamos a construção de conhecimento no que diz respeito a formulação para expressar um número racional. O sujeito constituiu o pensamento algébrico.

3) "*A mesma que eu defini, ou seja: o número racional é aquele escrito na forma de fração $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros e $b \neq 0$*."

4) "*A definição continua a mesma*."

5) "*Números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e b é diferente de zero*."

6) Não respondeu.

Na **resposta 6** o sujeito não respondeu a pergunta novamente, mas foi possível evidenciarmos na resposta inicial que o mesmo parece possuir conhecimento acerca da definição de números racionais e percebe isso por meio da medição de segmentos.

7) "*Todo número que possa ser escrito sobre a forma* $\frac{a}{b}$*, onde a e b são números inteiros e b é diferente de zero. O número racional é originário de subdivisão de unidades e dessa forma nem toda unidade corresponderá a uma subunidade que possa ser representada por um número inteiro, identificando-se assim, razão entre unidades* (*uma fração*)*. Dado a isso, o novo campo numérico, os racionais, visa englobar esses números*."

Na **resposta 7**evidenciamos que o sujeito construiu conhecimento no que diz respeito a representação de um número racional, e mais,fez sua descrição a partir do processo de medição de segmentos. Nesse caso o sujeito constituiu os pensamentos aritmético, geométrico e algébrico.

8) "*É o conjunto numérico criado após os inteiros que além de englobar os inteiros e naturais, englobam as dízimas periódicas e os decimais.*"

Na **resposta 8** o sujeito, inicialmente, visualiza o número racional como aquele que possui raízes exatas, o que constitui em seu campo semântico o pensamento aritmético. Isso nos faz questionar, por exemplo, o número $\frac{2}{3}$ que não possui raiz exata, se não seria racional segundo tal entendimento? Após a construção do campo racional, observamos que o sujeito faz uma associação do conjunto dos números racionais como sendo a união dos inteiros e dos naturais e também das dízimas periódicas e decimais. Com essa nova definição, entendemos que esse sujeito se apropriou dos "tipos" de números que representam o conjunto dos números racionais, mas não necessariamente conseguiu expressar isso de forma generalizada, quanto à definição dos racionais. É possível que em seu campo semântico não tenha sido constituído o pensamento algébrico.

9) "*É todo número inteiro escrito de forma A sobre B, sendo que B é um número diferente de zero* (*0*)."

Na **resposta 9** evidenciamos, na resposta inicial, que o sujeito relaciona a ideia de número racional com a ideia de quantificação e medida, mas isso não é feito de forma clara, por exemplo: na afirmação "*Porque pode ser quantificado, medido, analisado*", entendemos que o sujeito procurou expressar que racional é o número que pode ser medido por subdivisão de novos segmentos, o que não acontece com o irracional. Já na resposta após a construção do campo, evidenciamos que o sujeito compreendeu a definição de número racional, proposta por Caraça (1989), o que nos faz entender que houve construção do conhecimento requerido durante o processo, evidenciando a constituição do pensamento algébrico em seu campo semântico.

10) "*Um número inteiro dividido por outro inteiro diferente de zero*."

Na **resposta 10** evidenciamos a construção do conhecimento acerca da definição dos números racionais, pois na definição inicial o sujeito cita números que possuem a possibilidade de representação em fração geratriz, o que também é considerado uma representação para o número racional. Já na definição após construção do campo, esse sujeito descreve a definição de números racionais de forma generalizada, isso nos faz entender que ele constituiu significados em seu campo semântico o pensamento algébrico.

11) "*Todo número que pode ser representado na forma* $\frac{a}{b}$ *com a e b* $\in$ *Z e b* $\neq$ *0*."

12)"*Racional é todo número escrito com* $\frac{a}{b}$*, com b diferente de zero, essa foi a forma encontrada para resolver problemas do cotidiano.*"

13) "*Todo número que pode ser escrito na forma de fração* $\frac{a}{b}$*, a e b* $\in$ *Z e b* $\neq$ *0*."

14) "*É todo número que pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$ *com a e b inteiros e b* $\neq$ *0*."

15) "*É todo número que pode ser escrito em forma de fração e que o denominador seja diferente de zero*."

Na **resposta 15** ficou evidenciado, após construção do campo, que o sujeito completou seu pensamento algébrico quando destacou a restrição de que o denominador precisa ser diferente de zero. Por outro lado, não destacou que os números que constituem a fração são inteiros. Com isso, podemos dizer que o sujeito esqueceu ou que não observou essa necessidade. Curiosos com tal definição, optamos por perguntar aos demais sujeitos sua opinião sobre ela. Obtivemos como respostas: "*Ele sabe que são inteiros"; "apenas não colocou"; "está implícito"; "só esqueceu mesmo*".

16) "*Minha opinião é a mesma, número racional é o número que pode ser escrito na forma* $\frac{m}{n}$."

17) "*Todo número que pode ser escrito em forma de fração e o denominador seja ≠ 0.*"

Na **resposta 17** não conseguimos estabelecer uma analogia entre o conhecimento prévio e o construído após construção do campo, pois inicialmente o sujeito não definiu número racional. Após a construção, o sujeito descreve um pensamento algébrico para definição de número racional, apesar de não destacar que os números da fração são inteiros.

18) "*São operações matemáticas que podem ser escritas na forma* $\frac{a}{b}$ *naturais, com b ≠ 0*."

Na **resposta 18** evidenciamos, inicialmente, o pensamento algébrico de forma incompleta, pois o sujeito não destaca restrições do tipo: números inteiros, diferente de zero, que são essenciais para a definição dos racionais. Após construção do campo o sujeito identifica números racionais com operações matemáticas (pensamento aritmético), que a nosso ver pode ter sido construído por meio da medição de segmentos. Observamos também um pensamento algébrico incompleto, uma vez que destaca $\frac{a}{b}$ naturais.

19) "*São novas formas de representação numérica que utilizam uma fração*."

Na **resposta 19,** inicialmente, o sujeito descreve uma generalização para a definição de números racionais de forma incompleta, isso evidencia que o pensamento – seja ele algébrico ou aritmético – não está bem construído, de acordo com a obra Caraça (1989). Após a construção do campo, percebemos que o sujeito visualizou novas formas de representações numéricas. Acreditamos que elas tenham ocorrido por meio da medição de segmentos, mas o seu pensamento algébrico ou aritmético continua incompleto.

20) "*É todo aquele que pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$ *sendo a e b inteiros e b ≠ 0*."

21) “*Após as construções que efetuamos pude observar que, além do conjunto dos números racionais ser representado por aqueles números que podem ser escritos na forma fracionária* $\frac{a}{b}$*, ‘b’ tem que ser diferente de 0*.”

Na **resposta 21** evidenciamos que o sujeito, após a construção do campo, estruturou melhor sua definição inicial. Com isso podemos destacar que houve a construção de conhecimento por meio da constituição do pensamento algébrico, de acordo com o requerido.

22) “*Todo número escrito na forma* $\frac{a}{b}$ *com b ≠ 0 e ‘a’ e ‘b’ inteiros quaisquer*.”

Na **resposta 22** o sujeito, inicialmente, já possuía o pensamento algébrico, mas a restrição que os números que constituem a fração são inteiros não foi mencionada. Porém, após a construção do campo essa restrição foi destacada. Isso demonstra a construção do pensamento algébrico de forma mais completa.

Nas **respostas 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 16** e **20** os sujeitos reafirmam a definição inicial, o que caracteriza em seus campos semânticos, a constatação do pensamento algébrico. Isso nos faz refletir a respeito de duas possíveis situações:

(*a*) os conhecimentos prévios foram reafirmados com a construção do campo;

(*b*) a construção do campo não contribuiu para a construção de um conhecimento mais próximo ou semelhante ao aceito matematicamente.

Diante dessas reflexões, perguntamos verbalmente aos sujeitos da pesquisa o que achavam a respeito de tais situações. Obtivemos como respostas: “*A construção contribuiu muito para o entendimento da definição de número racional”; “foi um processo simples e objetivo”; “proporcionou entendimento sobre a construção dos números racionais e essa necessidade”; “a construção do campo surgiu de uma necessidade com relação à medida”.*Com tais repostas, concluímos que a construção do campo racional contribuiu para a construção de conhecimentos acerca da constituição da definição dos números racionais.

**Análise das respostas dos sujeitos**

**Grupo B**

1) "*É todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com b ≠ 0. Agora eu justificaria com a construção que fizemos, antes eu não teria justificativa*."

Na **resposta 1**, o pensamento do sujeito permanece o mesmo após a construção do campo. No entanto, ele destaca que construiu conhecimento sobre tal definição por saber justificá-la, conhecimento que não possuía antes da construção. Nesse caso, o sujeito construiu conhecimento em seu campo semântico, uma vez que sua crença-afirmação antes não justificada agora possui uma justificação.

2) "*Poderia acrescentar que: considerando 'medir' como o ato de comparar, ao comparar medidas nos deparamos com situações em que o resultado desta comparação não é um número inteiro*."

Na **resposta 2**, após a construção do campo, o sujeito explica seu pensamento algébrico. Isso evidencia que ele construiu conhecimento, na relação crença-afirmação + justificação, como proposto no MCS.

3) "*A construção criada foi o espelho de como devemos constituir esse conceito no ensino fundamental. Construímos que a formação dos R se dá escrito de forma $\frac{a}{b}$ com a e b ∈ IR e b ≠ 0*."

Na **resposta 3** o sujeito destaca, inicialmente, o pensamento algébrico que aprendeu na escola, afirmando que nunca viu discussão diferente, o que nos permite dizer que esse pensamento algébrico não havia sido construído. Após o processo, o sujeito destaca que a construção desenvolvida proporcionou o entendimento do conceito de números racionais e que esta deveria ser ensinada desde o Ensino Fundamental. Para nós, isso demonstra que houve a construção do conhecimento acerca de números racionais, a qual, nos parece não ter sido efetivada por esse sujeito na Educação Básica nem mesmo durante a graduação.

Por fim, perguntamos aos sujeitos qual a opinião deles sobre o processo desenvolvido para a construção do campo racional. Obtivemos como respostas:

**Grupos A e B**

- *"A forma abordada foi bem elaborada e observo que a didática pode facilmente ser utilizada para ensino."*

- *“Achei um processo interessante e de fácil compreensão.”*
- *“Aprendi aqui no curso de Licenciatura em Matemática. Até então, não sabia como se tinha chegado a esta conclusão. Após ensinado, fica mais fácil de assimilar.”*
- *“Maneiro.”*
- *“Simples e objetivo. Foi uma necessidade.”*
- *“A forma que a professora conduziu a aula foi muito construtiva, se torna mais fácil de ‘enxergar’ como se criou os números racionais.”*
- *“Um projeto ótimo, pois conseguiu passar de forma lúdica uma matéria tão complexa.”*
- *“Claro e objetivo.”*
- *“Mostrou como foi observado a necessidade de criar um novo conjunto numérico, pois até então só se conhecia os números inteiros.”*
- *“Este processo é diferente e interessante, pois ensina desde o início. Foi demonstrado passo a passo.”*
- *“Realmente muito peculiar e interessante.”*
- *“A construção do campo racional se deu para satisfazer uma necessidade com relação à medida, uma vez que os números inteiros não conseguiram satisfazer tal situação.”*
- *“Foi um processo rápido e simples, que facilita o entendimento e ajuda a compreender de forma que fixe e seja uma memória duradoura.”*
- *“Amplitude da visão no campo educacional e a partir daí buscar mais informações para melhor explicar aos alunos.”*
- *“Foi realmente boa e pela sua eficiência didática, talvez seja a melhor forma de exposição em turmas da educação básica.”*
- *“Um processo natural, onde sua construção deve-se às necessidades encontradas primeiramente no campo das medidas.”*
- *“É fundamental para podermos efetuar as construções de medidas.”*
- *“Bastante interessante, já que, mostra que subdividindo a unidade encontramos frações equivalentes.”*
- *“Contribuiu para o entendimento da fração como uma divisão.”*
- *“Acredito que mostra a construção para depois definir o que é um número racional é importante pelo fato de isso atribuir significado para o aluno.”*

- *"Excelente! Hoje pude aprender como inserir esse conteúdo no Ensino Fundamental."*

Observamos por meio da opinião dos sujeitos que o método de construção do campo racional via medição de segmentos proporcionou a construção do conhecimento (crença-afirmação + justificação), seja ele com pensamento aritmético, geométrico ou algébrico. Podemos evidenciar que o processo descrito permitiu esclarecer dúvidas e justificar o porquê da definição de números racionais para boa parte dos sujeitos.

5.3.2 Construção do Campo Irracional

Na Grécia Antiga os pitagóricos acreditavam e defendiam que as razões formadas por números inteiros poderiam expressar a proporcionalidade entre as medidas de quaisquer segmentos, tanto que antes da demanda provocada por Cílon (CHAVES, 2004), no que tange à inexistência de um número que elevado ao quadrado fosse igual a 2 (como contraposição a veracidade do teorema de Pitágoras no que se refere ao cálculo da diagonal do quadrado de lado 1), defendia-se que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado era comensurável.

Em alguns textos, como Boyer (2003),Chaves (2004)[25]e Bentley (2009), tal demonstração (a da incomensurabilidade da razão entre a diagonal e o lado do quadrado) gerou uma crise na Matemática grega. Já para Roque (2012) esta demonstração contribuiu para o desenvolvimento dos campos numéricos. Boyer (2003, p. 50) afirma que "os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade Matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros". Isto porque os pitagóricos não aceitavam a nova descoberta, pois iria contrariar suas teorias iniciais, tal como podemos observar na citação a seguir.

---

[25] Chaves (2004) afirma que Apolônio, Aristóxeno, Diógenes de Laércio divergem quanto ao fim de Pitágoras, mas que não há divergência histórica em relação ao episódio que gerou o massacre à academia pitagórica e a seus seguidores. Segundo tal obra, há referências explícitas de que Cílon era o principal articulador das polêmicas levantadas a respeito do discurso de Pitágoras e o principal motivo que o levou a nutrir tamanho ódio pelo geômetra: "*ele fora rejeitado por Pitágoras quando se candidatou à Escola devido a seu comportamento violento e imperioso*". O argumento central de Cílon é pautado exatamente na **inexistência desse tal número que elevado ao quadrado fosse 2**. "*A tática adotada por Cílon — de deturpação de seu discurso — objetivara extirpar não apenas as verdades, as palavras e as ideias pitagóricas, mas sim fazer sucumbir quaisquer vestígios de sua existência em Crotona*" (p.40 - 41).

> Os pitagóricos descobriram seu erro muito cedo, mas isso foi considerado tão chocante e herético que a verdade foi ocultada. Ironicamente, a verdade veio de um dos grandes de seus feitos – o famoso teorema pitagórico (BENTLEY, 2009, p. 53).

O Teorema de Pitágoras proporcionou que se chegasse a um número cujo quadrado não se sabia a existência e não fazia parte de nenhum campo numérico conhecido até o momento, como expressamos anteriormente. “Portanto, se não há nenhum número natural e nenhum número racional que quando elevado ao quadrado, seja igual a 2, deve existir um outro novo tipo misterioso de número. Um número antinatural. Um número que não podemos escrever” (BENTLEY, 2009, p. 54).

No entanto, toda essa discussão sobre a não aceitabilidade da existência de segmentos incomensuráveis pelos pitagóricos é questionada por muitos estudiosos da História da Matemática. Roque (2012) destaca que a possibilidade de existirem grandezas incomensuráveis não teria provocado nenhuma crise na Matemática grega. Pelo contrário, a nova descoberta teria ajudado no desenvolvimento de procedimentos matemáticos para o uso com razões e proporções. No século IV a. C., por exemplo, Eudoxo de Cnidos (408 a.C. - 355 a.C.), com sua *Teoria das Proporções*[26], redefiniu um conceito mais geral de razão entre dois segmentos comensuráveis ou não, utilizando apenas os números inteiros positivos. No entanto, como descreve Ávila (2006, p. 54) “[...] embora tenha sido uma solução genial da crise dos incomensuráveis, ela atrasou por mais de mil anos o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra [...]”.

Já no século XVI, Viéte (1540 - 1603)considerou a noção de número e grandezas geométricas distintas. Para os geômetras gregos, a noção de número irracional não era clara embora, em problemas práticos, utilizassem aproximações racionais dos valores irracionais, como para o número π e para o número $\phi$ (número de ouro)[27].

> [...] Pela conjectura de Mendelssohn, os desesperados construtores, tendo acabado de assistirem o desmoronamento da segunda pirâmide, mudaram o ângulo para evitar que a mesma coisa acontecesse a terceira. Acontece que, numa pirâmide de 43,5 graus, a razão entre o perímetro e a altura é de 3π, aliviando a carga (o peso que a estrutura suporta) e mais uma vez indicando a possível preocupação com o número π [...].
> Pelas medidas originais, a razão entre qualquer dos lados da base e altura é 1,57, valor bem próximo da razão áurea (1,62). E, se inscrevermos a

[26] Ver em Ávila (2006, p. 53 - 55). O autor descreve essa teoria construída por Eudoxo.

[27] Tal como se pode observar em Atalay (2009) quando menciona a preocupação de construtores de pirâmides em tomar como perímetro da base quadrada, o comprimento da circunferência e cuja altura da mesma seja igual ao raio.

> pirâmide de Quéops num retângulo áureo, a ponta da pirâmide se estenderá só um pouquinho para fora. O mais importante: caso nos atenhamos apenas a uma das faces da pirâmide, veremos que a razão entre a altura desse triângulo e a metade da largura da base é exatamente 1,62 [...] (ATALAY, 2009, p. 96-97).

Além disso, Ávila (2006) destaca que os matemáticos gregos trabalhavam naturalmente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo suas propriedades, sem constituírem uma formulação teórica que as justificasse. Como menciona Cezar (2011) muitos acreditam que a descoberta da existência dos números irracionais se da à descoberta do número π, visto que se formarmos a razão entre comprimento e diâmetro de um círculo não é possível provar sua racionalidade. Outros até mencionam que a descoberta da incomensurabilidade está atribuída à aplicação do Teorema de Pitágoras, mas não têm certeza dessa afirmação, pois de acordo com os relatos de Roque (2012), por exemplo, os chineses já conheciam o teorema e nem por isso descobriram a irracionalidade da diagonal. Ainda que não se tenha certeza que foram os pitagóricos que chegaram aos incomensuráveis e que tenha existido uma crise na Matemática grega, o fato é que o problema existiu e se prolongou por séculos até que se fundamentassem teoricamente a existência dos números irracionais e dos números reais.

**Campo Irracional**

Após descrevermos um pouco da história dos números irracionais iniciamos a construção do campo irracional respondendo a questão 1 do questionário IV. Durante as leituras dessas respostas resolvemos realizar algumas pontuações, especificamente em relação às falhas no que se refere à definição. Tais falhas nos levou a refletir a respeito de quais foram os processos de ensino e de aprendizagem vivenciados por esses sujeitos. Pontuamos as **respostas 1, 3, 5, 6** e **8** do grupo A e **todas as respostas** do grupo B.

**Análise do Questionário IV: construção do campo irracional**

***Questão 1: Defina, o que é número irracional. Justifique.***

Respostas dos sujeitos:

**Grupo A**

1) "*Todo número que pode ser escrito na forma de fração*."

Quando nos deparamos com a **resposta 1** refletimos se realmente foi dessa maneira que o sujeito quis defini-la. Acreditamos que ele "esqueceu-se" de colocar a palavra "não", evidenciando "não pode ser escrito". Curiosos com tal situação, no encontro seguinte, perguntamos aos sujeitos o que eles haviam entendido com tal resposta, com isso, tivemos algumas reflexões: *"acredito que ele tenha esquecido do não"*; *"acho que ele quis dizer não pode ser escrito"*; *"respondeu errado mesmo"*; *"com certeza esqueceu do não"*.

2) "*É todo número que não pode ser escrito na forma de fração*."

3) "*Um número que não pode ser escrito sobre a forma de fração, pois não possui um número de casas finitas*."

Ao lermos a **resposta 3** nos questionamos em relação à dízima periódica, pois esse tipo de representação numérica não possui um número de casas finitas. Logo, a definição destacada nos deixa a impressão de que a dízima periódica poderia ser um número irracional. No entanto, a dízima periódica pode ser escrita na forma de fração. Portanto, a definição é contraditória. Quando apresentamos para os sujeitos a definição "*Um número que não pode ser escrito sobre a forma de fração, pois não possui um número de casas finitas*" não obtivemos respostas. Quando solicitamos que a lessem novamente, alguns sujeitos perceberam que existia algo de estranho na afirmação, mas não conseguiram explicar o que. Foi então que exemplificamos com a dízima periódica, e só assim os sujeitos observaram que tal definição não seria apropriada, visto que ela gera uma contradição.

4) *"Números irracionais são números que não nos permitem determinar sua forma escrita* (*numérica*) *tendo em vista o seu tamanho*."
5) "*É um número que não pode ser obtido pela divisão de 2 números inteiros. É um número que não é racional*."

Na **resposta 5,** quando lemos "*número que não é racional*", a primeira ideia que nos surgiu foi de que $\sqrt{-1}$ não é racional. Observamos – como descrito no segundo capítulo − que algumas dúvidas em relação a esse fato podem ser geradas. Diante disso pensamos ser importante conversar com os sujeitos dos dois grupos de pesquisa sobre tal situação para refletirmos a respeito da forma que nós professores, e futuros professores, de Matemática propomos uma definição, principalmente para os alunos da Educação Básica. O diálogo realizado com os sujeitos nos fez refletir a respeito de uma série de definições que utilizamos para ensinarmos números irracionais, como a de que existem números que não são racionais, mas também não são irracionais como parte dos números complexos.

Prosseguindo a discussão, um dos sujeitos participante da pesquisa perguntou: *"Se o número racional é todo número que pode ser escrito na forma de fração, por que quando determinamos o número π da forma* $\frac{C}{D}$ *onde C é o comprimento do círculo e D é o diâmetro do círculo, dizemos que este número é irracional se está escrito na forma de fração?"* Quando o sujeito apresentou tal enunciação, refletimos mais uma vez na forma como o ensino dos números reais tem se difundido na Educação Básica e pensamos no problema da definição do mesmo para a formação do aluno. Diante de tal enunciação refletimos com os sujeitos os possíveis significados de representar um número na forma de fração e o que representa a razão entre dois números. Perguntamos se algum sujeito gostaria de responder a pergunta. Como não tivemos voluntários, nos propusemos a responder. Delineamos a questão da seguinte forma:

- A representação de fração é possível quando numerador e denominador são compostos por números inteiros cujo zero não pode vir no denominador.

- O traço na representação de uma fração representa divisão.

- A divisão pode ser representada utilizando o traço que temos na representação de uma fração, mas nem sempre estamos tratando de uma fração. Podemos tratar de uma razão entre números.

- Assim, $\frac{C}{D}$ não representa uma fração, mas sim, uma razão entre números, onde um deles será racional e o outro irracional. Portanto, nesse caso, a representação indica uma razão entre números, isto é, uma divisão. Após essas reflexões foi possível entender tal diferença.

6) "*Número irracional é um número que representa uma grandeza incomensurável, pois com os conjuntos até então criados* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *não é possível expressar a medida desses segmentos*."

Na **resposta 6** quando o sujeito destaca a impossibilidade de representarmos medidas de segmentos com os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e menciona a existência da incomensurabilidade, entendemos que o sujeito construiu conhecimento sobre o campo irracional.

7) Não respondeu.
8) "*É um número dizimal que não pode ser representado na sua total exatidão com os algarismos que utilizamos, pois representam segmentos incomensuráveis com as unidades que conhecemos e utilizamos*."

Na **resposta 8** ficamos confusos quando o sujeito definiu número irracional como "*um número 'dizimal'*". Para enfatizar nossa reflexão pesquisamos o significado da palavra *dízima*: "fração decimal de um número, que se repete indefinidamente" (HOUAISS, 2011, p. 314). Assim, pensamos que o sujeito quis relacionar a uma dízima não-periódica.

9) "*Número irracional é todo número que não está presente no conjunto dos números racionais, dado 'ao vazio representativo desses números' numa reta composta por números reais*."
10) "*Número irracional é todo aquele que não pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$*, sendo a e b pertencentes ao grupo dos números inteiros e b ≠ 0.*"
11) "*Número irracional são números que não podem ser escritos em forma de fração e números de parte decimal, não periódica, infinita*."
12) "*São números que não podem ser escritos na forma de fração. Ex: π*."
13) "*Número irracional é um número que não pode ser escrito como uma fração irredutível**;** como exemplo podemos citar a* $\sqrt{2}$*, pois seu resultado não é um número inteiro e nem uma fração irredutível*."
14) "*É a razão entre dois números que não podem ser divididos entre números inteiros*."

**Grupo B**

1) "*É um número que não podemos escrever na forma* $\frac{a}{b}$*, sendo a e b inteiros. São números reais, mas não racionais*."

2) “*Que não faz parte do conjunto dos números racionais, o número não pertence ao conjunto dos números racionais*.”
3) “*É um número real não racional. Isto é, dado um número irracional x, ∄ a e b inteiros (b ≠ 0), tais que x =* $\frac{a}{b}$.”

Nas **respostas 1** e **3** observamos que os sujeitos se preocupam em destacar que os números são reais, mas não racionais, com isso evitam falhas de interpretação.

Na **resposta 2**o sujeito ao pontuar que o número irracional “*não faz parte do conjunto dos números racionais*[...]*”* deixa lacunas, por exemplo, quanto a $\sqrt{-1}$como já mencionado.

Analisadas algumas repostas iniciais prosseguimos com a construção do campo irracional por meio da crítica do problema da medida denominada assim por Caraça (1989). Optamos por adotar a nomenclatura crítica da solução do problema da medida.

**Crítica da solução do problema da medida**

Iniciamos a construção do campo irracional refletindo a respeito da solução do problema da medida. Para tal, discutimos sobre a questão: **Sempre existe uma subdivisão de $\overline{CD}$ que cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$?** A maioria dos sujeitos respondeu *“não”*. Propusemos então, aos mesmos, que buscassem uma resposta mais precisa. Para tal, adotamos como desconhecido o conjunto dos números irracionais, naquele momento, com o intuito de fazê-los perceber a necessidade dos números irracionais em situações problemas, como por exemplo, no cálculo da diagonal de um quadrado. Na verdade, buscamos a reflexão dos sujeitos a respeito de como resolver um problema que envolve um valor desconhecido e como provar que este valor não é um número racional. Na busca desse propósito propusemos a questão 2.

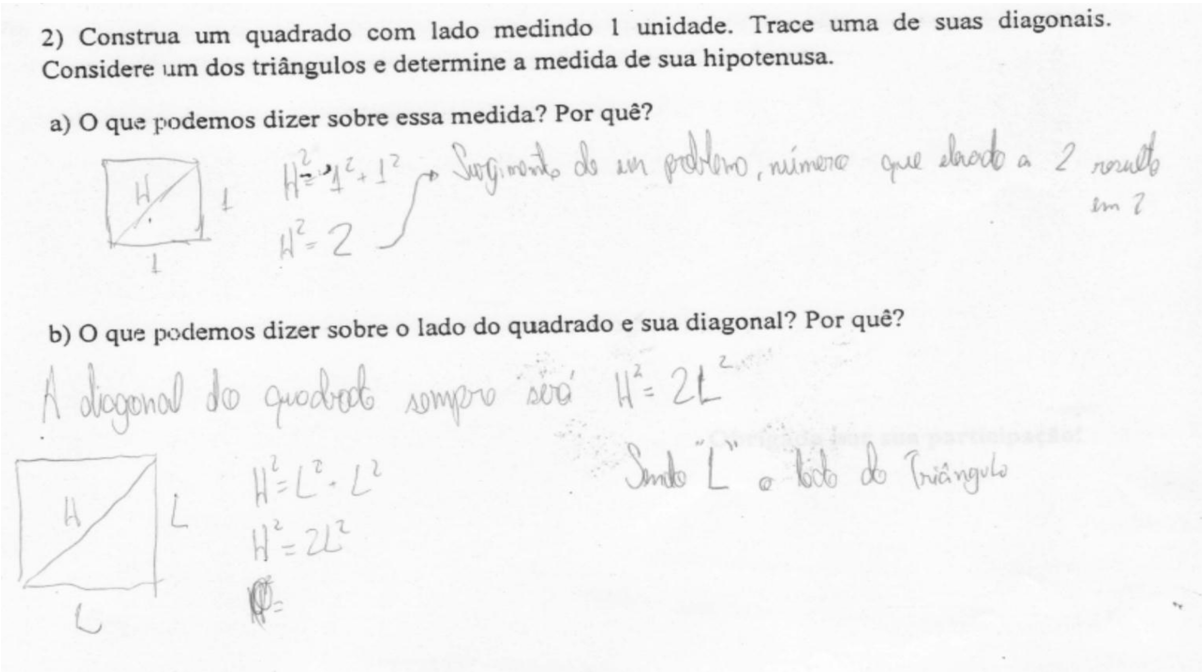
***Questão 2: Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.***

***a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?***

***b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?***

Repostas dos sujeitos: **Grupos A e B**

Figura 4: resposta do sujeito A


2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

$H^2 = 1^2 + 1^2$ → Surgimento de um problema, número que elevado a 2 resulta em 2

$H^2 = 2$

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

A diagonal do quadrado sempre será $H^2 = 2L^2$

Sendo "L" o lado do Triângulo

$H^2 = L^2 + L^2$

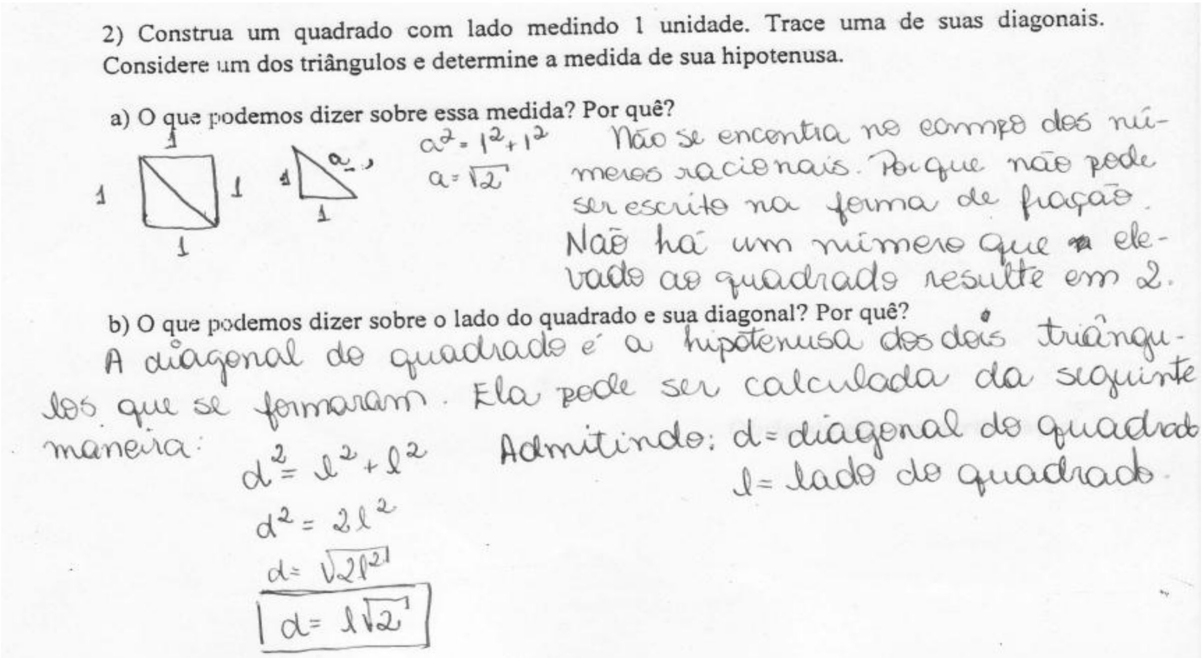
$H^2 = 2L^2$

Fonte: Questionário de pesquisa IV

O **sujeito A**, em sua reposta, pontua a ocorrência de um problema, ao determinar a existência de um número cujo quadrado é igual a 2. Evidenciamos que o sujeito destaca essa situação, pois para resolver tal problematização adotamos como desconhecido os números irracionais.

Os **sujeitos B, C, D** e **E** observam, em suas respostas, a existência de um número cujo quadrado seja igual a 2, mas representam isso usando a simbologia $\sqrt{2}$. Nesse caso, não poderíamos utilizar esta simbologia, uma vez que adotamos como desconhecido os números irracionais. Entretanto, o sujeito B explica que este número não existe no campo dos racionais, pois não possui a escrita representada como tal. Dessa forma, podemos destacar que o sujeito construiu conhecimento acerca da definição de números racionais. Além disso, tem em seu campo semântico o pensamento algébrico bem constituído.

Figura 5: resposta do sujeito



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

$a^2 = 1^2 + 1^2$

$a = \sqrt{2}$

Não se encontra no campo dos números racionais. Porque não pode ser escrito na forma de fração. Não há um número que elevado ao quadrado resulte em 2.

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

A diagonal do quadrado é a hipotenusa dos dois triângulos que se formaram. Ela pode ser calculada da seguinte maneira:

Admitindo: d = diagonal do quadrado
l = lado do quadrado

$d^2 = l^2 + l^2$

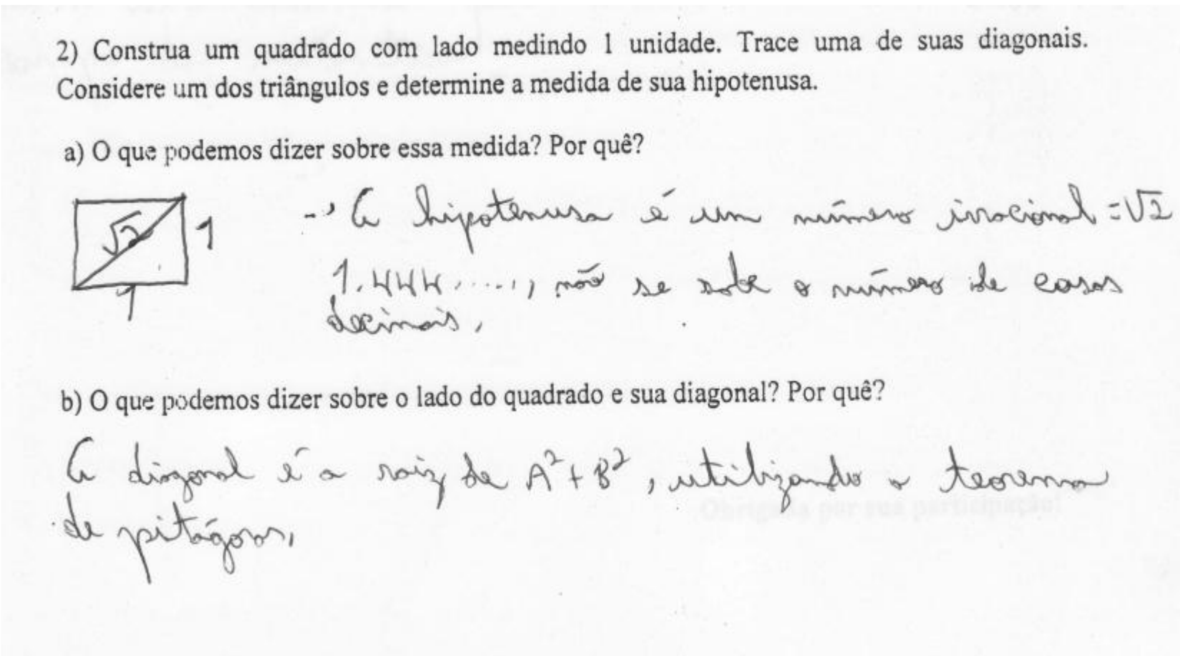
$d^2 = 2l^2$

$d = \sqrt{2l^2}$

$\boxed{d = l\sqrt{2}}$

Fonte: Questionário de pesquisa IV

Figura 6: resposta do sujeito C



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

→ A hipotenusa é um número irracional $= \sqrt{2}$
1.444....., não se sabe o número de casas decimais,

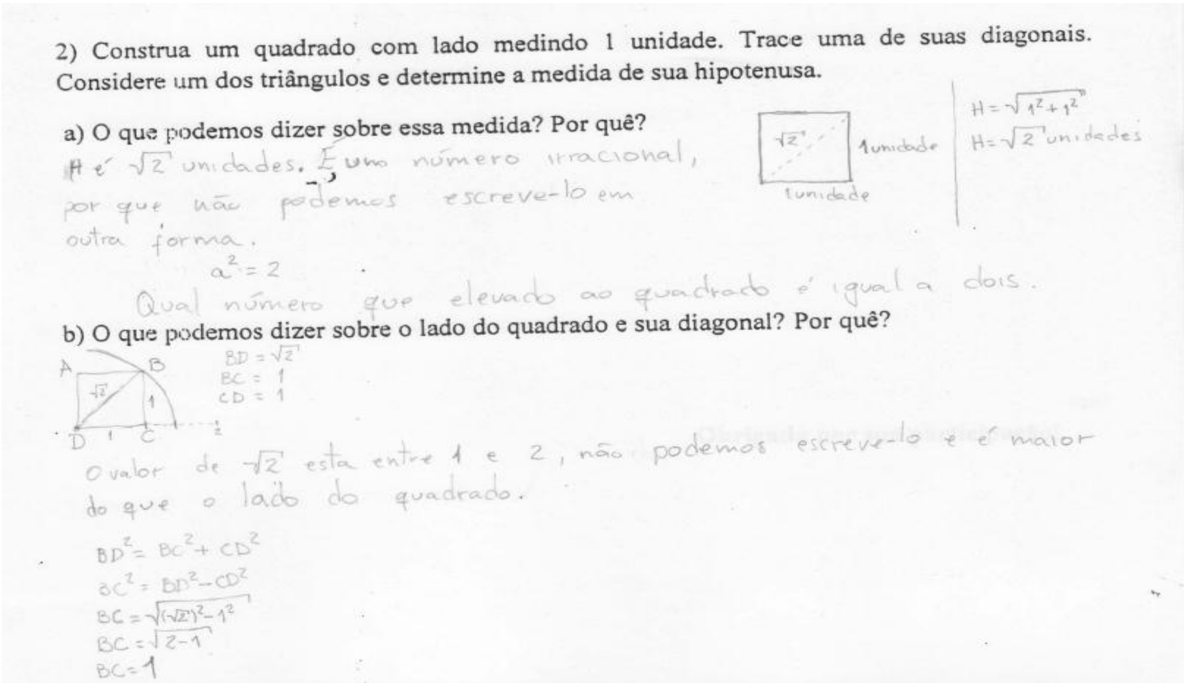
b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

A diagonal é a raiz de $A^2 + B^2$, utilizando o teorema de pitágoras,

Fonte: Questionário de pesquisa IV

O **sujeito C**, por sua vez, destaca a $\sqrt{2}$ na forma de dízima periódica e descreve que não é possível detectar suas casas decimais. Nessa situação observamos uma incoerência, uma vez que o sujeito estabelece uma igualdade entre um número irracional e um número racional. Evidenciamos, nessa situação, que o sujeito não possui bem construído o conhecimento acerca da definição de números racionais, segundo o que a academia tem validado. Com isso, dizemos que em seu campo semântico o pensamento algébrico e aritmético não está bem constituído, nesse caso.

Figura 7: resposta do sujeito D



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

H é $\sqrt{2}$ unidades. É um número irracional, por que não podemos escreve-lo em outra forma.

$a^2 = 2$

Qual número que elevado ao quadrado é igual a dois.

$\sqrt{2}$ 1unidade 1unidade

$H = \sqrt{1^2+1^2}$

$H = \sqrt{2}$ unidades

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

A B D 1 C 2 $\sqrt{2}$ 1

$BD = \sqrt{2}$
$BC = 1$
$CD = 1$

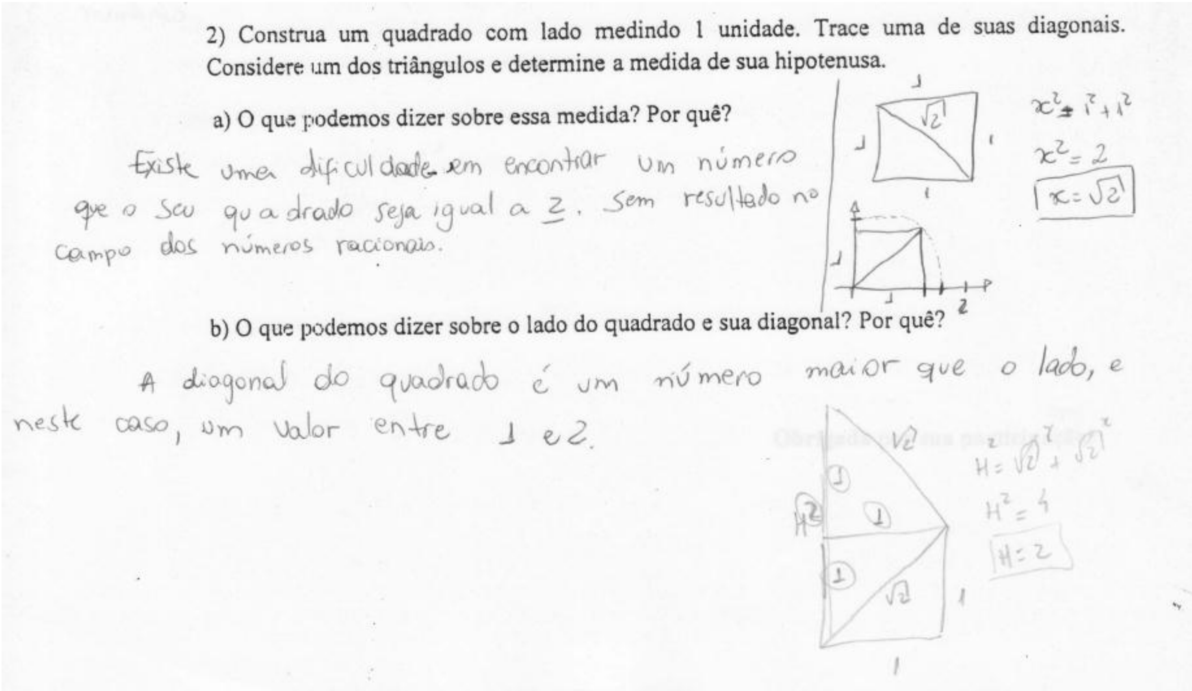
O valor de $\sqrt{2}$ esta entre 1 e 2, não podemos escreve-lo e é maior do que o lado do quadrado.

$BD^2 = BC^2 + CD^2$
$BC^2 = BD^2 - CD^2$
$BC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$
$BC = \sqrt{2-1}$
$BC = 1$

Fonte: Questionário de pesquisa IV

Os **sujeitos D** e **E** também utilizam $\sqrt{2}$, mas a reconhece como um número irracional. Além disso, fazem uma análise diferenciada quanto ao valor desse número. Utilizando régua e compasso constatam que o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. Nesse caso, evidenciamos que os sujeitos construíram conhecimento e em seu campo semântico constituíram um pensamento geométrico. Além disso, fizeram uma comparação da medida da diagonal e do lado do quadrado, sendo a primeira medida maior que a segunda. Isso reforça a construção do pensamento geométrico e também do aritmético.

Figura 8: resposta do sujeito E



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

Existe uma dificuldade em encontrar um número que o seu quadrado seja igual a 2. Sem resultado no campo dos números racionais.

$x^2 = 1^2 + 1^2$

$x^2 = 2$

$\boxed{x = \sqrt{2}}$

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

A diagonal do quadrado é um número maior que o lado, e neste caso, um valor entre 1 e 2.

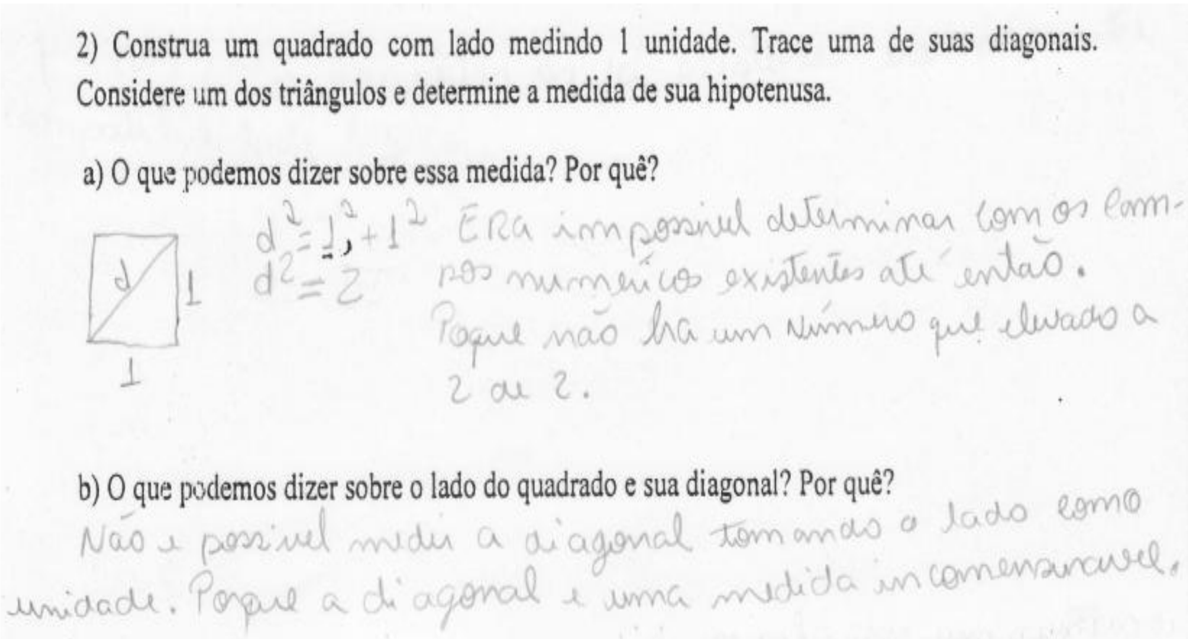
$H = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2$

$H^2 = 4$

$\boxed{H = 2}$

Fonte: Questionário de pesquisa IV

Figura 9: resposta do sujeito F



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

ERA impossível determinar com os campos numéricos existentes até então. Porque não há um número que elevado a 2 dê 2.

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

Não é possível medir a diagonal tomando o lado como unidade. Porque a diagonal é uma medida incomensurável.

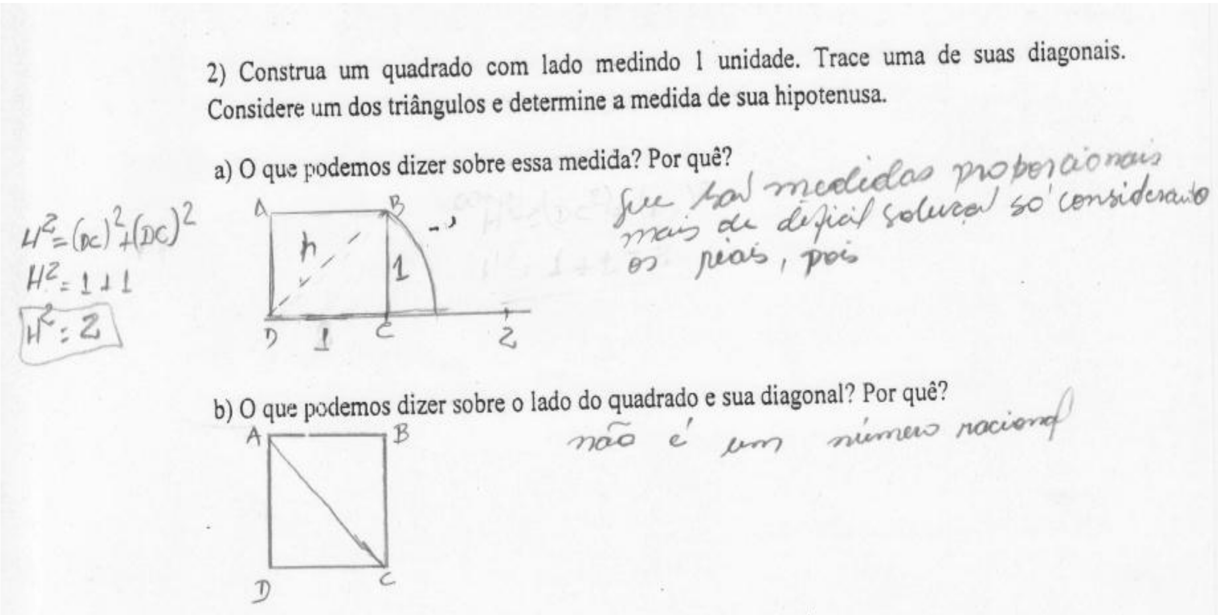
Fonte: Questionário de pesquisa IV

O **sujeito F** destaca a impossibilidade de medirmos a diagonal tomando o lado do quadrado como unidade, e menciona a existência de medidas incomensuráveis.

Nesse caso, observamos que o conhecimento do sujeito acerca de segmentos incomensuráveis está em construção. Observamos isso quando o sujeito abordou que a diagonal é uma medida incomensurável. Porém nos questionamos sobre qual medida teria feito tal comparação. Curiosos sobre tal questão, perguntamos aos sujeitos participantes o que eles observaram sobre essa resposta. Obtemos como respostas: "*pela escrita anterior"; "o aluno compara a diagonal com a medida do lado do quadrado"; "ele quis dizer lado e diagonal*".

A respeito desse fato, também temos a opinião de que o sujeito compara a medida do lado do quadrado e de sua diagonal para relacionar como segmentos incomensuráveis. Entendemos que o sujeito, em seu campo semântico, construiu pensamento aritmético e geométrico.

Figura 10: resposta do sujeito G



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

$H^2=(DC)^2+(DC)^2$

$H^2=1+1$

$\boxed{H^2=2}$

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

Que tais medidas proporcionais mais de difícil solução só considerando os reais, pois

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

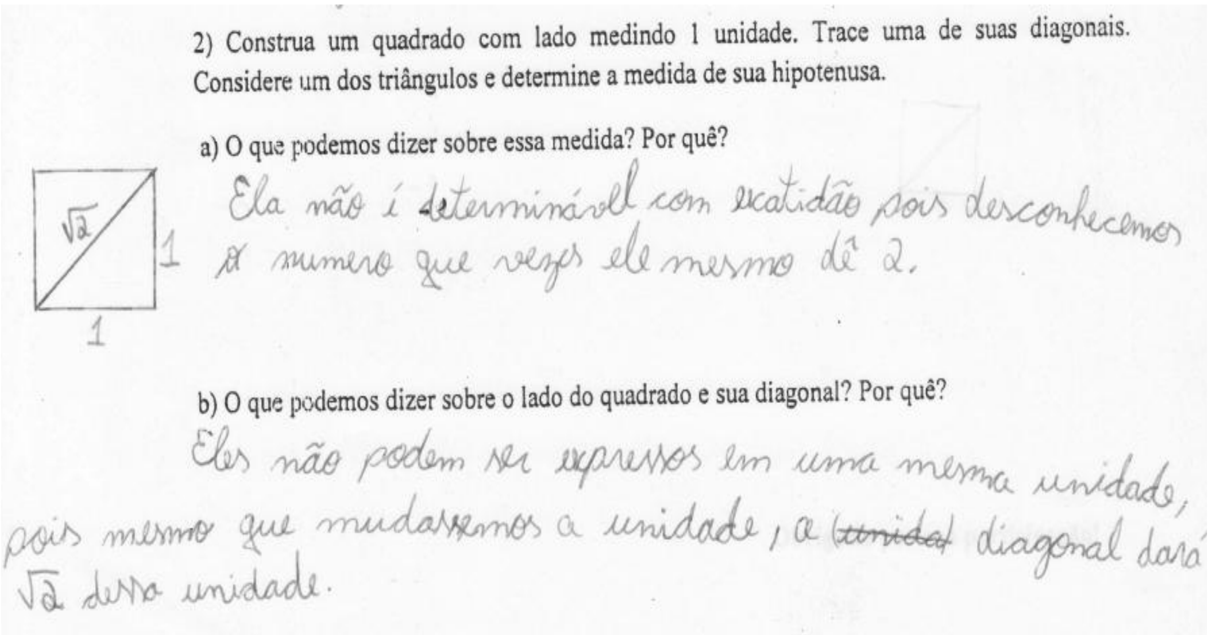
não é um número racional

Fonte: Questionário de pesquisa IV

O **sujeito G** não completa sua explicação, o que dificulta nossa análise. Além disso, considera as medidas (acreditamos que seja a do lado e a da diagonal do quadrado) proporcionais. Nesse caso, como estamos comparando medidas racionais e irracionais, não existe proporcionalidade. Observamos também que o sujeito parece não compreender o significado de proporcionalidade. Por outro lado, construiu conhecimento geométrico com a utilização de régua e compasso para a aproximação do valor da diagonal.

Em relação à resposta da letra *b*, o sujeito é incoerente, pois de acordo com a pergunta se faz necessário estabelecer uma relação entre o lado do quadrado e sua diagonal, mas o sujeito destaca que "*não é um número racional*". Nesse caso, acreditamos que o sujeito talvez não tenha compreendido a pergunta.

Figura 11: resposta do sujeito H


2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

$\sqrt{2}$ 1 1

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

Ela não é determinável com exatidão pois desconhecemos o número que vezes ele mesmo dê 2.

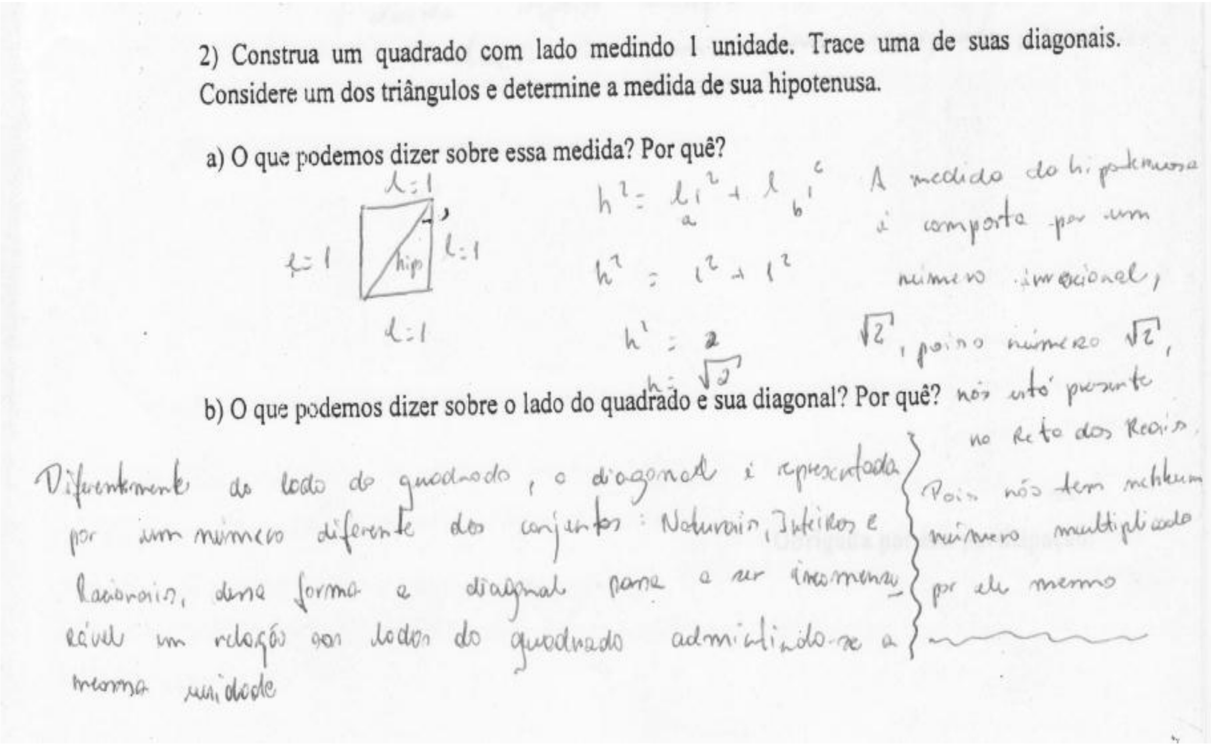
b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

Eles não podem ser expressos em uma mesma unidade, pois mesmo que mudássemos a unidade, a ~~unidade~~ diagonal dará $\sqrt{2}$ dessa unidade.

Fonte: Questionário de pesquisa IV

O **sujeito H**, em sua reposta, toma como desconhecido os números irracionais, assim como proposto. Possui em seu campo semântico o pensamento aritmético ao abordar "*o número que vezes ele mesmo dê 2*". No entanto, em sua representação, ainda utiliza como simbologia a $\sqrt{2}$. O sujeito também destaca que o lado do quadrado e sua diagonal não podem ser expressos em uma mesma medida. Com isso, observamos que o sujeito construiu conhecimento durante o processo de construção do campo racional, via medição de segmentos.

Figura 12: resposta do sujeito I


2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

$\ell = 1$, hip

$h^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2$

$h^2 = 1^2 + 1^2$

$h^2 = 2$

$h = \sqrt{2}$

A medida da hipotenusa é comporta por um número irracional, $\sqrt{2}$, pois o número $\sqrt{2}$, nós estó presente no Reto dos Reais. Pois nós tem nehum número multiplicado por ele mesmo

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

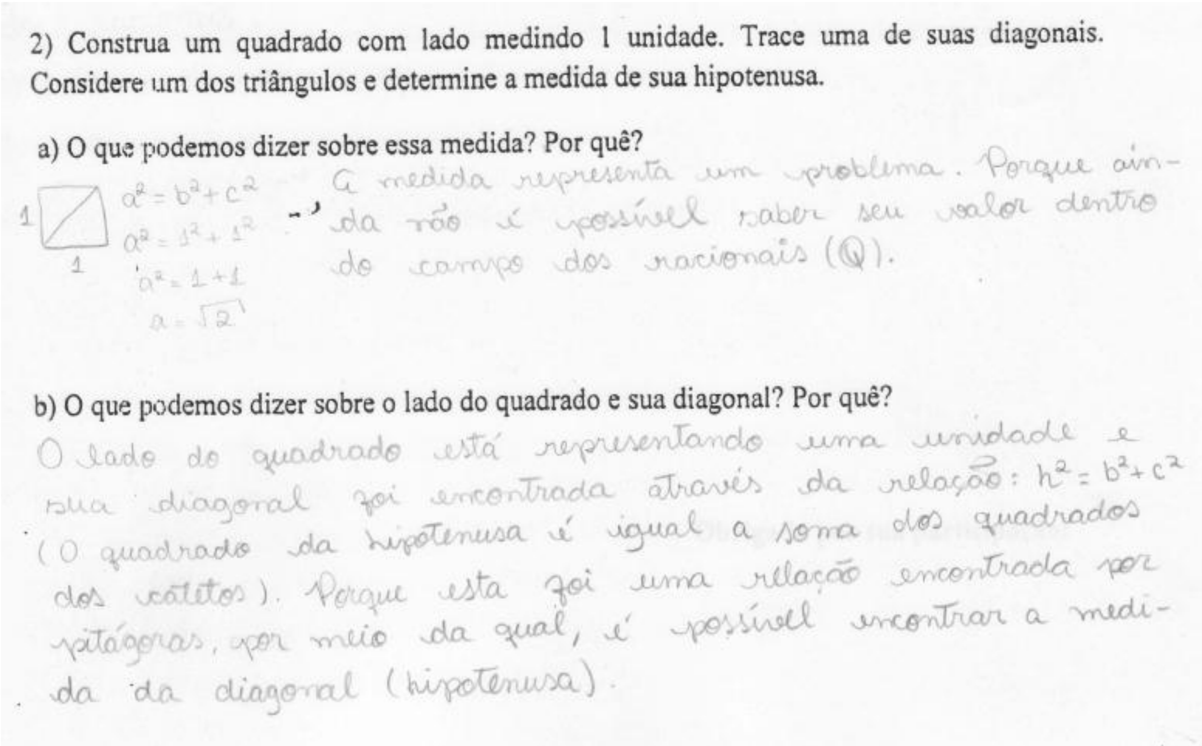
Diferentemente do lado do quadrado, a diagonal é representada por um número diferente dos conjuntos: Naturais, Inteiros e Racionais, dessa forma a diagonal passa a ser incomensurável em relação aos lados do quadrado admitindo-se a mesma unidade

Fonte: Questionário de pesquisa IV

Observamos na letra *a* dessa questão, que o **sujeito I** tem dificuldades em expressar ideias relativas a reta real e a números reais, de acordo com o que a academia tem validado e de acordo com o que utilizamos, por meio da obra de Caraça (1989). Evidenciamos isso quando descreve que o número $\sqrt{2}$ não está presente na reta dos reais. Já na letra *b*, observamos que o sujeito compreende que o número encontrado para a medida da diagonal não é um número racional. Além disso, observa que a diagonal é incomensurável em relação ao lado do quadrado. Nesse caso, entendemos que o sujeito construiu conhecimento acerca do conceito de incomensurabilidade.

O **sujeito J** apesar de usar a simbologia $\sqrt{2}$ expressa à impossibilidade de determinarmos a medida da diagonal por se tratar de número ainda não conhecido. Na letra b destaca a ideia de medida do lado do quadrado, mas não representa a medida do lado e da hipotenusa como racional ou irracional. Diante disso, não conseguimos evidenciar o que quis dizer com tal afirmação.

Figura 13: resposta do sujeito J



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = 1^2 + 1^2$
$a^2 = 1 + 1$
$a = \sqrt{2}$

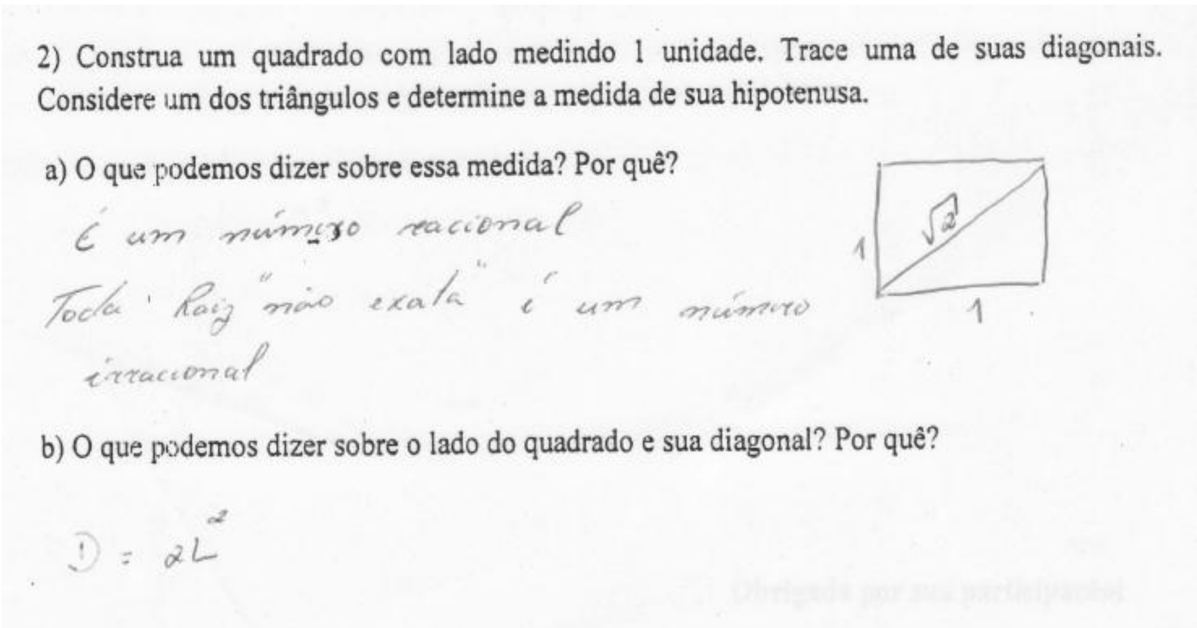
A medida representa um problema. Porque ainda não é possível saber seu valor dentro do campo dos racionais (Q).

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

O lado do quadrado está representando uma unidade e sua diagonal foi encontrada através da relação: $h^2 = b^2 + c^2$ (O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos). Porque esta foi uma relação encontrada por pitágoras, por meio da qual, é possível encontrar a medida da diagonal (hipotenusa).

Fonte: Questionário de pesquisa IV

Figura 14: resposta do aluno K



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

É um número racional

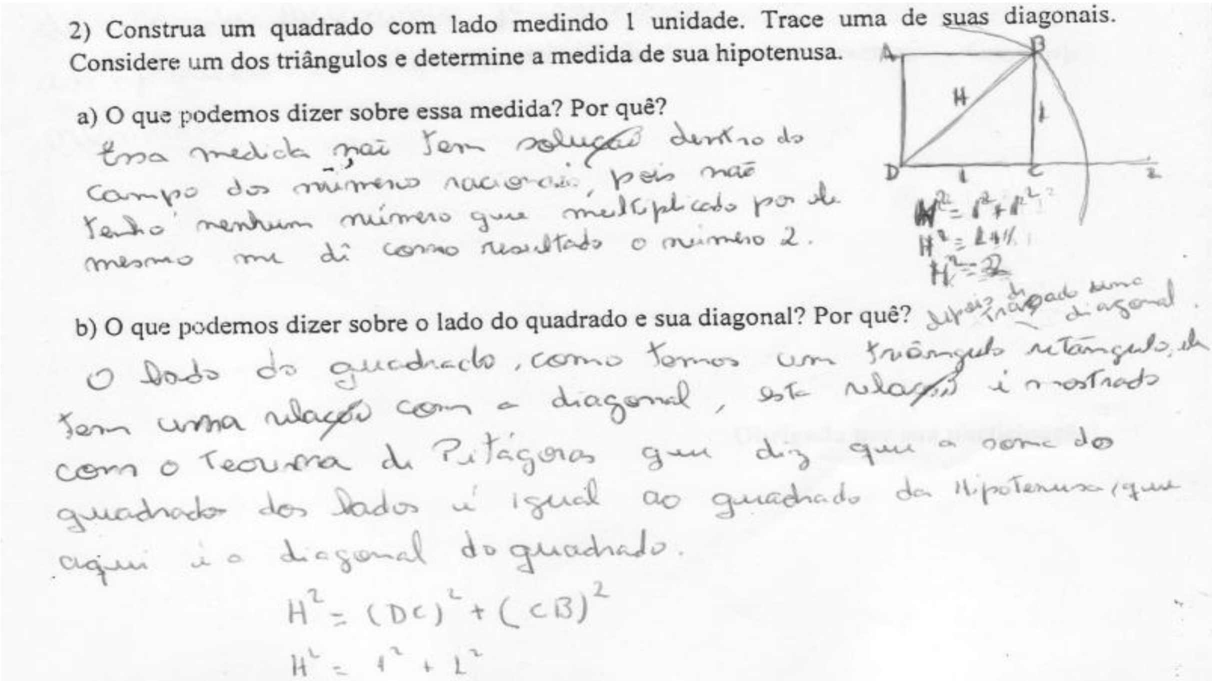
Toda "Raiz não exata" é um número irracional

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

$D = 2L^2$

Fonte: Questionário de pesquisa IV

Figura 15: resposta do aluno L



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

Essa medida não tem solução dentro do campo dos números racionais, pois não tenho nenhum número que multiplicado por ele mesmo me dê como resultado o número 2.

$H^2 = 1^2 + 1^2$

$H^2 = 1 + 1$

$H^2 = 2$

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

O lado do quadrado, como temos um triângulo retângulo, ele tem uma relação com a diagonal, esta relação é mostrada com o Teorema de Pitágoras que diz que a soma dos quadrados dos lados é igual ao quadrado da Hipotenusa (que aqui é a diagonal do quadrado.

$H^2 = (DC)^2 + (CB)^2$

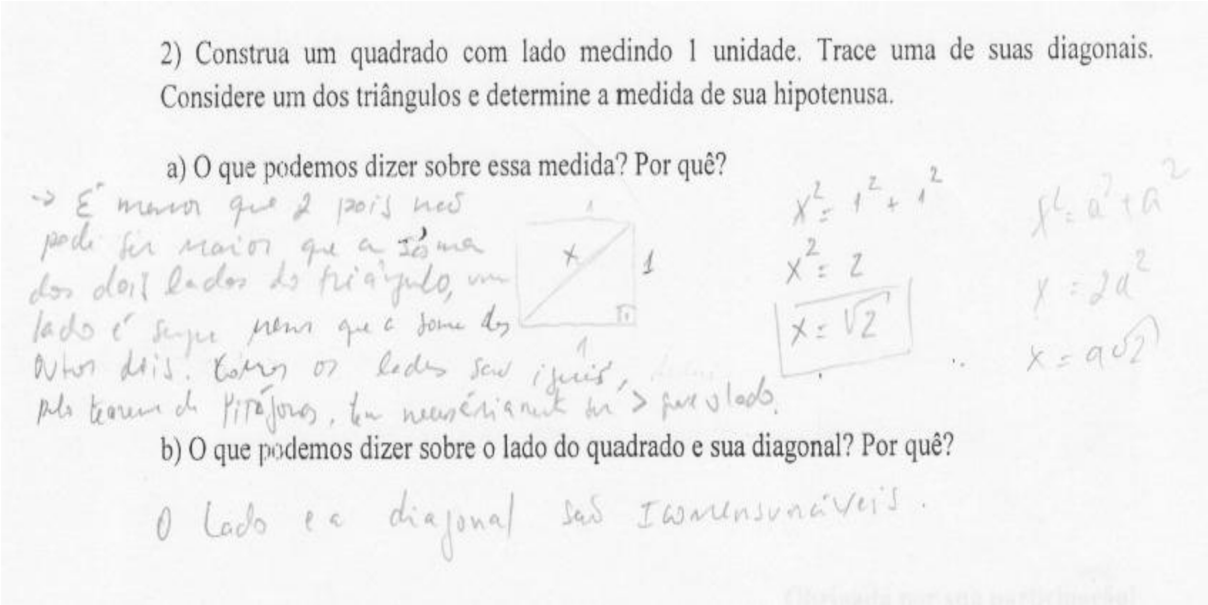
$H^2 = 1^2 + 1^2$

Fonte: Questionário de pesquisa IV

O **sujeito K** utiliza conceitos que nos parecem ter sido aprendidos na Educação Básica. A crença afirmação do tipo “*toda raiz não exata é um número irracional*”, vai ao encontro do pensamento de pesquisa relatado em Cezar (2011). Por outro lado, o sujeito parece se confundir ao destacar que a diagonal é um número racional. Diante disso, não conseguimos compreender o que o sujeito realmente quis dizer. Curiosos com tal questão, perguntamos aos sujeitos da pesquisa o que achavam sobre tal resposta. Os que responderam disseram que não entenderam. Nesse caso, não conseguimos analisar a construção do conhecimento.

O **sujeito L** ao observar que a medida da diagonal “*não tem ‘solução’ dentro do campo racional*” construiu conhecimento durante o processo de construção do campo racional, apesar de utilizar a palavra “solução”, talvez não tão apropriada para tal descrição. Evidenciamos também que o sujeito construiu conhecimento acerca do pensamento algébrico, em seu campo semântico, quando destaca a não existência (no caso de um número racional) de um número que, multiplicado por ele mesmo, dê como resultado o número 2. Evidenciamos também que o sujeito construiu conhecimento acerca do pensamento geométrico ao representar em sua figura o traço do compasso indicando que a medida da diagonal está entre 1 e 2.

Figura 16: resposta do sujeito M



2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

→ É menor que 2 pois não pode ser maior que a soma dos dois lados do triângulo, um lado é sempre menor que a soma dos outros dois. Como os lados são iguais, pelo teorema de Pitágoras, tem necessariamente ser > que o lado.

$x^2 = 1^2 + 1^2$

$x^2 = 2$

$\boxed{x = \sqrt{2}}$

$l^2 = a^2 + a^2$

$x = 2a^2$

$x = a\sqrt{2}$

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

O lado e a diagonal são incomensuráveis.

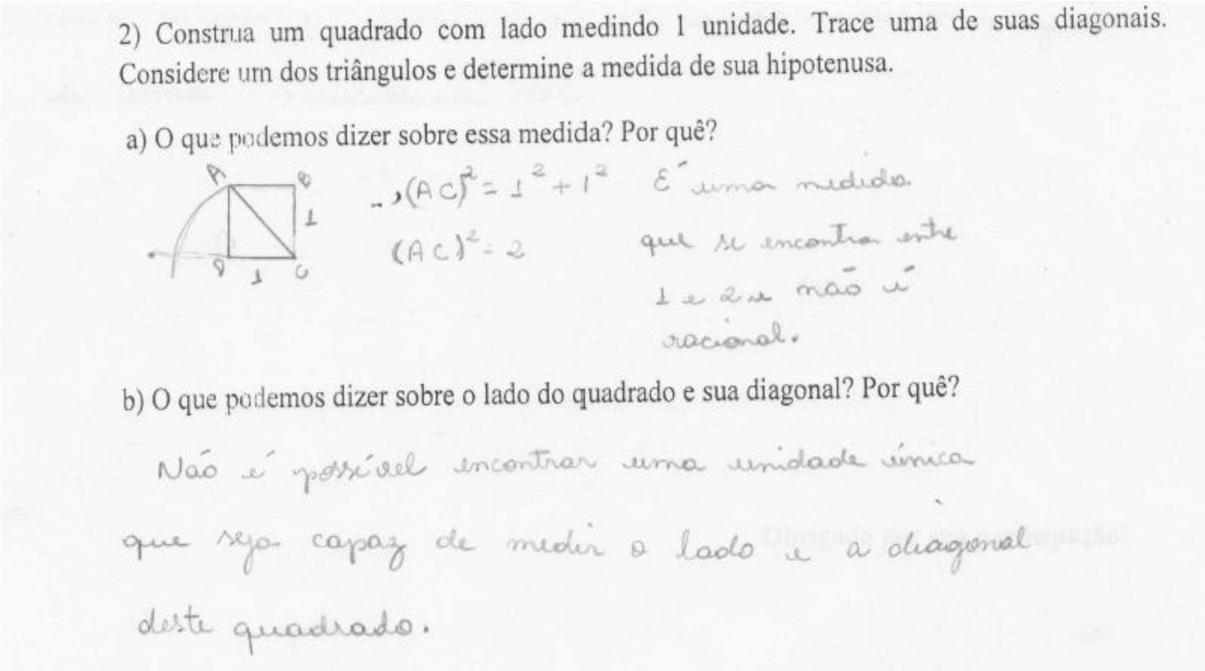
Fonte: Questionário de pesquisa IV

O **sujeito M** na letra *a* busca um pensamento geométrico – a desigualdade triangular – para responder a questão. Em sua observação visualiza que a medida da diagonal precisa ser menor que a soma dos lados triangulo formado. Como essa soma é igual a 2, então a medida da diagonal precisa ser menor que 2. Além disso, destaca que de acordo com o Teorema de Pitágoras, a diagonal tem que ser maior que o lado, no caso, maior que 1. Isso nos fez interpretar que a medida da diagonal está entre 1 e 2. Achamos essa observação muito boa e compartilhamos com os sujeitos da pesquisa que a acharam diferente e interessante.

Na letra *b* o sujeito destaca que os segmentos são incomensuráveis. Diante da análise das respostas das letras *a* e *b*, evidenciamos que o sujeito possui como construído o pensamento geométrico e aritmético. Além de ter construído também o conceito de incomensurabilidade.

O **sujeito N** construiu o conhecimento geométrico ao destacar em sua figura a representação realizada por régua e compasso, uma vez que evidencia em sua medição o traço do compasso à esquerda e não à direita. Mas, de qualquer forma o sujeito interpreta que a medida da diagonal está entre 1 e 2 e que este valor não é racional. Com isso, podemos destacar que o sujeito construiu conhecimento durante o processo de construção do campo racional. Na letra *b* o sujeito destaca o conceito de incomensurabilidade. Apesar de não utilizar essa palavra ele descreve esse conceito exatamente.

Figura 17: resposta do sujeito N


2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

$(AC)^2 = 1^2 + 1^2$

$(AC)^2 = 2$

É uma medida que se encontra entre 1 e 2 e não é racional.

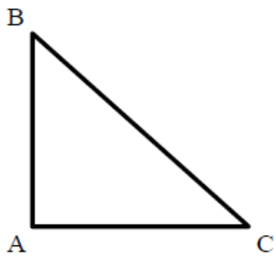
b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

Não é possível encontrar uma unidade única que seja capaz de medir o lado e a diagonal deste quadrado.

Fonte: Questionário de pesquisa IV

Após terem respondido a questão 2 prosseguimos nosso estudo analisando o que Caraça (1989) denomina como um caso embaraçoso. Para tal, construímos[28], um triângulo retângulo isósceles ABC (figura 18), com AB = AC.

Figura 18: Triângulo retângulo isósceles ABC




Fonte: próprio autor

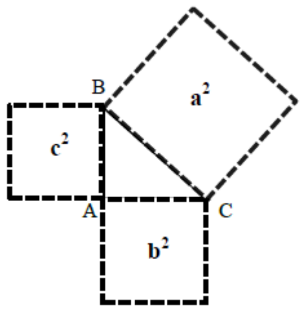
[28] Para tal construção, os sujeitos tinham como ferramentas: régua, transferidor, compasso, esquadros e o programa GeoGebra. A escolha ficou a cargo dos sujeitos.

Com este triângulo procuramos resolver o problema de achar a medida da hipotenusa BC. Para tal, tomamos como unidade o cateto AB e refletimos: se essa medida existe, então temos um número r = $\frac{m}{n}$racional irredutível, de modo que:

$$(I)BC = \left(\frac{m}{n}\right) . AB$$

Como princípio da Geometria, usamos o Teorema de Pitágoras para determinarmos a medida da hipotenusa BC, o qual exprime geometricamente que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, como mostra a figura 19.

Figura 19: Representação geométrica do Teorema de Pitágoras




Fonte: próprio autor

Assim, seja BC = a (hipotenusa), AB = c (cateto) e AC = b (cateto), logo:

$$(II)a^2 = b^2 + c^2$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(III)\ BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Como, por hipótese: (IV) AB = BC, substituímos (IV) em (III). Assim, obtendo:

$$BC^2 = AB^2 + AB^2$$

$$(V)BC^2 = 2\ AB^2$$

Por outro lado, elevando ambos os membros de (I) ao quadrado:

$$(VI)(BC)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 . (AB)^2$$

Assim, a existência da medida BC, tomando AB como unidade, e a utilização do Teorema de Pitágoras, somos conduzidos a comparação desta igualdade com (V), logo:

$$(VII)\left(\frac{m}{n}\right)^{2} = 2$$

Caraça (1989) denomina a igualdade (VI) como um *monstro aritmético*. Isso porque, dela concluímos: (VIII) $m^2 = 2\ n^2$. Isto é, que $m^2$ é um número par, mas se o quadrado de um número é par, esse número também o é, logo m é par. Com isso, devemos ter n ímpar, pois temos suposto que $\frac{m}{n}$ é irredutível.

Seja k um número inteiro cuja metade é m, assim temos: m = 2k. Substituindo em (VIII) temos:

$$(2k)^2 = 2\ n^2$$

$$4k^2 = 2\ n^2$$

$$n^2 = 2k^2$$

Daqui concluímos que $n^2$ é par, logo n é par. Portanto, n é par e ímpar, o que é um absurdo pela incompatibilidade lógica[29] da Matemática ou como denomina Caraça (1989) isso é uma *monstruosidade aritmética*. Com isso, concluímos que não existe número racional que elevado ao quadrado seja igual a dois. Consequentemente, não conseguimos determinar um número racional $\frac{m}{n}$ que exprima a medida de BC em relação a AB. Logo, encontramos segmentos que não são comensuráveis. Aqui entendemos a descoberta de segmentos incomensuráveis, tanto citada por Bentley (2009) e Boyer (2003) como a descoberta que "assombrou" os pitagóricos.

Para compreendermos melhor esses segmentos definimos:

**Segmentos comensuráveis**: "É possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade" (ÁVILA, 2006, p. 47).

**Segmentos incomensuráveis**: Não existe uma mesma unidade de medida capaz de medi-los ao mesmo tempo.

---

[29] "Toda teoria matemática é uma construção progressiva feita à custa de conceitos – os seres de que trata a teoria - e de afirmações feitas sobre esse conceito. Em estado nenhum da construção se pode tolerar desacordo" (Caraça, 1989, p. 52).

Diante da nova descoberta, Caraça (1989) destaca que a *monstruosidade aritmética* nos coloca em uma encruzilhada, onde existem apenas os seguintes caminhos de saída:

**Encruzilhada**

1) Abandonar sempre a possibilidade de exprimir numericamente a medida de um segmento;

2) Abandonar o Teorema de Pitágoras;

3) Conservar sempre a possibilidade de exprimir numericamente a medida de um segmento e o teorema, mas abandonar a exigência da sua compatibilidade lógica;

4) Conservar tudo, mas admitir que um mesmo número possa ser, simultaneamente, par e ímpar.

O caminho 1 vai contra o *princípio da extensão*, pois a tendência, da Matemática é estender, generalizar, completar e isso só é abandonado quando existe um “vício” de raciocínio, que não é o caso, logo não pode ser seguido. O caminho 2 é absurdo, uma vez que o Teorema de Pitágoras é uma verdade geométrica. O caminho 4, se seguido, “abalaria” as bases da Aritmética, pois a paridade de um número se reconhece pelo fato dele ser ou não divisível por 2, logo aceitar que um número possa ser par e ímpar, simultaneamente, é impossível. Portanto, só nos resta o caminho 3. Sobre este, Caraça (1989) explica:

> Toda teoria matemática é uma construção progressiva feita à custa de conceitos – os seres de que trata a teoria – e de afirmações feitas sobre esses conceitos. Em estado nenhum da construção se pode tolerar desacordo. – Ela é dominada por, entre outros, um *princípio geral de compatibilidade lógica* dos seres e das afirmações, princípio esse que é, na Matemática, a expressão de um outro mais geral que domina toda a construção científica – o princípio do acordo da razão consigo própria (CARAÇA, 1989, p. 52).

Dessa forma, não é possível tomarmos o caminho 3, isso seria discordar dos próprios conceitos matemáticos. Contudo, sendo todos os caminhos rejeitados por contradição ou desacordo, resta-nos conservar tudo: o princípio da extensão, o Teorema de Pitágoras e a compatibilidade lógica. Para tal, precisamos negar a negação; a de que dois segmentos são sempre comensuráveis e admitir a existência de segmentos incomensuráveis, com isso, novos números são descobertos e um novo campo numérico é constituído. **Assim, o que podemos dizer sobre o "novo" número?** Essa questão será discutida na construção dos números reais.

Após a construção do campo irracional, realizamos uma reflexão acerca do que poderíamos definir como uma forma de representação para os números irracionais. Em um diálogo realizado com os grupos A e B algumas observações foram feitas. Evidenciamos que:

- Não existe uma expressão única que generalize a representação de um número irracional, assim como temos para os números racionais.

- Podemos denominar os números irracionais de maneiras diferenciadas como: são dízimas não periódicas; são números reais, não racionais; são números reais que não podem ser escritos na forma de fração, dentre outras.

Essa discussão permitiu realizarmos a reflexão proposta na parte do questionário que trata justamente das reflexões. Neste questionário os grupos A e B puderam registrar o que pensam sobre definir número irracional.

**Reflexões**

***I) Após as construções efetuadas, alguns significados matemáticos foram produzidos. Dessa forma, defina novamente o que é número irracional e justifique.***

Optamos por analisar as **repostas 1, 5** e **12**, do grupo A, no final das demais análises desse grupo, pois os sujeitos reafirmam a definição inicial.

**Grupo A**

1) "*Todo número que não pode ser escrito na forma de fração $\frac{m}{n}$, m e n ∈ Z e n ≠ 0*."
2) "*Não pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros e n ≠ 0. Não pertence a nenhum campo numérico já definido. Não é racional*."

Na **resposta 2** o sujeito destaca mais de uma forma para definir número irracional. Visualizamos que tal resposta tenha sido fruto de nossas discussões, o que nos permite dizer que o processo de construção do campo irracional contribuiu para a construção desse conhecimento uma vez que, em sua definição inicial sobre o número irracional, abordava-o apenas como aquele que não pode ser escrito na forma de fração. Além disso, percebemos também que o sujeito construiu o pensamento algébrico acerca dos números racionais.

3) “*Um número que serve como complemento de um conjunto não totalmente esclarecido, o conjunto dos números racionais, formando o conjunto R*.”

Na **resposta 3** evidenciamos que o sujeito possui um conhecimento prévio sobre a construção do campo real,. Porém,à princípio, tal conceito não havia sido muito bem formulado, uma vez que na sua visão o conjunto dos racionais não está clara. Isso, pode ter ocorrido durante o processo de construção do campo racional ou, talvez, o sujeito não estivesse presente no dia em que essa construção foi realizada. Em relação à resposta inicial, o sujeito mudou totalmente seu pensamento, o que evidencia a construção de uma nova definição para tal número. Com isso, identificamos que algum conhecimento acerca desse campo numérico foi construído, mas não conseguimos detectar o tipo de pensamento (se foi algébrico, aritmético ou geométrico) delimitado pelo sujeito.

4) “*É todo número que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b ≠ 0. Não podemos escrevê-lo na forma numérica, pois estes são incomensuráveis*.”

Na **resposta 4** acreditamos que ao escrever “*não podemos escrevê-lo na forma numérica*” o sujeito buscou evidenciar a não existência de uma forma única para representar os números irracionais. Em sua reposta inicial, ele relaciona isso ao “tamanho” do conjunto. Observamos que o sujeito construiu conhecimento acerca da incomensurabilidade, apesar de ter indicado esta em relação a números e não a segmentos. Além disso, evidenciamos que o sujeito construiu o pensamento algébrico em relação à definição de números racionais.

5) “*Não pode ser construído na forma $\frac{a}{b}$, sendo b ≠ 0.*”

6) “*São números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e b ≠ 0. Porque não há como mensurar ‘a’ tomando ‘b’ como unidade*.”

Na **resposta 6** acreditamos que o sujeito relaciona a ideia de números irracionais com medidas e unidades de medidas. Isso demonstra que o sujeito construiu conhecimento acerca de segmentos incomensuráveis, ou seja, constituiu um pensamento geométrico, o que complementa seu raciocínio inicial. Além disso, demonstra que construiu o pensamento algébrico acerca da definição de números racionais.

7) "*São números que não podem ser escritos na forma* $\frac{m}{n}$."

Na **resposta 7** não conseguimos realizar uma analogia entre conhecimento prévio e adquirido durante o processo, pois o sujeito não respondeu a questão inicialmente. O que podemos analisar após a construção é que o sujeito visualiza o número irracional como aquele que não pode ser escrito da mesma forma que o racional. Acreditamos que ele possa ter construído esse conhecimento após o processo, mas não conseguimos afirmar isso.

8) "*É um número que não pode ser expresso na forma* $\frac{a}{b}$*, b ≠ 0, a e b ∈ Z, representa um segmento que não é comensurável*."

Na **resposta 8** o sujeito, inicialmente, relaciona o número irracional como um número dizimal, o que não condiz com o "formato" de um número irracional, mas sim com um racional. Por sua vez, após a construção, o sujeito destaca justamente o contrário, ou seja, que os irracionais não podem ter a mesma representação que os racionais. Evidenciamos também, que o sujeito relaciona números irracionais com a incomensurabilidade. Com isso, destacamos que o sujeito construiu conhecimento acerca da definição de números irracionais, racionais e da incomensurabilidade, além de utilizar o pensamento algébrico e geométrico para tal.

9) "*O número irracional é um número que não pode ser expresso pela mesma unidade dos números racionais, de forma que, se isso ocorrer à compatibilidade lógica será inexistente*."

Na **resposta 9** entendemos que o sujeito tentou expressar que o número irracional não pode ser expresso da mesma forma que o número racional, pois se isso acontecer teremos uma contradição. Essa resposta indica que o processo de construção acerca do campo irracional foi compreendido, ou seja, que algum conhecimento foi construído; seja ele aritmético ou algébrico. Inicialmente, o sujeito já possuía uma ideia semelhante, inclusive fundamenta sua ideia nas lacunas deixadas na reta pelos números racionais. Visualizamos isso em sua escrita "*o vazio* *representativo desse número*”. Observamos que o sujeito constituiu um pensamento algébrico.

10)“*Número irracional é todo aquele que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros, b ≠ 0 excluindo os números complexos como* $\sqrt{-x}$ .”

Na **resposta 10** o sujeito repete uma definição inicial, que traduz um pensamento algébrico, mas a completa ao excluir os números complexos, o que indica que ele complementou seu conhecimento prévio. Por sua vez, não indicou quem é o x, pois se o x for um número negativo, podemos tanto ter um número racional quanto um número irracional. O que descaracteriza sua definição, constituindo assim uma “lacuna” na construção do conhecimento.

11)“*Os números irracionais também abrangem as raízes inexatas e os números que não podem ser* $\frac{m}{n}$ *inteiros com n ≠ 0*.”

Na **resposta 11** observamos que o sujeito completou seu raciocínio inicial com a citação “*as raízes inexatas*” que acreditamos que queira dizer não exatas. Porém, o sujeito aborda isso como se essa representação fosse diferente de “*números que não podem ser* $\frac{m}{n}$ *inteiros com n ≠ 0”,* percebemos isso por meio do conectivo *e.* Dessa forma, não conseguimos destacar necessariamente a construção do conhecimento depois da construção do campo irracional.

12)“*Não pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$.”

13)“*Número irracional é todo número que não pode ser escrito de forma* $\frac{m}{n}$*, onde m e n ≠ 0 e não pertence a nenhum campo numérico já definido (IN, Z e Q)*.”

Na **resposta 13** evidenciamos que, inicialmente, o sujeito descreve número irracional como aquele que não possui o formato dos racionais. Após a construção do campo irracional ele descreve a mesma ideia, porém relacionando isso com a definição que construímos para os números racionais. Com isso, o sujeito construiu um pensamento mais algébrico.

14)“*Que o número irracional não pode ser escrito de forma fracionária, logo os números irracionais são formados pelos números primos com o natural*.”

Na **resposta 14** evidenciamos que o sujeito não apropriou seu conhecimento ao que foi descrito durante o processo de construção do campo irracional. Pelo contrário, ao descrever "*logo os números irracionais são formados pelos números primos com o natural*" observamos que o sujeito não construiu conhecimento matematicamente relevante e requerido com esse processo, embora possa ter construído outros conhecimentos.

Em relação às **repostas 1, 5** e **12**, os sujeitos reafirmam a definição inicial, o que caracteriza, em seus campos semânticos, que pode não ter ocorrido uma construção do conhecimento nesse processo, ou também pode ter ocorrido apenas a reafirmação do conhecimento prévio.

**Grupo B**

1) "*São números reais que não surgem da razão de dois números inteiros*."
2) "*É um número não pertencente ao conjunto dos números racionais. É um número que se faz diagonal de um quadrado, ele será incomensurável se comparado ao lado*."

Nas **respostas 1** e **2** os sujeitos utilizam a definição inicial, consolidando o pensamento já existente. Na reposta 2 o sujeito, utilizando a ideia de segmentos incomensuráveis, descreve um pensamento geométrico e aritmético.

3) "*É um número não racional. Também é possível construir a ideia de número irracional comparando-se com segmentos incomensuráveis, sendo um deles irracional*."

Na **resposta 3** observamos que, inicialmente, o sujeito já possuía o pensamento algébrico, quando destaca a não possibilidade de escrever o irracional no formato de um racional. Na definição, após a construção do campo irracional, trata também da ideia de segmentos incomensuráveis, destacando o pensamento geométrico. Porém, ao destacar que é um número não racional, pode gerar questionamentos como já relatado no capítulo 2.

Por fim, perguntamos aos sujeitos qual a opinião deles sobre o processo desenvolvido para a construção do campo irracional. Obtivemos como respostas:

**Grupos A e B**

- "*Um processo extremamente longo que levou séculos para que se aceitasse a construção desse campo*."
- "*Acho que foi simplesmente uma necessidade, que precisava ser descoberta para melhores desenvolvimentos no campo da matemática*."
- "*Forma didática boa para ser transmitida*."
- "*Houve a necessidade da construção de um novo campo numérico*."
- "*Bastante interessante porque surgiu de uma necessidade cotidiana que é medir e também pelo fato do novo campo vir para completar os já existentes, havendo assim a compatibilidade lógica*."
- "*Didático e de fácil compreensão*."
- "*Ideal para aplicar em sala de aula dando enfoque sempre no motivo para a construção de um novo conjunto numérico*."
- "*Interessante para saber a necessidade da descoberta de novos conjuntos numéricos para seu real entendimento*."
- "*Essa construção se deu por meio do aparecimento de problemas, onde não havia soluções no campo dos racionais*."
- "*Maneiro*."
- "*Foi uma atividade bastante construtiva, pois partimos do campo numérico já conhecido e construímos aos poucos a descoberta de um novo campo numérico*."
- "*Amplitude da visão sobre os números irracionais*."
- "*Acho válido, pois ele permite entender de onde surgiu, como surgiu e prova que este campo numérico surgiu de uma necessidade real*."
- "*Foi um processo interessante, pois partiu do princípio de que somente se conhece os números racionais*."
- "*É um processo interessante, no qual o aluno pode tirar suas próprias conclusões a partir do que ele construir*."

Observamos por meio das respostas dos sujeitos que o processo de construção dos números irracionais proporcionou a construção do conhecimento, pois permitiu compreender a necessidade de sua constituição para a resolução de problemas cotidianos, bem como, entender o processo de extensão numérica.

### 5.3.3 Construção do Campo Real

Foi nos meados do século XIX que os matemáticos começaram a sentir necessidade de uma fundamentação rigorosa dos diferentes sistemas numéricos. Um desses foi o matemático alemão Richard Dedekind (1831 - 1916), que ao ensinar Cálculo Diferencial, percebeu ser necessário um tratamento rigoroso para os números reais. Assim, em 1872 publicou uma obra intitulada "*Continuidade e números irracionais",* onde buscou inspiração para sua construção dos números reais na antiga e hábil teoria das proporções de Eudoxo, por notar que o procedimento do grego levava a uma separação dos números racionais em dois conjuntos.

Outros matemáticos como Georg Cantor (1845 – 1918) e Giuseppe Peano (1858 – 1932) também desenvolveram trabalhos fundamentando matematicamente o conceito de número real.

Para iniciarmos a construção dos números reais consideramos que alguns conceitos são importantes para compreender esse processo. São eles:

I) Inicialmente admitimos a existência do campo numérico racional (Q) e do conjunto dos pontos da reta (P), uma vez que vamos ver de que maneira podemos estabelecer uma correspondência entre eles. Além disso, vamos considerar como desconhecido o campo irracional;

II) Em seguida, compreender as propriedades características do conjunto (P): *infinidade, ordenação, densidade* e *continuidade*. Definiremos cada uma verificando se no conjunto (Q) existe uma relação de correspondência.

- ***Infinidade***: O conjunto (P) é infinito o conjunto (Q) também é, pois já abrangem o conjunto dos números naturais, que é infinito.

- ***Ordenação***: Dados os pontos A, B e P do conjunto (P), dispostos na reta nessa ordem, temos, por transitividade, que se A precede B e B precede P, o ponto A precede P. Dessa forma, o conjunto (P) é ordenado, pois todo conjunto com critério de ordenação transitivo é ordenado. Em relação ao conjunto (Q), dados dois números racionais $r$ e $s$, de modo que $r$ precede $s$, ou seja, $r<s$, podemos admitir de acordo com Caraça (1989, p. 16) que se $r<s$ e $s<t$, então $r<t$. Logo, o conjunto (Q) é ordenado.

- ***Densidade***: todo conjunto que, entre dois de qualquer dos seus elementos exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, diz-se um conjunto denso. Logo, o conjunto (P) é denso.

  O mesmo é observado no conjunto (Q), uma vez que, dados $r$ e $s$ números racionais quaisquer, de modo que $r<s$ e seja $d = s - r$, se somarmos a $r$ um número $d' < d$, obtemos um número $r'$ maior que $r$ e menor que $s$. Portanto, a existência de números racionais $r'$ entre $r$ e $s$ depende apenas da existência de números racionais $d'$ menores que $d$, assim os $r'$ serão tantos quantos forem os $d'$, como destaca Caraça (1989, p. 40, 56 e 57). Logo, o conjunto (Q) é denso.

- ***Continuidade***: Segundo Caraça (1989) a imagem ideal da continuidade, para nós, é a linha reta. Portanto, se quisermos perceber a continuidade, em face de um conjunto qualquer, basta verificar se ele tem a mesma estrutura da reta.

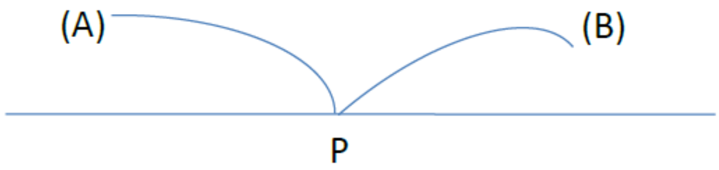
Provavelmente o leitor esteja se perguntando: ***E o conjunto (Q) é contínuo?***, assim como os sujeitos da pesquisa questionaram. Respondemos da seguinte forma: no final dessa construção falaremos sobre.

Após discutirmos sobre essas características, descrevemos a construção dos números reais por meio dos cortes de Dedekind. Mas, antes de iniciarmos, precisamos entender o que são os cortes.

**O conceito de corte**

Segundo Caraça (1989), Richard Dedekind atribuiu à reta a qualidade de ser completa, sem lacunas, contínua. Assim, ao tomarmos um ponto P sobre ela, observamos que em relação a P, todos os pontos da reta de repartem em duas classes: a classe (A), dos pontos que estão à esquerda de P e a classe (B), dos pontos que estão à direita de P (figura 20).

Figura 20: Representação dos Cortes de Dedekind




Fonte: próprio autor

Sempre que, em uma reta, temos uma repartição dos seus pontos em duas classes, são satisfeitas duas condições:

1ª) nenhum ponto escapa à repartição;

2ª) todo ponto da classe (A) está à esquerda de todo ponto da classe (B) e todo ponto da classe (B) está à direita de todo ponto da classe (A) – diz-se que se tem um corte, do qual (A) e (B) são as classes formadas.

Assim, questionamos: ***haverá sempre um ponto P que produza o corte, isto é, que separe as duas classes?***

Dedekind caracteriza a continuidade da reta por meio dessa afirmação, que é designada como axioma ou postulado da continuidade de Dedekind: "todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)" (DEDEKIND, apud CARAÇA, 1989, p. 60).

**Análise do questionário V: construção do campo real**

Antes de continuarmos com a construção do campo real, propusemos aos sujeitos da pesquisa que respondessem a questão 1. Vale ressaltar que durante a leitura às **repostas 4, 5, 12, 13 e 14**, consideramos necessário descrever algumas observações.

***1) Defina, o que é número real. Justifique.***

**Grupo A**

1) "*É todo número pertencente ao conjunto dos reais, que são todos os números, com exceção dos complexos*."

2) "*O conjunto dos números racionais e irracionais, que engloba frações e dízimas*."

3) "*O conjunto dos números reais engloba todos os outros conjuntos estudados até o momento (naturais, inteiros, racionais e irracionais). Sendo assim, podemos dizer que ele poderá ser classificado como racional ou irracional*."

4) "*É a união dos conjuntos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Porque com a união desses conjuntos temos a propriedade da continuidade*."

Na **resposta 4** observamos que o sujeito já possui uma noção em relação a construção dos números reais, uma vez que menciona a propriedade da continuidade.

5) "*Número real é todo aquele que pode ser representado em sua plenitude sobre a reta real*."

Na **reposta 5** observamos que o sujeito relaciona número real com todos aqueles que podem ser representados na reta real. Isso também nos faz entender que o sujeito tem uma noção da construção dos números reais.

6) "*É todo número existente que não possua nenhuma parte imaginária*."

7) "*É todo número que pode representar um segmento de reta*."

8) "*Um número de valor que pode ser definido e pode ser representado na forma natural, inteira, racional e irracional*."

9) "*O conjunto dos números reais é o conjunto onde está incluso todos os outros conjuntos, naturais, inteiros, racionais e irracionais*."

10) "*São todos os números inteiros, positivos e negativos; são também os números racionais, isto é, os números que podem ser escritos como* $\frac{m}{n}$, *onde m e n são inteiros e n ≠ 0 e também são os números irracionais que são aqueles que não fazem parte de nenhum outro conjunto já existente e não podem ser escritos como* $\frac{m}{n}$, *onde m e n são inteiros e n ≠ 0. Ex: 1; - 3;* $\frac{3}{2}$; $\sqrt{3}$."

11) "*É a união dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais (R = N U Z U Q U I)*."

12) “*É o conjunto de todos os números*.”

13) “*Todo número que existe, logo podendo ser representado*.”

Nas **respostas 12 e 13** evidenciamos que a definição está incompleta, pois deixa margem a questionamentos do tipo $\sqrt{-1}$ ser também real. Acreditamos que o conhecimento acerca de números reais não foi bem requerido segundo os moldes matemáticos.

14) “*É o número que é escrito na forma* $\frac{m}{n}$, *com n ≠ 0.”*

Na **resposta 14** o sujeito identifica os números reais apenas como racionais. Quando perguntamos aos sujeitos da pesquisa o que achavam a respeito de tal afirmação, obtivemos como respostas: “*Essa pessoa não soube definir número real”; “Está incompleta”;” Isso é apenas o racional”; “Está errado*”.

15) “*Qualquer número com exceção dos complexos*.”

**Grupo B**

1) “*É um conjunto que tem como subconjuntos, conjuntos como: N, Z, Q, e é um subconjunto dos complexos. Ex: 1 ∈ aos N, Z, Q e Reais e também aos complexos*.”
2) “*Conjunto dos números formado pelos naturais (N), inteiros (Z) e racional*.”

3) “*É um número não complexo. Um elemento contido no conjunto gerado pela união entre os conjuntos dos números racionais e irracionais. O conceito de número real remete-nos à ideia de medidas*.”

Observamos em grande parte das respostas do grupo iniciante e também do concluinte, a ideia de união, ou seja, “*união dos racionais com os irracionais*”, o que caracteriza o conjunto dos números reais. Mas, a questão a ser analisada é se realmente compreendem o porquê dessa união.

Durante as discussões, os sujeitos do grupo A mencionaram que estavam estudando a construção dos números reais na obra de Caraça (1989). Por meio dessa fala entendemos por que alguns alunos mencionaram elementos constituintes desse processo.

Em seguida, continuamos a resolução do questionário. Para a responderem às questões 2 e 3 propusemos a não existência do campo irracional.

A questão 2 foi proposta com o intuito de observarmos se os sujeitos da pesquisa haviam compreendido a definição de corte.

**Questão 2:*Seja (P) o conjunto de pontos da reta. Efetue um corte na reta e atribua uma propriedade as classes determinadas pelo corte, de modo que o ponto no corte pertença a uma das classes. Explique seu raciocínio.***

**Grupos A e B**

- Seja E o ponto – 5, então a classe (A) são os pontos menores ou iguais a – 5, e a classe (B) os pontos maiores que – 5.
- Sendo E o ponto $\frac{5}{2}$. Se a reta é ordenada, então os elementos do conjunto (B) são todos maiores que do conjunto (A), considerando que $\frac{5}{2}$ pertença a (A).
- P = 6 é o ponto de corte. O ponto P = 6 é menor ou igual a todos os pontos à direita dele, chamados B, e é maior ou igual a todos os pontos à esquerda dele, denominados A.
- Z = 0,25 é o ponto de corte. Neste exemplo, a classe (C) que está à esquerda de A, não inclui o número Z, representa todos os números menores que Z, já a classe D que está à direita de Z, inclui Z e todos os números maiores que Z.
- P é o ponto de corte. Classe (A) à esquerda de P = {x ∈ Q/ x ∈ $P$} e a classe (B) que está à direita de P = {y ∈ Q/ y ≤ P}.
- Seja E = 2. Assim:
  (A) São os pontos menores ou iguais a 2.
  (B) São os pontos maiores que 2.
- O ponto é $\frac{2}{3}$ .

  Classe (A): são os pontos menores, incluindo $\frac{2}{3}$ .

  Classe (B): são os pontos maiores que $\frac{2}{3}$ .
- A = $\frac{1}{3}$ . B e C classes.

  Então: C ≤ $A < B$.

Nesse caso, como o sujeito compara números e conjuntos ele deveria ter usado o símbolo de está contido, e não de desigualdade.

- x = 4, x pertence à classe A.

  Classe A: pontos menores e iguais a 4.

  Classe B: pontos maiores que 4.

- B = 8.

  Classe C: pontos menores que 8.

  Classe D: pontos maiores ou iguais a 8.

Observamos que os sujeitos, de forma geral, compreenderam o conceito de corte.

Após resolverem essa questão, iniciamos uma discussão acerca da aplicação desse conceito ao conjunto (R). Para tal, perguntamos: ***"Será possível definir, no conjunto (R), o conceito de corte?"*** (CARAÇA, 1989, p. 61).

Obtivemos algumas repostas: "*Sim, foi o que acabamos de fazer"; "Sim, na reta real"; "Sim, pois para cada ponto que pegamos na reta, é um número real*". Diante das falas dos sujeitos, respondemos de acordo com que Caraça (1989, p. 61) propõe: "É; basta que a – estar à *esquerda de* – em pontos, se faça corresponder – *ser menor que* - em números". Em outras palavras:

> Assim, tem-se um corte no conjunto (R) quando existirem duas classes (A) e (B) de números racionais tais que: 1.º todo o número racional está classificado, ou em (A) ou em (B); 2.º todo número de (A) é menor que todo o número de (B) (CARAÇA, 1989, p. 61).

Retornamos na questão que nos trouxe até aqui: ***"Do ponto de vista da continuidade, os conjuntos (R) e (P) têm a mesma estrutura, como a têm do ponto de vista da infinidade, ordenação e densidade? ou não?"*** (CARAÇA, 1989, p. 61).

Para refletirmos sobre tal questionamento, propomos a resolução da questão 3. Durante a descrição das repostas consideramos necessário fazer algumas observações a algumas afirmações.

***3) Seja (P) o conjunto de pontos da reta. Efetue um novo corte na reta (digamos no ponto E), de modo que a classe (A) dos pontos que estão à***

***esquerda de E sejam todos os números racionais s que elevados ao quadrado são menores que 2 ( $s^2 < 2$), e a classe (B) dos pontos que estão à direita de E sejam todos os números racionais r que elevados ao quadrado são maiores que 2 ( $r^2 > 2$).***

***a) O ponto E pertence a algumas das classes? Por quê?***

***b) O que podemos concluir com esse exemplo?***

**Grupos A e B**

- a) "*Não. Pois o ponto que divide as classes é $\sqrt{2}$, que não pertence aos racionais*."

  b) "*O conjunto racional possui lacunas*."

- a) "*Não, pois ele fica no meio*."

  b) "*Que a reta não se adapta a algumas questões*."

- a) "*O ponto E tem que está entre* $\boldsymbol{r^2 < 2}$ ***e*** $\boldsymbol{r^2 > 2}$*, portanto se usarmos: $2^2<2$, para r = 2 não atende à primeira especificação (*$\boldsymbol{r^2 < 2}$*). Já para a segunda especificação atenderia, pois $2^2>2$ será 4 >2 que é verdadeiro*."

  b) "*Podemos concluir que dependendo da interpretação das especificações podemos entender que o ponto E pode pertencer ou não às classes*."

Observamos que o sujeito não compreendeu a propriedade da classe em questão, pois toma como *r* somente o número 2 e não analisa essa propriedade em relação a outros valores.

- a) "*Não, porque o número encontrado não é racional*."

  b) "*Que o conjunto dos racionais não é contínuo*."

- a) "*Não, para o ponto E fazer parte de uma das classes, elas deveriam incluí-lo e as propriedades da classe A e classe B não incluem o ponto E em seu domínio*."

  b) "*Nem sempre o ponto de corte irá pertencer a alguma das classes que serão criadas por ele*."

- a) "*Não, pois em A estão os pontos menores que E, e em B os pontos maiores que E, portanto E não pertence a A e não pertence a B*."

  b) "*Concluímos que o ponto E não pertence ao conjunto dos racionais*."

- a) "*O ponto E não pertence, pois a propriedade diz que seja para a classe (A) → ($s^2 < 2$) e para a classe (B) → ($r^2 > 2$), observando que em nenhum momento define igualdade*."

  b) "*Podemos concluir que atribuindo uma propriedade antes do corte, o ponto E pode escapar da reta*."

- a) "*Não, não existe nenhum racional que é maior que 2 e menor que 2*."

  b) "*Que não existe um ponto E*."

- a) "*Não. Não podemos dizer que os pontos à esquerda se enquadram no exemplo. Se r = 2 → E = 4 (direita do corte); -1; 0; 1 elevados ao quadrado serão < 2, porém (- 2), (- 3), (- 4) → > 2*."

  b) "*Não se pode estabelecer a propriedade para este caso*."

- a) "*Não. Pois o número seria*$\sqrt{2}$*, e não pertenceria a nenhuma classe*."

  b) "*Que há números que não pertencem a classe dos racionais*."

- a) "*Sim, pois* $2^{1/2} = 2$."

  b) "*Que neste caso, todos os números do tipo* $r^2$ *e* $s^2$ *estão representados nesta reta*."

Nesse exemplo, o sujeito acredita que por conhecermos os inteiros e os racionais, a simbologia $2^{1/2}$ pode ser usada e considerada como um número conhecido (fala registrada em gravação de áudio). Vale ressaltar que a afirmação $2^{1/2} = 2$ é incorreta. O pensamento algébrico e aritmético do sujeito não foi bem construído, segundo os moldes matemáticos.

- a) "*Não, porque para pertencer o ponto E tem que ser* $\sqrt{2}$ *que é irracional*."

  b) "*Existem outros pontos na reta que não pertencem às classes A e B*."

- a) “*O ponto E não pode pertencer a nenhuma das classes, pois* $\nexists$ $x \in Q/ x^2 = 2$.”

  b) “*Assim, podemos concluir que os números racionais são necessários, mas não suficientes para compor a reta de maneira que esta seja contínua. Há, então, que se admitir a existência de um novo conjunto cujos elementos preencham as lacunas deixadas pelos racionais*.”

Nesta afirmação o sujeito destaca seu conhecimento acerca da construção dos números reais e dessa necessidade. Visualiza também que os números racionais deixam “lacunas” na reta. Aqui podemos evidenciar que o sujeito já possui o pensamento algébrico construído acerca do tema.

De modo geral, observamos que grande parte das respostas indica que o campo dos números racionais não é suficiente para representar todos os pontos da reta, isto é, existem lacunas. Além disso, uma das afirmações indica a descontinuidade do conjunto (Q).

Para falarmos melhor sobre isso, vamos inicialmente compreender a questão.

**Explicando:**

Efetuamos uma repartição dos números racionais em duas classes (A) e (B), cujo ponto de repartição seja E. Pelo o que foi descrito, o ponto E pertence à classe (A) ou à classe (B).
Para verificarmos esta afirmação, Dedekind utiliza a seguinte ideia:

1ª) Em (A) colocamos todo número racional *s* cujo quadrado seja menor que 2.

2ª) Em (B) colocamos todo número racional *r* cujo quadrado seja maior que 2.

Constitui esta repartição um corte? Efetivamente sim, pois a 1ª e a 2ª condição são satisfeitas. Mas isso não é suficiente, pois Dedekind observa que estaria faltando algum número; aquele cujo quadrado seja igual a 2, que não pertence a nenhuma das classes, ou seja, não existe no campo racional. Isso nos leva a concluir que há cortes que não possuem elemento de separação. E mais, segundo Caraça (1989) o conjunto (R) não satisfaz ao axioma da continuidade de Dedekind, ou seja, o conjunto (R) não é contínuo. Portanto, a descontinuidade não é do conjunto (Q), mas sim do conjunto (R).

Dessa forma, encontramos a razão da não-biunivocidade da correspondência (R) $\leftrightarrow$(P). Com isso, devemos negar a negação. Nesse caso, a negação é admitir a não existência geral de um elemento de separação de duas classes. Como destaca Caraça (1989, p. 62), “[...] São esses mesmos que nos vão criar os novos elementos de separação”. Para isso, Dedekind (*apud*, CARAÇA, 1989, p. 62) define:

> [...] chamo número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional separando as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional.

Com isso, a natureza do problema encontrado indica a necessidade da introdução de novos números – os irracionais. E mais, a constituição desse número não é tão elementar que a dos racionais, que bastam dois números inteiros – numerador e denominador – para defini-lo. Já, segundo Caraça (1989), para definirmos um número real são necessárias duas infinidades de números racionais – as duas classes (A) e (B) do corte – as quais, cada uma delas possui uma infinidade de números.

Para entendermos melhor, vejamos os exemplos:

Na definição do número racional $\frac{2}{3}$ temos apenas dois números 2 e 3, combinamos pela operação de divisão. Já o número real irracional $\sqrt{2}$ é definido como o número que separa a classe dos racionais *s* cujo quadrado seja menor que 2 da classe dos números racionais *r* cujo quadrado seja maior que 2, isto é, $\sqrt{2}$ é definido como o número que é maior que toda a infinidade dos *s* e menor que toda a infinidade dos *r*.

Encerrada a discussão, os sujeitos responderam a reflexão contida no questionário V. As **repostas 1, 2, 3, 5, 8, 9** e **11** do grupo A foram analisadas no final da descrição das repostas desse mesmo grupo. As demais foram analisadas ao longo da descrição.

**Reflexões**

***I) Após as construções efetuadas, alguns significados matemáticos foram produzidos. Dessa forma, defina novamente o que é número real e justifique.***

**Grupo A**

1)“*É a união dos conjuntos racional e irracional*.”

2)“*Minha concepção é a mesma*.”

3)“*Número real é aquele que subdivide-se em duas partes: racional e irracional*.”

4)“*É a união dos conjuntos racionais e irracionais, porque necessitam de uma expansão do campo racional*.”

Na **resposta 4** o sujeito relaciona a definição de número real com a necessidade de expandir o campo racional. Isso foi observado durante a construção do campo real. Em relação à resposta inicial, o sujeito observa, na resposta após construção, que não há necessidade de descrever também a união os naturais e os inteiros, pois estes já fazem parte do conjunto dos racionais.

5)“*Mesma resposta*.”

6)“*É todo número que faz parte dos números racionais e/ou irracionais ao fazer corte na reta*.”

Na **resposta 6** o sujeito relaciona número real com um corte na reta, fato mostrado durante a construção do campo real. Observamos também que em relação à resposta inicial, o sujeito descreve com mais consistência quais são os números que não possuem a parte imaginária citada inicialmente. Com isso, evidenciamos que o sujeito construiu conhecimento durante o processo.

7)“*É todo número que representa um ponto na reta real, seja este ∈ Q ou aos irracionais*.”

Na **resposta 7** o sujeito, inicialmente, trata número real como aquele que “*pode representar um segmento de reta*”, já na definição após construção, trata o número real como aquele que “*representa um ponto da reta real*”, e mais, destaca que este número pode ser racional ou irracional. Dessa forma, evidenciamos que o sujeito construiu conhecimento durante o processo de construção do campo real. Além disso, em seu campo semântico, constituiu o pensamento algébrico.

8) “*Um número racional ou irracional*.”

9) "*Número real é a união de todos os outros conjuntos: naturais, inteiros, racionais e irracionais*."
10) "*O número real é a união dos números racionais com os números irracionais, para garantir a densidade da reta, isto é, não deixá-la com lacunas*."

Na **resposta 10** o sujeito sintetiza sua resposta inicial apenas representado todos os números que descreveu inicialmente, como racionais e irracionais. Em sua reposta após construção, ele destaca também a ideia da reta sem lacunas e faz isso usando uma propriedade estudada – a densidade. Usou uma explicação que retrata o porquê da densidade da reta. Com isso, evidenciamos que o sujeito construiu conhecimento durante o processo e constituiu em seu campo semântico o pensamento algébrico.

11) "*É a união dos números racionais e irracionais*."
12) "*É todo conjunto de número que podem ser representado em uma reta*."

Na **resposta 12** o sujeito relacionou a definição de número real com a representação dos números na reta. Compreendemos, com isso, que o processo de construção dos reais proporcionou construção do conhecimento. Inicialmente, o sujeito ao responder *"conjunto de todos os números"* englobou também os complexos, o que evidencia que a sua concepção inicial sobre os números reais não estava bem construída.

13) "*Todo número real pode ser representado na reta e é representado por uma classe."*

Na **resposta 13** o sujeito se confunde sobre o que é o número real, isso ocorre quando destaca que o número em questão é representado por uma classe, o que não ocorre, pois o número é o elemento de repartição das classes. Em contrapartida, esse sujeito compreende que todo "*número real pode ser representado na reta*". Em relação à definição inicial, onde o sujeito define número real como "todo número que existe", observamos que algum conhecimento foi construído, pois o sujeito consegue perceber que não são todos os números, mas sim, os que podem ser representados na reta.

14) "*São números que ambiento da utilização na reta, serve como o corte da reta*."

Na **resposta 14** o sujeito destaca a ideia de que o número real é o "*corte da reta*", isto é, o ponto onde foi feito o corte na reta. Nesse caso, evidenciamos que o sujeito compreende que a cada ponto tomado na reta um corte é feito, e esse ponto representa um número real. Observamos que o sujeito construiu conhecimento acerca dos números reais, pois em sua resposta inicial, destaca o número real apenas como racional. Dessa forma, constituiu em seu campo semântico parte do pensamento algébrico acerca desse número.

15)"*Número real é quando se tem um corte na reta, e o número coincide com o número racional*."

Na **resposta 15** evidenciamos que o sujeito compreendeu que o corte na reta representa um número real. No entanto, destaca que esse número "*coincide com o número racional*", mas esse número também pode coincidir com o número irracional. Com isso, observamos que a definição dada pelo sujeito está incompleta, comparada a definição construída na obra de Caraça (1989). Já em sua resposta inicial, ele englobara todos os números, com exceção dos complexos. Dessa forma, podemos dizer o conhecimento, após o processo de construção do campo real, não foi bem construído.

A observação realizada sobre a resposta 15 nos preocupou quanto à forma como abordamos a construção do campo real, pois percebemos que gerou conhecimento incompleto.

Diante de tal problema, perguntamos aos sujeitos da pesquisa o que eles entenderam sobre essa afirmação. Obtivemos como respostas: "*A pessoa esqueceu de acrescentar 'ou irracional'"; "Ele não soube definir direito"; "Esqueceu de colocar irracional, pois dá pra ver que a pessoa sabe que é todo corte da reta, inclusive os irracionais"; "Não sabe definir direito"; "Sabe sim, vemos isso quando ele cita sobre o corte*".

Nas **repostas 1, 2, 3, 5, 8, 9** e **11**, os sujeitos reafirmam a definição inicial. Alguns tratam da mesma definição usando apenas uma linguagem diferenciada, mas o significado é o mesmo. Evidenciamos que os sujeitos confirmam um conhecimento já existente, pois tratam da ideia de que número real é todo número racional ou irracional. Com isso, acreditamos que o processo fortaleceu essa ideia e evidenciamos que a construção desse campo foi necessária para estes sujeitos, isso porque eles descrevem no questionário de reflexão ideias do tipo: "*um processo complexo, contudo necessário para o avanço dos estudos dos números"; "o processo foi esclarecedor, pois justifica os questionamentos a respeito da existência dos números reais"; "uma forma diferente e interessante"; "essa construção foi feita de forma gradual e de acordo com as necessidades surgidas*".

**Grupo B**

1) "*A mesma*."

Na **resposta 1** o sujeito reafirma seu conhecimento prévio, onde destaca que o número real é um conjunto que tem subconjuntos. Sobre isso evidenciamos que a pergunta inicial e a final não ficaram claras, pois o sujeito responde relacionando ao conjunto e não ao número.

2) "*Número real é um conjunto dos números de uma reta, por exemplo, 'P' que após separarmos por classes e impor a ele uma propriedade, como no exemplo 3 (esse exemplo solicitou a análise do corte no ponto cuja classe à esquerda era constituída pelos racionais cujo quadrado era menor que 2; e a classe à direita pelos racionais cujo quadrado era maior que 2), se existir esse número ele será racional, se não existir ele será irracional (esse número destacado pelo aluno é o que representa o ponto no corte da reta)*".

Na **reposta 2** evidenciamos que o sujeito utilizou a definição construída por Dedekind, que foi utilizada no processo de construção dos números reais realizado por nós. Por meio dessa definição o sujeito destaca que construiu conhecimento acerca da definição de número real, constituindo, assim, um pensamento algébrico em seu campo semântico.

3) "*É elemento contido no conjunto gerado pela união dos conjuntos dos números racionais e irracionais*".

Na **resposta 3** o sujeito reafirma parte de sua definição inicial. Nesse caso verificamos que ele trata o número real como elemento de um conjunto, isso evidencia que compreendeu a pergunta e que seu conhecimento prévio foi sustentado após a construção do campo real.

Após todo processo de construção do campo real, solicitamos aos sujeitos que respondessem a questão II da reflexão, justamente para obtermos uma opinião deles em relação à construção realizada.

***II) Qual a sua opinião sobre o processo desenvolvido para a construção do campo real?***

**Grupos A e B**

- "*Uma necessidade para se adaptar as condições humanas*."
- "*Essa construção foi feita de forma gradual e de acordo com as necessidades surgidas. Ou seja, esgotando-se as possibilidades de cada conjunto surge a necessidade da criação dos posteriores*."
- "*Bem interessante, pois com uma demonstração simples ele viu a necessidade de expandir os conjuntos numéricos*."
- "*Abstrato, um tanto quanto complexo, contudo necessário para o avanço dos estudos dos números*."
- "*Foi muito bem explicado, de forma a se chegar de maneira natural à definição dos números reais*."
- "*Na minha opinião, a existência do campo irracional deveria ser considerado desde o início, sendo o campo real, a união do campo racional com irracional, 'simplesmente'*."
- "*Justifica os questionamentos existentes a respeito da existência e classificação dos números reais. O processo foi muito esclarecedor*."
- "*Que os números reais foram desenvolvidos para unificar os racionais e irracionais*."
- "*Com esse processo podemos ver que o campo dos reais é composto dos campos dos racionais com um novo campo, o qual mantém a densidade da reta*."
- "*Uma forma diferente e interessante*."
- "*Por dedução criou-se o real*."
- "*O processo facilita a compreensão do conjunto dos números reais*."
- "*Muito funcional*."
- "*Muito inteligente*."

- "*Não muito adaptado para alunos do ensino de 5ª a 8ª séries*."
- "*Muito interessante, pois ao identificarmos o conjunto dos racionais na reta, verificamos algumas lacunas que são os infinitos pontos de outro campo, irracionais, por exemplo*."
- "*Interessante e simples*."

Por meio do que foi descrito evidenciamos a importância do processo para a construção do conhecimento acerca da definição de número real. Alguns sujeitos acharam o processo abstrato ou não muito utilizado no ensino Fundamental, mas grande parte destacou a importância de sua utilização. Percebemos também algumas respostas não tão coerentes como, por exemplo, "*por dedução criou-se o real*", pois os reais foram construídos e não deduzidos. Mas de forma geral, entendemos que o processo foi válido e proporcionou construção do conhecimento acerca do tema.

## 5.4 PLENÁRIA

Como já descrito, a plenária foram momentos destinados à análise de resultados pelos sujeitos da pesquisa. Suas ideias, concepções, concordância e discordância foram registradas e fizeram parte de toda análise da pesquisa. Participaram destes momentos licenciandos (sujeitos da pesquisa), membros do GEPEMEM presenciais (professores das disciplinas envolvidas, outros professores da LIMAT participantes) e virtuais (subgrupos: GEPEMEM – Construção dos números reais; GEPEMEM – Modelo Teórico dos Campos Semânticos).

Como, durante o processo de escrita da pesquisa, descrevemos a opinião dos sujeitos no que tange as construções realizadas, expomos nesse item enunciações advindas das plenárias, constituídas pelo que os sujeitos gostariam de observar acerca dos significados produzidos, se estavam ou não de acordo com as questões descritas e também as observações que gostariam de fazer a respeito da pesquisa desenvolvida.

***2) Os significados produzidos e relatados estão de acordo com o que pensa sobre as questões descritas? Por quê?***

A questão 2 trata do que os sujeitos observaram em relação às definições e justificativas descritas por todos. Essas, como já descrito, foram apresentadas por meio de *slides*, para que os sujeitos também pudessem fazer suas análises.

***3) Qual observação gostaria de fazer sobre a pesquisa desenvolvida? Tem alguma sugestão? Descreva.***

Optamos por não descrever a questão 1, pois já foi destacada durante a análise do processo de construção do campo real.

Obtivemos como respostas:

**Grupos A e B**

- 2) "*Sim. Porque sempre pensei nos números reais como um conjunto que agrupa todos os outros*". 3) Não respondeu.
- 2) "*Sim. Porque embora elas expressem pontos diferentes sobre a mesma coisa, todas contemplam de certa forma o que pensei*". 3) Não respondeu.
- 2) "*Ajudou a tirar algumas dúvidas completando uma definição melhor. Pois muitas vezes temos noção da matéria, mas fica um vazio (algumas dúvidas)*". 3) "*A pesquisa foi muito interessante, pois tirou algumas dúvidas que tinha. Foi uma complementação nas definições, da qual, eu já tinha uma noção.*"
- 2) "*Não consegui entender direito a diferença das definições e das justificativas, mas até hoje eu só tinha conhecimento de definições*". 3) "*Achei muita válida e esclarecedora as construções, mas acho que foi muito expositiva. Acredito que poderíamos ter tido algo mais palpável.*"
- 2) "*Sim*". 3) "*Me trouxe uma nova visão para os números reais.*"
- 2) "*Sim, Foi possível notar a diferença das questões e suas respectivas justificativas, antes e depois da construção*". 3) "*Acho que a pesquisa foi de grande importância para nós, alunos da licenciatura. Acho que as construções deveriam ser abordadas quando os alunos estão aprendendo e construindo esses conceitos.*"

- 2) “*Está razoável, de acordo*”. 3) “*Bom, contribuiu para que cada docente veja a importância de discutir estes conceitos, como construção dos campos, facilitando a metacognição e interesse do aluno.*”

- 2) “*Os significados produzidos e relatados estão de acordo com o que penso sobre as questões descritas, pois os significados mesmo definidos de forma diferente, exprimiram várias ideias e visões a respeito das construções dos números indagados nas questões*”. 3) “*A pesquisa é de suma importância, pois trouxe a oportunidade de agregar novas ideias e visões a respeito do tema.*”

- 2) “*Sim. Pois todas elas focam que os números reais são formados pelos conjuntos racionais e irracionais*”. 3) “*Foi muito boa e explicativa, favoreceu para meu crescimento matemático.*”

- 2) “*Sim. Pois vai ao encontro do que estudamos no início do curso*”. 3) “*Ajudou a melhor entender a construção dos conjuntos numéricos.*”

- 2) “*Sim, porque foram construídas em sala de aula*”. 3) “*Gostei, pois me fez pensar, construir e entender melhor a construção dos campos numéricos*.”

- 2) “*Sim. Ainda aprendi mais detalhes*”. 3) “*A pesquisa ajudou a esclarecer alguns conhecimentos que já tinha de forma que, poderei explicar melhor futuramente*.”

- 2) Não respondeu. 3) “*Tenho muita dificuldade de visualizar a diferença entre racionais e irracionais, poderia inserir na pesquisa jogos que dá pra ver isso e pensar no assunto*.”

Pelos relatos descritos na questão 2 analisamos que os sujeitos visualizam que as enunciações efetivadas por eles, durante o processo, destacam a ideia de construção de números reais, em boa parte advinda do processo desenvolvido em sala. Observamos também que os sujeitos construíram conhecimento por meio das enunciações dos demais participantes da pesquisa.

Na questão 3 os sujeitos destacaram que o processo de construção dos números reais proporcionou a constituição de novas ideias e contribui para que o professor de Matemática, em sua prática pedagógica, compreenda a importância de se discutir conceitos e definições relativos a este tema. Por outro lado, evidenciamos que algumas dúvidas persistiram; percebemos isso na enunciação "*tenho muita dificuldade de visualizar a diferença entre racionais e irracionais"*. Isso demonstra que em alguma parte da construção, durante o desenvolvimento da pesquisa, o espaço comunicativo entre os interlocutores não foi bem estabelecido.

Também recebemos sugestões. Um dos sujeitos pontuou que o processo foi muito expositivo que se poderia utilizar algo mais palpável. Outro sujeito sugeriu o trabalho com jogos. Consideramos válidas tais sugestões e acreditamos que podemos refletir a respeito dessas ideias para aprimorarmos o produto final.

Consideramos que a pesquisa desenvolvida proporcionou, tanto para os sujeitos quanto para nós pesquisadores, a oportunidade de refletirmos sobre nossas práticas pedagógicas, bem como a respeito da existência de diversos caminhos que podem ser seguidos para trabalharmos o tema. Observamos isso a partir das discussões e reflexões realizadas com os sujeitos durante a pesquisa.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tecemos algumas considerações quanto à pesquisa desenvolvida. Vejamos:

Na investigação realizada ─ a pesquisas na área de Educação Matemática, que tratam do tema números reais ─ constatamos, por meio das considerações dos autores, a existência de problemas nos processos de ensino e de aprendizagem acerca do tema, sendo evidenciados na Educação Básica e em formações (inicial e continuada) do professor de Matemática. Tais leituras levaram-nos a perceber que a construção dos números reais, bem como, a extensão dos campos numéricos e as explicações para a constituição de definições para estes números, não tem sido tratadas com maior relevância nos cursos de formação de professores de Matemática. É evidenciado um ensino mais axiomático do que construtivo. Devido a sua complexidade e utilidade na prática escolar ─ visto que, o ensino de números reais é desenvolvido desde o Ensino Fundamental ─ defendemos que é primordial que este tema seja tratado de forma mais incisiva, sistematizada e aprofundada em seus aspectos conceituais e históricos, na formação inicial do professor de Matemática.

Tendo como pressuposto o problema em questão e o desejo em desenvolver uma pesquisa que possibilitasse aos participantes o estudo da construção dos números reais, de forma a viabilizar tal processo por meio de discussões e reflexões, que adotamos o método pesquisa-ação. Encontramos na pesquisa-ação, bem como na dinâmica de desenvolvimento de práticas e estudos do GEPEMEM, o alicerce da interação entre pesquisadores e sujeitos da pesquisa. Tais modelos e procedimentos nos proporcionou desenvolvermos as construções dos campos racional, irracional e real de forma colaborativa e participativa. Os sujeitos da pesquisa puderam intervir nos procedimentos e na análise dos resultados, bem como apontar outros caminhos para situações problemas que surgiam durante a constituição da pesquisa, deixando assim de ser meros ouvintes e passando a ser coautores e também responsáveis pelo processo. Nessa perspectiva, consideramos que este método contribui para a construção do conhecimento proposto no MCS.

No intuito de direcionarmos essa pesquisa por meio de construções, intervenções, reflexões e questionamentos buscamos ir além do que uma simples investigação ou análise de resultados, visamos acima de tudo a produção de significados matemáticos. Para tal, encontramos no MCS um modelo de conhecimento que nos possibilitou analisar com mais propriedade às enunciações emitidas pelos sujeitos.

Durante o processo de análise dos resultados, constatamos que refletir a respeito dos significados produzidos por diversos sujeitos não constitui uma tarefa fácil, uma vez que, os significados produzidos pelos leitores a partir de suas respectivas enunciações pode não ser o mesmo emitido pelos respectivos autores destas enunciações. No entanto, a utilização do método pesquisa-ação contribuiu para estas análises, pois os registros das enunciações dos sujeitos e a participação dos mesmos nas apreciações dos resultados proporcionaram estruturar, organizar e analisar o que os sujeitos disseram com suas repostas (que significados foram produzidos), minimizando assim a distância entre suas enunciações, discussões escritas e os significados produzidos, permitindo analisar em alguns casos, se houve ou não construção do conhecimento.

O trabalho com o MCS representou um diferencial: passamos a prestar mais atenção no que os sujeitos enunciam e a refletir a respeito dos significados que eles produzem nos processos de ensino e de aprendizagem. Aprendemos que a sala de aula precisa ser um espaço comunicativo, onde é fundamental que o professor "leia" o aluno e compreenda que é a partir de suas enunciações e das enunciações dos alunos que a relação dialógica de comunicação é estabelecida. O reflexo de tal processo impacta também nossas posturas diante de nossos alunos, em nossas ações como professores, no trato com a sala de aula, pois entendemos o quão fundamental é que utilizemos o MCS para minimizar distâncias, ou discrepâncias, entre nossas enunciações e a produção de significados matemáticos produzidos por nossos alunos, nos processos de ensino e de aprendizagem, com vistas a romper possíveis dicotomias existentes em tais processos.

Neste viés, destacamos que os estudos realizados no grupo GEPEMEM – subgrupos: Construção dos números reais e Modelo Teórico dos Campos Semânticos ─ viabilizaram:

i) Compreender o Modelo e como desenvolver uma pesquisa a partir dele;
ii) Discussões e reflexões acerca do MCS;
iii) Entendermos que as aplicações do MCS se dão no campo da ação e por isso a utilização da pesquisa-ação, em um *locus*, como o constituído pelo

> GEPEMEM, conciliada ao MCS, é um diferencial não apenas para pesquisa, mas também para práticas docentes.

Foi por meio dessas reflexões que construímos boa parte de nosso conhecimento acerca do Modelo. Além disso, discutimos a respeito da construção dos números reais nas concepções de Caraça (1989) e Ávila (2006). Essas discussões formaram a base da constituição da pesquisa.

A partir do que foi descrito, tecemos as considerações em relação aos resultados da pesquisa. Destacamos o que observamos:

(a) em relação às enunciações prévias dos sujeitos;

(b) o que os processos de construção dos campos numéricos proporcionaram;

(c) os significados matemáticos produzidos acerca de estipulações locais em campos semânticos;

(d) a constituição do produto final.

Observamos que os conhecimentos prévios (aqueles registrados em questionários e gravações de áudio no início da pesquisa) dos sujeitos da turma iniciante e da turma concluinte não divergiram, pois no grupo A, dos ingressantes na graduação, evidenciamos uma reprodução do ensino ministrado na Educação Básica, visto que as definições descritas não foram justificadas; ou seja, os sujeitos não souberam explicar como estas definições foram construídas. No grupo B, dos concluintes da graduação, também observamos a mesma reprodução, o que nos leva a questionar se as disciplinas ministradas no curso de Licenciatura em Matemática, até aquele momento, principalmente no grupo B, não proporcionaram um entendimento mais adequado a respeito do assunto a ponto de "abalar" as construções anteriores. Isso foi o que constatamos por meio das enunciações emitidas pelos sujeitos antes de iniciarmos as construções dos campos numéricos.

Também evidenciamos que, o fato dos alunos iniciantes terem estudado um pouco da obra de Caraça (1989), no que diz respeito à construção dos números, proporcionou uma melhor compreensão do processo de construção dos campos numéricos; no entanto, dúvidas em relação à definição desses campos ainda persistiram durante o desenvolvimento da pesquisa. Constatamos isso nas falhas observadas nas enunciações emitidas após as construções. Visualizamos que o pensamento algébrico, em alguns campos semânticos, não foi bem constituído.

Quando iniciamos as análises aos resultados da pesquisa observamos algumas estipulações locais sendo constituídas em campos semânticos; isto é, estipulações locais evidenciadas por meio de pensamentos aritméticos, geométricos e algébricos. Todavia, não conseguimos constatar essas estipulações em todas as enunciações emitidas pelos sujeitos, isso pela amplitude de enunciações a respeito das definições descritas. Mas tal fato não descaracteriza a pesquisa, pois como proposto, nossa intenção estava centrada na produção de significados matemáticos e não necessariamente na análise do campo semântico constituído. A produção de significados matemáticos proporcionou aos sujeitos elementos para a construção de conhecimentos a respeito do assunto. Observamos isso por meio das análises após as construções dos campos numéricos.

O processo de construção do campo racional proporcionou compreendermos que, o que consideramos como definição de números racionais: *"Todo número racional pode ser escrito na forma* $\frac{m}{n}$*, com m e n inteiros e n ≠ 0"*, é uma generalização algébrica que permite representar qualquer número pertencente a este conjunto. Em contrapartida, a construção do campo irracional proporcionou compreendermos que, não existe uma generalização algébrica que permita expressar o formato de um número irracional. Com isso chegamos, junto com os sujeitos da pesquisa, à conclusão de que para os números irracionais não existe uma única definição.

O processo de construção do campo real proporcionou entendermos o porquê da clássica afirmação "*União dos racionais com os irracionais*". Tal afirmação é denominada nessa pesquisa como crença-afirmação e constituída nos processos de ensino e de aprendizagem, em especial na Educação Básica, como investigado e constatado por Cezar (2011). No entanto, o diferencial que propomos permitiu a boa parte dos sujeitos envolvidos, justificar suas crenças, pois compreendemos a partir dos cortes de Dedekind ─ descrito na obra de Caraça (1989) ─ a ideia de união desses conjuntos e, necessariamente que, o corte na reta real que não constituiu um número racional é um número irracional. Tal façanha possibilitou à construção de conhecimento acerca da definição de números reais. Isso foi constatado por meio das enunciações emitidas pelos sujeitos que descreveram a importância da construção dos números para a formação do professor de Matemática.

Em algumas descrições os sujeitos questionaram a possibilidade de se utilizar a construção dos números para definir números reais nos processos de ensino e de aprendizagem na Educação Básica. Necessariamente não soubemos responder, pois tal questionamento constitui uma nova pesquisa. O que podemos dizer é que após estudarmos a construção dos números na obra de Caraça (1989) nos sentimos mais seguros para ensinar.

A partir do que foi relatado, destacamos que a pesquisa desenvolvida nos permitiu ir além das investigações, pois nos proporcionou a constituição de um produto final, descrito por meio de um material impresso com o objetivo de ser desenvolvido em oficinas para a formação de professores de Matemática. O primeiro passo do uso do material foi dado em uma oficina da III Semana da Matemática do IFES, *campus* Vitória. O trabalho desenvolvimento nessa oficina permitiu a apresentação da pesquisa a outros alunos e professores de Matemática. Tal oficina oportunizou a realização de discussões e reflexões em relação à construção dos números reais, com sujeitos que não estavam imersos na pesquisa. Utilizamos tais discussões para aprimorar o material impresso e inserir algumas sugestões fornecidas pelos participantes desta oficina.

Analisamos a partir de tal oficina que o processo adotado para a construção dos números reais é válido à aplicação na formação (inicial e também continuada) do professor de Matemática.

Por fim, destacamos que a importância dessa pesquisa está pautada no que ela representa para nós participantes e para a formação do professor de Matemática. Entendemos que o processo de construção dos números reais representa mais do que a compreensão de um método. Concebe o alicerce para a construção de conhecimento do professor de Matemática. Além disso, a pesquisa proporciona mais uma etapa em busca da compreensão do processo de produção de significados desenvolvido por nossos alunos, para que possamos com mais propriedade compreender esse processo e por meio dele intervir nos processos de ensino e de aprendizagem, proporcionando uma melhor interação com nossos alunos e estabelecendo um ambiente fértil propício à construção do conhecimento.

# REFERÊNCIAS

ATALAY, Bulent. **A Matemática e a Mona Lisa**: a confluência da arte com a ciência. 2ed rev. e ampl. Tradução: Mário Vilela. São Paulo: Publicações Mercuryo Novo Tempo, 2009.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para licenciatura**. 3ed rev. e ampl. São Paulo: Editora Blucher, 2006.

BARBIER, René. **A Pesquisa-Ação**. Tradução Lucie Didio. Nova Edição. Brasília: Liber Livro Editora, 2012.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 4. ed. Lisboa: Edições, 2009.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números:** uma história ilustrada da Matemática. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2º edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2003.

BRASIL, MEC, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília, 1999.

BRASIL, MEC, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002.

BRASIL, MEC, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília, 1998.

BRASIL, MEC, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais.Brasília, 1998.

BRUNER, Jerome Seymour. **Realidade mental, mundos possíveis**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Concepções acerca do conceito de Números Reais:** uma breve reflexão sobre seu Ensino na Educação Básica.Monografia de Especialização em Ensino na Educação Básica. Departamento de Educação e Ciências Humanas. UFES/CEUNES. São Mateus, ES, 2011.

CHAVES, Rodolfo. **Caminhos percorridos para a implantação do grupo de pesquisa-ação em educação matemática junto ao núcleo de ensino integrado de ciências e matemática da Universidade Federal de Viçosa**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2001.

CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar o ensino de Matemática intervindo em questões socioambientais?** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro. Universidade Estadual Paulista, 2004.

COSTA, Letícia Vieira Oliveira. **Números Reais no Ensino Fundamental:** alguns obstáculos epistemológicos. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação. São Paulo, 2009.

CRUZ, Willian José. **"Os números reais**": um convite ao professor de matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; CALDEIRA, Janaina Soler. **Processos de negociação de significados sobre pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação inicial de professores de Matemática**. Investigações em Ensino de Ciências – v. 16 (3), p. 373 – 401, 2011.

DANTAS, Sérgio Carrazedo. **Uma produção de significado para uma disciplina de filosofia da matemática na formação inicial do professor de matemática**. Dissertação de Mestrado. Londrina: UEL, 2007.

FERREIRA, Jamil. **A Construção dos Números**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora da Sociedade Brasileira de Matemática, 2011 (Coleção textos universitários).

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC/UnB, 1975.

HOUAISS, Antônio. **Dicionário Houaiss Conciso**. Organizador editor responsável Mauro de Salles Villar. São Paulo: Moderna, 2011.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

LINARDI, Patrícia Rosana. **Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro - SP, 2007.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 3. ed.Campinas: Papirus, 1997.

LINS, Romulo Campos. **O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico**. Revista Dynamis Blumenau, v. 1, n. 7, FURB, p. 29 – 39, abr/jun 1994.

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

LINS, Romulo Campos.O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus. (Org). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012, p. 11- 30.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor:** formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Tese (Doutorado em Educação).Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NIVEN, Ivan. **Números**: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte, 2001 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PASQUINI, Regina Célia Guapo. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos:** uma proposta, uma investigação. Tese de Doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

PATRONO, Rosângela Milagres. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental:** análise de uma proposta de ensino. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, 2011.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico:** uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais. Tese de doutorado. Programa de Pós-graduação em Educação. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAD, Ligia Arantes. **Cálculo Diferencial e Integral:** uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. Tese de Doutorado (em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, UNESP. Rio Claro, 1999.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2000 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

SILVA, Amarildo Melchiades. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2003.

THIOLLENT, Michael. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

VYGOTSKY, Levi Semenovitch. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

APÊNDICE A

**Solicitação para desenvolvimento de pesquisa (diretor)**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória

**SOLICITAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA**

Eu, **MARIANA DOS SANTOS CEZAR,** aluna regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo – Vitória, sob orientação do professor Rodolfo Chaves, solicito autorização para desenvolver o projeto de pesquisa intitulado **"PRODUÇÕES DE SIGNIFICADOS NA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS"**, no Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória.

Informo que os sujeitos da pesquisa serão **os alunos do curso de Licenciatura em Matemática**, e que o objetivo da pesquisa consiste em analisar por meio da construção dos números reais, na perspectiva da produção de significados, que tipos de compreensões são evidenciadas, em relação à construção dos campos racional, irracional e real.

Para a execução do estudo peço para participar de algumas aulas desenvolvendo com os alunos a construção dos números reais. Para tal, utilizarei questionários, gravações e debates, tendo os alunos como participantes e parte integrante da pesquisa. A qualquer momento, os sujeitos da pesquisa poderão desistir de participar da mesma, não causando nenhum prejuízo à instituição, à pesquisa ou aos envolvidos. Os procedimentos adotados garantem sigilo da identidade dos participantes. Os dados serão utilizados para realização de relatórios internos e publicações científicas.

Vitória, 03 de junho de 2013.

APÊNDICE B

**Termo de autorização para desenvolvimento de pesquisa (diretor e coordenador)**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA**

Informamos por meio deste documento que autorizamos a pesquisadora **"MARIANA DOS SANTOS CEZAR",** aluna regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo – Vitória, sob orientação do professor Rodolfo Chaves, a desenvolver o projeto intitulado **"PRODUÇÕES DE SIGNIFICADOS NA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS"**, no Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória.

Estamos cientes de que os sujeitos da pesquisa serão **os alunos do curso de Licenciatura em Matemática**, e que o objetivo da pesquisa consiste em analisar por meio da construção dos números reais, na perspectiva da produção de significados, que tipos de compreensões são evidenciadas, em relação à construção dos campos racional, irracional e real.

Para a execução do estudo a pesquisadora desenvolverá em sala a construção dos números reais tendo os alunos como participantes e parte integrante da pesquisa. A qualquer momento, os sujeitos da pesquisa poderão desistir de participar da mesma, não causando nenhum prejuízo à instituição, à pesquisa ou aos envolvidos. Os procedimentos adotados pela pesquisadora garantem sigilo da identidade dos participantes. Os dados serão utilizados para realização de relatórios internos e publicações científicas.

Vitória, 04 de junho de 2013.

APÊNDICE C

**Termo de autorização para desenvolvimento de pesquisa (professor)**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA**

Informo por meio deste documento que autorizo a pesquisadora **“MARIANA DOS SANTOS CEZAR”**, aluna regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo – Vitória, sob orientação do professor Rodolfo Chaves, a desenvolver o projeto intitulado**“ PRODUÇÕES DE SIGNIFICADOS NA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS”**, na turma constituída por 5 alunos que leciono a disciplina Tópicos Especiais em Matemática 2 na Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória.

Estou ciente de que os sujeitos da pesquisa serão **os alunos dessa turma**, em que atuo como professor, e que o objetivo da pesquisa consiste em analisar por meio da construção dos números reais, na perspectiva da produção de significados, que tipos de compreensões são evidenciadas, em relação à construção dos campos racional, irracional e real.

Para a execução do estudo estou ciente que a pesquisadora desenvolverá em sala a construção dos números reais tendo os alunos como participantes e parte integrante da pesquisa. A qualquer momento, os sujeitos da pesquisa poderão desistir de participar da mesma, não causando nenhum prejuízo à instituição, à pesquisa ou aos envolvidos. Estou ciente que os procedimentos adotados pela pesquisadora garantem sigilo da identidade dos participantes. Os dados serão utilizados para realização de relatórios internos e publicações científicas.

Vitória, 04 de junho de 2013.

APÊNDICE D

**Termo de autorização para desenvolvimento de pesquisa (professora)**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA**

Informo por meio deste documento que autorizo a pesquisadora **“MARIANA DOS SANTOS CEZAR”**, aluna regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo – Vitória, sob orientação do professor Rodolfo Chaves, a desenvolver o projeto intitulado **“PRODUÇÕES DE SIGNIFICADOS NA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS”**, na turma de 1º período em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória.

Estou ciente de que os sujeitos da pesquisa serão os alunos do curso de Licenciatura em Matemática do 1º período do Ifes, campus Vitória, turma em que atuo como professora, e que o objetivo da pesquisa consiste em analisar por meio da construção dos números reais, na perspectiva da produção de significados, que tipos de compreensões são evidenciadas em relação à construção dos campos racional, irracional e real.

Para a execução do estudo estou ciente que a pesquisadora desenvolverá em sala a construção dos números reais tendo os alunos como participantes e parte integrante da pesquisa. A qualquer momento, os sujeitos da pesquisa poderão desistir de participar da mesma, não causando nenhum prejuízo à instituição, à pesquisa ou aos envolvidos. Estou ciente que os procedimentos adotados pela pesquisadora garantem sigilo da identidade dos participantes. Os dados serão utilizados para realização de relatórios internos e publicações científicas.

Vitória, 04 de junho de 2013.

APÊNDICE E

**Autorização para uso de resultados de pesquisa**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Pós-graduanda: Mariana dos Santos Cezar
Orientador: Profº Dr. Rodolfo Chaves

## AUTORIZAÇÃO PARA USO DE RESULTADOS DE PESQUISA

Eu,_______________________________________________ aluno (a) do ____ período de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória, permito o uso de questionários respondidos por mim para reflexão, análise e outras possíveis utilizações, bem como a utilização de resultados de gravações para a pesquisa de mestrado da pós-graduanda Mariana dos Santos Cezar, aluna do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática - Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática do Campus Vitória.

Ciente da pesquisa a ser desenvolvida estou de acordo com os termos descritos.

Vitória – ES, ____ de ___________ de 2013.

_____________________________________

Assinatura

APÊNDICE F

**Questionário I**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Pós-graduanda: Mariana dos Santos Cezar
Orientador: Profº Dr. Rodolfo Chaves

Vitória – ES, ______ de _____________ de 2013

## QUESTIONÁRIO I

**Tema da Pesquisa:** Produção de significados matemáticos na construção dos números reais.

**Formação Acadêmica:**

Cursando Licenciatura: (   ) Sim   (   ) Não

Em__________________________________________________-
____________________

Período (Ano): Início em ____________ e previsão de término _____________

Instituição:___________________________________________________________
_______

**Formação Profissional.**

Já lecionou? (   ) Sim   (   ) Não

Se sim, de qual (ais) disciplina (as)?

_____________________________________________________________________

Em qual nível escolar?

(   ) Ensino Fundamental   (   ) Educação Superior

(   ) Ensino Médio

Outros:____________________________________________________________________
_______

**Em caso de possuir outra formação acadêmica.**

(   ) Bacharelado   (   ) Licenciatura

Curso:____________________________________________________________________
_________

Período (Ano): Início em _____________ e término _______________

Instituição:
__________________________________________________________________________

**Caso tenha outra formação acadêmica, elencar abaixo:**

Possui Pós-Graduação: (   ) Sim   (   ) Não

Em_________________________________________________________________________
________

Período (Mês e ano): Início em _____________ e término _______________

Instituição:_________________________________________________________________
________

Caso tenha mais de uma Pós-Graduação, elencar abaixo:

__________________________________________________________________________
_________

Período (Mês e ano): Início em _____________ e término _______________

Instituição:
__________________________________________________________________________

Outras informações:
__________________________________________________________________________
__________________________________________________________________________
__________________________________________________________________________
__________________________________________________________________________

Obrigada por sua participação!

APÊNDICE G

**Questionário II**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Pós-graduanda: Mariana dos Santos Cezar
Orientador: Profº Dr. Rodolfo Chaves

Vitória – ES, ______ de _____________ de 2013

## QUESTIONÁRIO II

**Tema da Pesquisa**: A produção de significados matemáticos na construção dos números reais.

Essa pesquisa de mestrado representa a vontade de ir além da investigação a respeito do ensino de números reais. Buscamos investigar, analisar, discutir e descrever a produção de significados mediante técnicas de construções numéricas. Essa busca incide na "crença-afirmação" que professores têm de ensinar, e principalmente aprender, como foram construídos os campos dos númerosracional,irracionalereal,paratrabalharcomalunosdediferentesníveisdeensino.

É de acordo com essa perspectiva que buscamos compreender como o conjunto dos números reais foi construído e quais significados matemáticos são produzidos a partir desse processo que nos propusemos a investigar: *Que significados matemáticos são produzidos por professores e futuros professores de Matemática, em formação inicial, ao longo de processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais?*

Nessa perspectiva o intuito desse questionário é analisar qual a concepção prévia que professores, em formação inicial, possuem acerca da construção dos números reais.

1) O que você entende por número real? Justifique.
2) Podemos construir o conjunto dos números reais? Por quê?

APÊNDICE H

**Questionário III**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Pós-graduanda: Mariana dos Santos Cezar
Orientador: Profº Dr. Rodolfo Chaves

Vitória – ES, ______ de ____________ de 2013

## QUESTIONÁRIO III

**Tema da Pesquisa**: A produção de significados matemáticos na construção dos números reais.

1) Defina, o que é número racional. Justifique.

2) Construa dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de forma que $\overline{CD}$ caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. Como escrever $\overline{AB}$ em relação à $\overline{CD}$? E como escrever $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$?

3) Subdivida o segmento $\overline{CD}$ em partes iguais. Tomando cada parte como nova unidade de medida u, quantas vezes u cabe em $\overline{AB}$? Como escrever $\overline{AB}$ em relação à $\overline{CD}$? E $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$?

4) Tomamos um novo segmento $\overline{AB}$ medindo 11cm, e um novo segmento $\overline{CD}$ medindo 3cm. Divida $\overline{CD}$ num número de partes iguais suficiente para que uma delas caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. O que se pode dizer da medida de $\overline{AB}$ em relação à antiga unidade $\overline{CD}$?

## REFLEXÃO:

I) Após as construções efetuadas, alguns significados matemáticos foram produzidos. Dessa forma, defina novamente o que é número racional e justifique.

II) Qual a sua opinião sobre o processo desenvolvido para a construção do campo racional?

**Obrigada por sua participação!**

APÊNDICE I

**Questionário IV**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Pós-graduanda: Mariana dos Santos Cezar
Orientador: Profº Dr. Rodolfo Chaves

Vitória – ES, ______ de _____________ de 2013

# QUESTIONÁRIO IV

**Tema da Pesquisa**: A produção de significados matemáticos na construção dos números reais.

1) Defina, o que é número irracional. Justifique.

2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

## REFLEXÃO:

I) Após as construções efetuadas, alguns significados matemáticos foram produzidos. Dessa forma, defina novamente o que é número irracional e justifique.

II) Qual a sua opinião sobre o processo desenvolvido para a construção do campo irracional?

**Obrigada por sua participação!**

APÊNDICE J

**Questionário V**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Pós-graduanda: Mariana dos Santos Cezar
Orientador: Profº Dr. Rodolfo Chaves

Vitória – ES, ______ de _____________ de 2013

## QUESTIONÁRIO V

**Tema da Pesquisa**: A produção de significados matemáticos na construção dos números reais.

1) Defina, o que é número real. Justifique.

**Considere apenas a existência do campo racional e responda as questões abaixo.**

2) Seja (P) o conjunto de pontos da reta. Efetue um corte na reta e atribua uma propriedade às classes determinadas pelo corte, de modo que o ponto no corte pertença a uma das classes. Explique seu raciocínio.

3) Seja (P) o conjunto de pontos da reta. Efetue um novo corte na reta (digamos no ponto E), de modo que a classe (A) dos pontos que estão à esquerda de E sejam todos os números racionais ***s***,que elevados ao quadrado são menores que 2 ( $\mathbf{s^2 < 2}$), e a classe (B) dos pontos que estão à direita de E sejam todos os números racionais ***r*** que elevados ao quadrado são maiores que 2 ( $\mathbf{r^2 > 2}$).

a) O ponto P pertence a algumas das classes? Por quê?

b) O que podemos concluir com esse exemplo?

## REFLEXÃO:

I) Após as construções efetuadas, alguns significados matemáticos foram produzidos. Dessa forma, defina novamente o que é número real e justifique.

II) Qual a sua opinião sobre o processo desenvolvido para a construção do campo real

**Obrigada por sua participação!**

APÊNDICE K

**Plenária**

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
*Campus* Vitória
Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Pós-graduanda: Mariana dos Santos Cezar
Orientador: Profº Dr. Rodolfo Chaves

Vitória – ES, ______ de _____________ de 2013

# PLENÁRIA

**Tema da Pesquisa**: A produção de significados matemáticos na construção dos números reais.

1)O que foi possível observar ao longo das discussões sobre a construção dos números reais?

2)Os significados produzidos e relatados estão de acordo com o que pensa sobre as questões descritas? Por quê?

3)Qual observação gostaria de fazer sobre a pesquisa desenvolvida? Tem alguma sugestão? Descreva.

**Obrigada por sua participação!**